이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2022 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2022 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통 〉

- 공통 1 : 문제를 보자마자 a^2-b^2이 떠올라야 함. 1번부터 '이 시험은 교과서/기출문제를 풀었던 기억으로 푼다.' 를 의도적으로 말하고 있음. 즉, '정해진 풀이를 따르지 않으면 망한다.' 를 노골적으로 표현.
- 공통 8 : 이차함수의 정적분 → 대칭축을 생각한다.
- 공통 13 : 그림을 그릴 수 없으니, 처음부터 끝까지 계산. 로그문제에서 a^b이 나오면 $\log a^b = b\log a$ 생각이 들어야.
- 공통 14 : x축에서 점 P 를 움직이는게 우선.
- 공통 15 : 역대 평가원 기출 중에서 " 코사인법칙에 의하여 " 란 문구가 등장한 첫 번째 문제. 어떤 공식을 써야 하는지 알려 주었는데. 어려운 문제일리 없다. 읽는데 4점.
- 공통 21 : $2+2^2+2^3<2^4$과 같은 계산을 해보았는가? '기하급수적으로 빨라진다.' 의 의미를 아는가를 평가.
- 공통 22 : $f(1)=f(4)$에서 $f(x)$의 그래프의 개형이 바로 나와야 함. 삼차함수의 비율관계.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 28 : 분할, 여사건 모두 가능. 이 문제 보다 경우 구분이 많은 함수 개수 세는 문제는 기출에 널려있음.
- 확률과 통계 29 : 적분 기호 쓰면 좀 더 편하긴 한데. $y=k$ 그리면 더 단순하게 해결 가능.
- 확률과 통계 30 : 답을 맞히기 상당히 어려운, 실수하기 딱 좋은 문제. 수형도 그냥 다 그리는 편이 나음.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 : 평행이동/대칭성 & 기출을 풀었던 경험. 풀이 중간 과정에서 답을 바로 알 수 있음.
- 미적분 29 : 계산이 복잡하니. 극한의 근사적 계산으로 접근하면 실수 없이 빠르게 계산 가능.
- 미적분 30 : (나)의 항등식에 $x=1$, 2, 4 대입하여 점찍고, 확대해서 그리면 끝. 역함수의 정적분 계산 말고, 그림으로 해결.

〈 기하 〉

- 기하 26 : 동일하게 쌍곡선으로 수능에 출제된 적이 있음. 원 밖의 점에서 접선 2개 그으면 합동인 직각삼각형 2개 찾는다.
- 기하 28 : 빗변 주면, 직각삼각형 그리고. 기울기 없으니, 피타 쓰고. 포물선의 정의대로 선분 그으면 직각 안에 수선 그려지니 닮음 쓰고.
- 기하 29 : 문제에서 원 위의 점 주었으니. (나)는 직선(선분)일 수밖에. 이 유형의 문제 중에서도 중급 수준.
- 기하 30 : 평가원 기출 중, 구/직선 정사영 내려서 점의 이동 관찰하는 문제의 확장판. 풀다보면 이면각 보다는 정사영이 좀 더 편하긴 하지만. 이면각의 정의에 의한 풀이도 계산이 거의 없음. 기존 공도 기출과 비교하여 중급 수준.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정		
1991	실험평가(1차)	1990년 12월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월
1995	대학수학능력	1994년 11월
1996	대학수학능력	1995년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월
1998	대학수학능력	1997년 11월
6차 교육과정		
1999	대학수학능력	1998년 11월
2000	대학수학능력	1999년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월
2002	대학수학능력	2001년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월
7차 교육과정		
2005	예비시행	2003년 12월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월
2005	대학수학능력	2004년 11월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월
2006	대학수학능력	2005년 11월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월
2009	모의평가(9월)	2008년 9월
2009	대학수학능력	2008년 11월
2010	모의평가(6월)	2009년 6월
2010	모의평가(9월)	2009년 9월
2010	대학수학능력	2009년 11월
2011	모의평가(6월)	2010년 6월
2011	모의평가(9월)	2010년 9월
2011	대학수학능력	2010년 11월

학년도	시험	실시년도/월
2007개정 교육과정		
2012	모의평가(6월)	2011년 6월
2012	모의평가(9월)	2011년 9월
2012	대학수학능력	2011년 11월
2014	예비시행	2012년 5월
2013	모의평가(6월)	2012년 6월
2013	모의평가(9월)	2012년 9월
2013	대학수학능력	2012년 11월
2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2014	대학수학능력	2013년 11월
2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2015	대학수학능력	2014년 11월
2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2016	대학수학능력	2015년 11월
2009개정 교육과정		
2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2017	대학수학능력	2016년 11월
2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2018	대학수학능력	2017년 11월
2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2019	대학수학능력	2018년 11월
2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2020	대학수학능력	2019년 11월
2015개정 교육과정		
2021	예시문항	2020년 5월
2021	모의평가(6월)	2020년 6월
2021	모의평가(9월)	2020년 9월
2021	대학수학능력	2020년 11월
2022	모의평가(6월)	2021년 6월
2022	모의평가(9월)	2021년 9월
2022	대학수학능력	2021년 11월

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다. 그리고 모든 풀이를 보여준다는 의미에서 교육과정 외의 풀이도 수록하였으나, 이를 반드시 읽어야(공부해야) 하는 것은 아닙니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)
[풀이] (교육과정 외)
[참고] (교육과정 외)

목 차

수학 Ⅰ

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록

A. 거듭제곱과 거듭제곱근

A001

○ (2003-인문1/예체능1/자연1)

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}$을 간단히 하면? [2점]

① 2 ② 4 ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt[3]{2}$

A002

○○ (2005(9)-나형5)

세 수 $A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}$, $B=\sqrt{5}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? [3점]

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

A003

○○ (2007(9)-나형20)

세 양수 a, b, c에 대하여 $a^6=3$, $b^5=7$, $c^2=11$일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

A004

○○○ (2021(6)-가형12)

자연수 n이 $2\le n\le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

A005

●●● (2022(6)-확률과통계21/미적분21/기하21)

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은
서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

A. 지수의 확장

A006

○○ (1992(실험평가2차)-공통16)

$a=3^{x+2}$일 때, 27^x을 a에 관한 식으로 나타내면?

① $\dfrac{a^3}{3^2}$　② $\dfrac{a^3}{3^3}$　③ $\dfrac{a^3}{3^4}$

④ $\dfrac{a^3}{3^5}$　⑤ $\dfrac{a^3}{3^6}$

A007

○ (1998-인문예체능1/자연1)

$\left\{\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{8}{27}$　② $\dfrac{16}{61}$　③ $\dfrac{81}{16}$

④ $\dfrac{27}{8}$　⑤ $\dfrac{64}{81}$

A008

○○ (1999-예체능7)

$2^a=c,\ 2^b=d$일 때 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2a+b}$ 와 같은 것은? [3점]

① $\dfrac{1}{cd}$　② $\dfrac{1}{2cd}$　③ $\dfrac{1}{c^2d}$

④ $-cd$　⑤ $-2cd$

A009

○ (2005(6)-가형1/나형1)

$25^{-\frac{3}{2}} \times 100^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

A010

○○ (2006(6)-나형4)

$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$ 일 때, $\sqrt[6]{6}$ 을 a, b로 나타낸 것은? [3점]

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$
④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

A011

○○ (2008(9)-나형4)

다음 식을 간단히 한 것은? [3점]

$$(2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2$$

① 2^{2x} ② 2^{2x+2} ③ 2^{2x+2y}
④ 2^{-2y} ⑤ 2^{-2y+2}

A012

○○ (2008-나형4)

$a=\sqrt{2}$, $b^3=\sqrt{3}$ 일 때, $(ab)^2$의 값은? (단, b는 실수이다.) [3점]

① $2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$ ② $2\cdot 3^{\frac{2}{3}}$ ③ $2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}$
④ $3\cdot 2^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $3\cdot 2^{\frac{2}{3}}$

A013

○○ (2009(9)-나형20)

두 실수 a, b가 $3^{a+b}=4$, $2^{a-b}=5$를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오. [3점]

A014

○○ (2010(6)-나형4)

실수 a가 $\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a}의 값은? [3점]

① $\dfrac{5}{2}$ ② $\dfrac{10}{3}$ ③ $\dfrac{17}{4}$
④ $\dfrac{26}{5}$ ⑤ $\dfrac{37}{6}$

A015

○○
(2011(9)−나형26)

$1 \le m \le 3$, $1 \le n \le 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

A016

○○
(2013(9)−나형6)

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

A017

○○○
(2013−나형26)

$2 \le n \le 100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. [4점]

A018

○
(2022−확률과통계1/미적분1/기하1)

$(2^{\sqrt{3}} \times 4)^{\sqrt{3}-2}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

A. 로그의 뜻과 성질

A019
(1994(1차)−공통1) ○○

a, x, y가 양의 실수이고 $A=\log_a \frac{x^2}{y^3}$, $B=\log_a \frac{y^2}{x^3}$일 때, $3A+2B$와 같은 것은? (단, $a \neq 1$이다.)

① $\log_a \frac{1}{x^5}$ ② $\log_a \frac{1}{y^5}$ ③ $\log_a \frac{1}{xy}$
④ $\log_a \frac{x^5}{y^5}$ ⑤ $\log_a \frac{x^5}{y^7}$

A020
(2001−인문17/예체능17/자연17) ○

다음은 지수법칙 $a^{r+s}=a^r a^s$으로부터 모든 양수 x, y에 대하여

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$$

가 성립함을 증명한 것이다. (단, $a \neq 1$, $a>0$)

〈증명〉
$r=\log_a x$, $s=\log_a y$로 놓으면
$a^r=x$, $a^s=$ $\boxed{(가)}$
지수법칙으로부터
$a^{r+s}=$ $\boxed{(나)}$
로그의 정의에 의하여
$r+s=\log_a$ $\boxed{(나)}$
그러므로 $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$이다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

① x, $x+y$ ② y, $x+y$ ③ x, xy
④ y, xy ⑤ x, $\frac{x}{y}$

A021
(2001−예체능27) ○

$\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+\log_2 16$의 값을 구하시오. [2점]

A022
(2002−인문2/예체능2) ○

$\log_2 (4^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{2^5})^{\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

A023
(2003−예체능26) ○

$\log_2 \frac{24}{5}+\log_2 \frac{80}{3}$의 값을 구하시오. [2점]

A024
(2004(6)−예체능11) ○○

두 양수 x와 y가 $2\log_{10} x+\log_{10} y=2$를 만족시킬 때, x^2+y의 최솟값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 40

A025
○○ (2004(9)-인문25/예체능25/자연25)

$\log_2 x + \log_4 \frac{1}{x} = 5$일 때, $\log_4 x - \log_2 \frac{1}{x}$의 값을 구하시오. [2점]

A026
○ (2005(예비)-나형14)

다음은 $\log_a b$를 임의의 양수 $c(c \neq 1)$를 밑으로 하는 로그로 바꾸어 나타낼 수 있음을 증명한 것이다.

〈증명〉

$\log_a b = x$, $\log_c a = y$라고 하면 $a^x = b$, $c^y = a$이다.

이때, $b = c^{\boxed{(가)}}$이므로 $\boxed{\quad (가) \quad} = \log_c b$이다.

즉, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$ 이다.

여기서 $\boxed{\quad (나) \quad}$이므로 $\log_c a \neq 0$이다.

따라서 $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$이다.

위의 증명에서 (가)와 (나)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	xy	$a \neq 1$
②	xy	$a > 0$
③	$x+y$	$a \neq 1$
④	$x+y$	$a > 0$
⑤	$\frac{x}{y}$	$a \neq 1$

A027
○○ (2005(6)-나형4)

$\log_{\sqrt{3}} x = 4$, $\log_3 y = 6$일 때, $\log_x y$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A028
○ (2005(6)-나형18)

$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32} \cdot \log_2 \frac{1}{16}$의 값을 구하시오. [3점]

A029
○○ (2005(9)-가형7/나형7)

$a = \log_7 \sqrt{7 - \sqrt{48}}$ 일 때, $\dfrac{7^{2a} - 7^{-2a}}{7^{2a} + 7^{-2a}}$의 값은? [3점]

① $\frac{6\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{7}$
④ $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{7}$

A030

○ (2005(9)−나형15)

다음은 로그의 성질 $\log_p q^r = r\log_p q$를 이용하여 m이 0이 아닌 실수일 때,

$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$(단, a는 1이 아닌 양수, b는 양수)

가 성립함을 증명한 것이다.

〈증명〉
$x = \log_{a^m} b^n$로 놓으면
$b^n = \boxed{\text{(가)}} = (a^x)^{\boxed{\text{(나)}}}$이므로
$a^x = \boxed{\text{(다)}}$
따라서 $x = \log_a \boxed{\text{(다)}} = \dfrac{n}{m}\log_a b$가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	a^x	m	b^n
②	a^x	$\dfrac{m}{n}$	$b^{\frac{n}{m}}$
③	$(a^m)^x$	m	$b^{\frac{n}{m}}$
④	$(a^m)^x$	m	b^n
⑤	$(a^m)^x$	$\dfrac{m}{n}$	$b^{\frac{n}{m}}$

A031

○○ (2005−가형5/나형5)

〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $2^{\log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 3 + \cdots + \log_2 10} = 10!$
ㄴ. $\log_2(2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{10})^2 = 55^2$
ㄷ. $(\log_2 2^1)(\log_2 2^2)(\log_2 2^3)\cdots(\log_2 2^{10}) = 55$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A032

○○○ (2006(9)−가형11/나형11)

다음은 자연수 n에 대하여 $\log_2 n$이 유리수이면 n을 $n = 2^k$(단, k는 $k \ge 0$인 정수)의 꼴로 나타낼 수 있음을 증명한 것이다.

〈증명〉
자연수 n에 대하여 $\log_2 n$이 유리수라고 하자.
n이 자연수이므로 $n = 2^k \cdot m$을 만족시키는 $k \ge 0$인 정수 k와 홀수인 자연수 m이 존재한다.
그러면 $\log_2 n = \boxed{\text{(가)}}$
따라서 $\log_2 n$이 유리수이면 $\log_2 m$도 유리수이어야 하므로 $\log_2 m = \dfrac{q}{p}$(단, p는 자연수이고 q는 정수)로 놓을 수 있다.
그러면 $\boxed{\text{(나)}}$
m이 홀수이므로 m^p은 홀수이다.
따라서 2^q도 홀수이어야 하므로
$\boxed{\text{(다)}}$이고 $m = 1$이다.
따라서 n을 $n = 2^k$(단, k는 $k \ge 0$인 정수)의 꼴로 나타낼 수 있다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$k\log_2 m$	$m^q = 2^p$	$q = 1$
②	$k\log_2 m$	$m^p = 2^q$	$q = 1$
③	$k + \log_2 m$	$m^q = 2^p$	$q = 0$
④	$k + \log_2 m$	$m^p = 2^q$	$q = 1$
⑤	$k + \log_2 m$	$m^p = 2^q$	$q = 0$

A033

○○
(2006−나형20)

두 양수 a, b에 대하여

$$\begin{cases} ab=27 \\ \log_3 \dfrac{b}{a}=5 \end{cases}$$

가 성립할 때, $4\log_3 a+9\log_3 b$의 값을 구하시오. [3점]

A034

○○
(2007−나형8)

1보다 큰 세 실수 a, b, c에 대하여

$\log_a c : \log_b c=2 : 1$일 때, $\log_a b+\log_b a$의 값은? [3점]

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

A035

○○
(2008(6)−가형24/나형24)

다음 조건을 만족시키는 세 정수 a, b, c를 더한 값을 k라 할 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $1 \le a \le 5$
(나) $\log_2(b-a)=3$
(다) $\log_2(c-b)=2$

A036

○○○
(2008(6)−나형10)

2 이상인 두 자연수 a, b에 대하여 $R(a, b)$를 $R(a, b)=\sqrt[a]{b}$로 정의할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $R(16, 4)=R(8, 2)$
ㄴ. $R(a, 5)\cdot R(b, 5)=R(a+b, 5)$
ㄷ. $R(a, b)=k$이면 $a=\log_k b$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A037

○
(2009(9)−가형1/나형1)

$2^{2\log_3 9}$의 값은? [2점]

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 32 ⑤ 40

A038

○○○
(2009−나형21)

$1 < a < b$인 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{3a}{\log_a b} = \frac{b}{2\log_b a} = \frac{3a+b}{3}$$

가 성립할 때, $10\log_a b$의 값을 구하시오. [3점]

A039

○
(2010(9)−가형1/나형1)

$\log_2 9 \cdot \log_3 \sqrt{2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

A040

○○
(2011(6)−나형22)

$a = \log_2(2+\sqrt{3})$일 때, $4^a + \dfrac{4}{2^a}$의 값을 구하시오. [3점]

A041

★★★ (2012(6)-가형30/나형30)

100 이하의 자연수 전체의 집합을 S라 할 때, $n \in S$에 대하여 집합

$$\{k \mid k \in S\text{이고 } \log_2 n - \log_2 k\text{는 정수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(10)=5$이고 $f(99)=1$이다. 이때, $f(n)=1$인 n의 개수를 구하시오. [4점]

A042

★★★ (2017(6)-나형30)

다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> $\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고
>
> $0<b-a\le\dfrac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

A043
○○ (2018(9)-나형13)

두 실수 a, b가

$$ab = \log_3 5, \ b - a = \log_2 5$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$의 값은? [3점]

① $\log_5 2$ ② $\log_3 2$ ③ $\log_3 5$
④ $\log_2 3$ ⑤ $\log_2 5$

A044
○○ (2018-나형16)

1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_{\sqrt{3}} a = \log_9 ab$$

가 성립할 때, $\log_a b$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A045
○○ (2019(6)-나형13)

좌표평면 위의 두 점 $(1, \log_2 5)$, $(2, \log_2 10)$을 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A046
○ (2019(9)-나형25)

양수 a에 대하여 $a^{\frac{1}{2}} = 8$일 때, $\log_2 a$의 값을 구하시오. [3점]

A047
○○○ (2019-나형15)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 34 ② 38 ③ 42
④ 46 ⑤ 50

A048

○○
(2020(6)-나형8)

$\log_2 5=a$, $\log_5 3=b$일 때, $\log_5 12$를 a, b로 옳게 나타낸 것은? [3점]

① $\frac{1}{a}+b$ ② $\frac{2}{a}+b$ ③ $\frac{1}{a}+2b$

④ $a+\frac{1}{b}$ ⑤ $2a+\frac{1}{b}$

A049

○○
(2022(예시문항)-공통18)

두 양수 x, y가

$$\log_2(x+2y)=3,\ \log_2 x+\log_2 y=1$$

을 만족시킬 때, x^2+4y^2의 값을 구하시오. [3점]

A050

○○
(2021(6)-가형6)

두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ \log_4 a)$, $(3,\ \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a\neq 1$) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

A051

●●●
(2021(6)-가형21)

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=\log_2\sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m}a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

① 150 ② 154 ③ 158

④ 162 ⑤ 166

▶ 수열의 합(시그마)에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 소단원에 두었습니다.

A052

○○ (2021(9)-가형11)

1보다 큰 세 실수 a, b, c가

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4}$$

를 만족시킬 때, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$

④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

A053

○○○ (2021-가형27)

$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$ 의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

A054

○○○ (2022-확률과통계13/미적분13/기하13)

두 상수 a, $b(1 < a < b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$에 대하여 $f(1) = 40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840

④ 880 ⑤ 920

A. 상용로그

A055

○○ (2009−나형6)

$a = \log_2 10$, $b = 2\sqrt{2}$일 때, $a\log b$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

A056

●●● (2020(9)−나형28)

네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

(가) $3^a = 5^b = k^c$
(나) $\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$

A057

○○ (2022(예시문항)−공통10)

$\frac{1}{2} < \log a < \frac{11}{2}$인 양수 a에 대하여 $\frac{1}{3} + \log\sqrt{a}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? [4점]

① 10^{10} ② 10^{11} ③ 10^{12} ④ 10^{13} ⑤ 10^{14}

A. 상용로그(실생활)

▶ 아래의 문제들은 최근 수능에서 출제되고 있지 않지만 교과서 본문에서 예제로 다뤄지므로 책에 수록합니다.

A058

○○
(2009(6)-가형13/나형13)

실외 공기 중의 이산화탄소 농도가 0.03%일 때, 실내 공간에서 공기 중의 초기 이산화탄소 농도 $c(0)$(%)를 측정한 후, t시간 뒤의 실내 공간의 이산화탄소 농도 $c(t)$(%)와 환기량 $Q(\mathrm{m}^3/\text{시})$의 관계는 다음과 같다.

$$Q = k \times \frac{V}{t}\log\frac{c(0)-0.03}{c(t)-0.03}$$

(단, k는 양의 상수이고, $V(\mathrm{m}^3)$는 실내 공간의 부피이다.)

실외 공기 중의 이산화탄소 농도가 0.03%이고 환기량이 일정할 때, 초기 이산화탄소 농도가 0.83%인 빈 교실에서 환기를 시작한 후 1시간 뒤의 이산화탄소 농도를 측정하였더니 0.43%이었다. 환기를 시작한 후 t시간 뒤에 이산화탄소 농도가 0.08%가 되었다. t의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

A059

○○
(2014-A형10/B형25)

단면의 반지름의 길이가 $R(R<1)$인 원기둥 모양의 어느 급수관에 물이 가득 차 흐르고 있다. 이 급수관의 단면의 중심에서의 물의 속력을 v_c, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $x(0<x\le R)$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력을 v라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\frac{v_c}{v} = 1 - k\log\frac{x}{R}$$

(단, k는 양의 상수이고, 길이의 단위는 m, 속력의 단위는 m/초이다.)

$R<1$인 이 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $R^{\frac{27}{23}}$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{2}$일 때, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 R^a만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{3}$이다. $23a$의 값을 구하시오. [3점]

A060

○○
(2016(9)−A형16/B형25)

고속철도의 최고소음도 L(dB)을 예측하는 모형에 따르면 한 지점에서 가까운 선로 중앙 지점까지의 거리를 d(m), 열차가 가까운 선로 중앙 지점을 통과할 때의 속력을 v(km/h)라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L = 80 + 28\log\frac{v}{100} - 14\log\frac{d}{25}$$

가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리가 75 m인 한 지점에서 속력이 서로 다른 두 열차 A, B의 최고소음도를 예측하고자 한다. 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력이 열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력의 0.9배일 때, 두 열차 A, B의 예측 최고소음도를 각각 L_A, L_B라 하자.

$L_B - L_A$의 값을 $a + b\log 3$이라 할 때, $a - b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이다.) [3점]

A. 지수함수의 뜻과 그래프

A061

○○
(2002-인문11/예체능11/자연11)

지수함수의 그래프에 대한 〈보기〉의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=\dfrac{1}{2^x}$의 그래프가 된다.

ㄴ. $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=2^x$의 그래프보다 아래에 놓이게 된다.

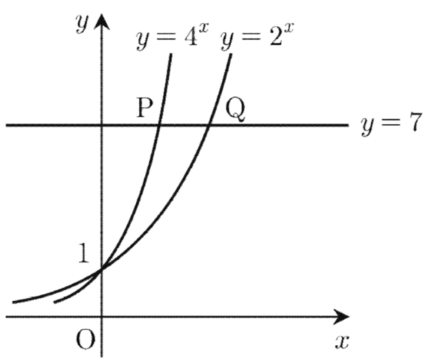
ㄷ. $y=\sqrt{2}\cdot 2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여 $y=2^x$의 그래프를 얻을 수 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A062

○○
(2004(6)-인문6/예체능6)

두 곡선 $y=4^x$과 $y=2^x$이 직선 $y=7$과 만나는 점을 각각 P와 Q라고 할 때, 선분 PQ의 길이는? [3점]



① $\dfrac{1}{2}\log_2 7$ ② $\dfrac{1}{2}\log_2 7-1$ ③ $\dfrac{1}{2}\log_2 7+1$
④ $\log_2 7-1$ ⑤ $\log_2 7-2$

A063

○○
(2005(6)-나형6)

함수 $y=5^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=25\cdot 5^{2x}+2$의 그래프가 되었다. $m+n$의 값은? [3점]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

A064

○○○
(2005(9)-나형12)

집합 $G=\{(x,\ y)\mid y=5^x,\ x\text{는 실수}\}$에 대하여 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $(a,\ b)\in G$이면 $\left(\dfrac{a}{2},\ \sqrt{b}\right)\in G$이다.

ㄴ. $(-a,\ b)\in G$이면 $\left(a,\ \dfrac{1}{b}\right)\in G$이다.

ㄷ. $(2a,\ b)\in G$이면 $(a,\ b^2)\in G$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A065

○
(2007-나형4)

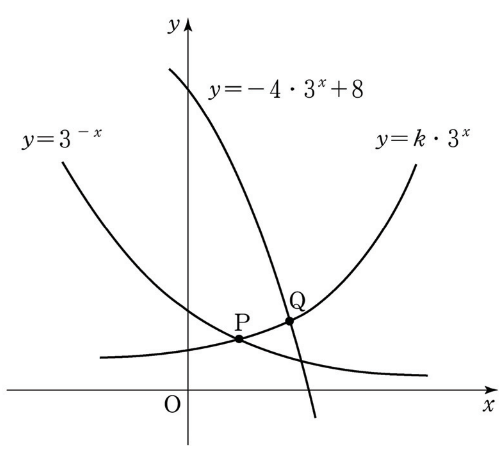
정의역이 $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$인 두 지수함수 $f(x)=4^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 M, $g(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? [3점]

① 8 ② 6 ③ 4
④ 2 ⑤ 1

A066

○○○
(2007-가형25/나형25)

함수 $y=k \cdot 3^x(0<k<1)$의 그래프가 두 함수 $y=3^{-x}$, $y=-4 \cdot 3^x+8$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P와 점 Q의 x좌표의 비가 1 : 2일 때, $35k$의 값을 구하시오. [4점]



A067

○○
(2007-나형27)

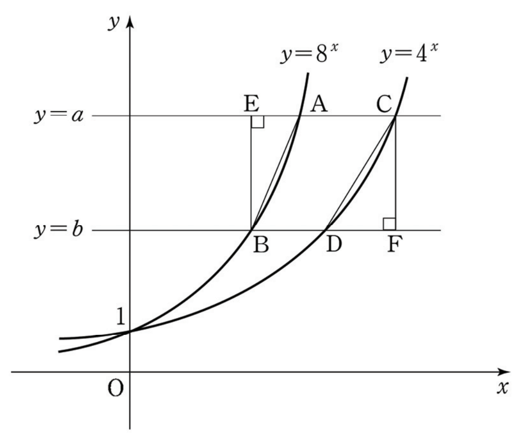
$0<a<1$인 a에 대하여 10^a을 3으로 나눌 때, 몫이 정수이고 나머지가 2가 되는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $3\log 2$ ② $6\log 2$ ③ $1+3\log 2$
④ $1+6\log 2$ ⑤ $2+3\log 2$

A068

○○○
(2008(6)-가형13/나형13)

그림과 같이 함수 $y=8^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=4^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 $y=b$에 내린 수선의 발을 F라 하자. 삼각형 AEB의 넓이가 20일 때, 삼각형 CDF의 넓이는?
(단, $a>b>1$이다.) [3점]



① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

A069
○○ (2008−나형26)

함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되고, 이 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$이 점 $\mathrm{A}'(3,\ g(3))$으로 이동된다. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지날 때, $m+n$의 값은? [3점]

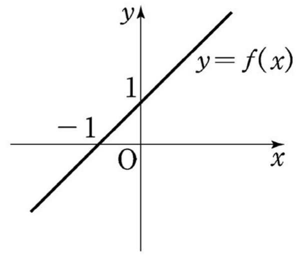
① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$

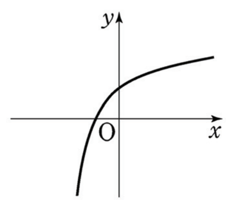
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

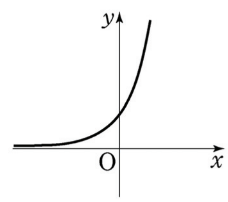
A070
○○ (2009(9)−나형7)

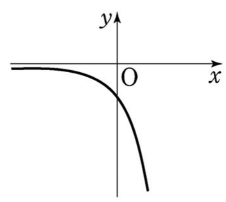
오른쪽 그림은 일차함수 $y=f(x)$의 그래프이다.

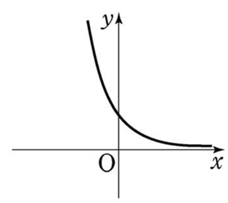
함수 $y=2^{2-f(x)}$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은? [3점]

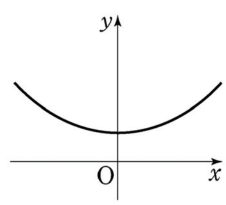


①


②


③


④


⑤


A071

○○ (2009-가형7/나형7)

두 지수함수 $f(x)=a^{bx-1}$, $g(x)=a^{1-bx}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. (나) $f(4)+g(4)=\frac{5}{2}$

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $0<a<1$) [3점]

① 1　② $\frac{9}{8}$　③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{11}{8}$　⑤ $\frac{3}{2}$

A072

○○ (2011-나형11)

좌표평면에서 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1,\ 4)$를 지난다. 양수 a의 값은? [3점]

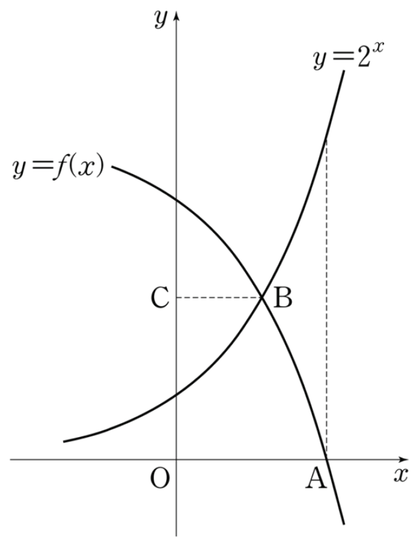
① $\sqrt{2}$　② 2　③ $2\sqrt{2}$

④ 4　⑤ $4\sqrt{2}$

A073

○○ (2014(예비)-B형8)

곡선 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하자. (단, $m>2$이다.)



곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=2^x$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{BC}}$일 때, m의 값은? [3점]

① $2\sqrt{2}$　② 4　③ $4\sqrt{2}$

④ 8　⑤ $8\sqrt{2}$

A074

○○ (2018(9)-가형7)

$0<a<1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^x$은 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 최솟값 $\frac{5}{6}$, 최댓값 M을 갖는다. $a\times M$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{5}$　② $\frac{3}{5}$　③ $\frac{4}{5}$
④ 1　⑤ $\frac{6}{5}$

A075

○○ (2019(9)-가형7)

함수 $f(x)=-2^{4-3x}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않도록 하는 자연수 k의 최댓값은? [3점]

① 10　② 12　③ 14
④ 16　⑤ 18

A076

●●● (2021(6)-가형18/나형21)

두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $x_2>\frac{1}{2}$
ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$
ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A077

○○ (2021(6)-나형9)

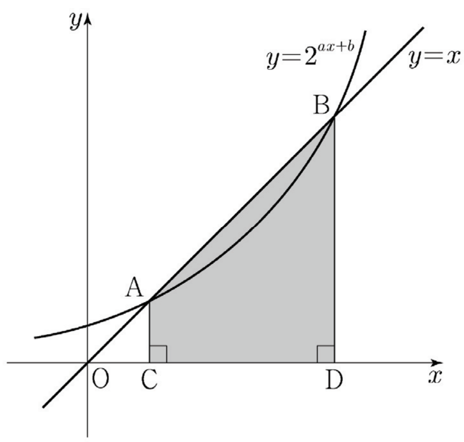
닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)=2^{|x|}$의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

① 5　② 7　③ 9　④ 11　⑤ 13

A078

○○ (2021(9)-가형13/나형15)

곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]



① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

A. 로그함수의 뜻과 그래프

A079

○○ (1997-인문예체능26/자연26)

함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{71}{5}-\dfrac{19}{15}x & (x<12) \\ 1-2\log_3(x-9) & (x\geq 12) \end{cases}$$

의 역함수를 $g(x)$라고 할 때,
$(g\circ g\circ g\circ g\circ g)(x)=-3$을 만족하는 x의 값을 구하여라. (단, $(g\circ g)(x)=g(g(x))$이다.) [3점]

A080

○○ (1999-인문5/예체능5/자연5)

〈보기〉중 같은 함수끼리 짝지어진 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $\begin{cases} y=\log(x-1)(x-2) \\ y=\log(x-1)+\log(x-2) \end{cases}$

ㄴ. $\begin{cases} y=\dfrac{x^2-1}{x-1} \\ y=x+1 \end{cases}$

ㄷ. $\begin{cases} y=x \\ y=\sqrt[3]{x^3} \end{cases}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄷ

A081

○○ (2001−예체능29)

함수 $y=10^{ax}$의 역함수가 $y=\dfrac{a}{100}\log x$일 때, 양수 a의 값을 구하시오. (단, log는 상용로그) [3점]

A082

○○○ (2002−예체능8)

$a>0$, $b>0$일 때 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \le \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$
ㄴ. $\dfrac{3^a+3^b}{2} \le 3^{\frac{a+b}{2}}$
ㄷ. $\dfrac{\log a+\log b}{2} \le \log\dfrac{a+b}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

A083

○ (2003(9)−인문12/예체능12/자연12)

함수 $y=\log_2(x+1)+1$의 그래프가 x축 및 y축과 만나는 두 점을 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

A084

★★★ (2003−인문14/자연14)

n이 자연수일 때, 〈보기〉의 부등식 중 항상 성립하는 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $\log_2(n+3)>\log_2(n+2)$
ㄴ. $\log_2(n+2)>\log_3(n+2)$
ㄷ. $\log_2(n+2)>\log_3(n+3)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

1	①	2	②	3	30	4	①	5	24
6	⑤	7	④	8	③	9	④	10	①
11	②	12	①	13	25	14	②	15	④
16	②	17	16	18	②	19	②	20	④
21	10	22	①	23	7	24	③	25	15
26	①	27	③	28	10	29	④	30	③
31	①	32	⑤	33	32	34	④	35	58
36	③	37	②	38	20	39	①	40	15
41	25	42	78	43	④	44	③	45	①
46	6	47	①	48	②	49	56	50	③
51	④	52	①	53	13	54	②	55	②
56	75	57	①	58	②	59	31	60	84
61	③	62	①	63	②	64	②	65	①
66	20	67	③	68	③	69	①	70	④
71	①	72	①	73	②	74	⑤	75	④
76	⑤	77	③	78	④	79	18	80	③
81	10	82	④	83	④	84	⑤	85	②
86	⑤	87	③	88	16	89	④	90	③
91	13	92	④	93	④	94	16	95	②
96	259	97	53	98	①	99	⑤	100	⑤
101	③	102	③	103	⑤	104	①	105	④
106	①	107	①	108	③	109	⑤	110	④
111	③	112	④	113	25	114	③	115	③
116	①	117	③	118	192	119	②	120	25
121	18	122	⑤	123	128	124	③	125	①
126	17	127	13	128	⑤	129	④	130	②
131	10	132	36	133	⑤	134	⑤	135	③
136	④	137	③	138	①	139	①	140	18
141	①	142	②	143	③	144	⑤	145	15
146	②	147	④	148	③	149	16	150	20
151	④	152	12	153	③	154	⑤	155	④
156	④	157	③	158	12	159	4	160	27
161	①	162	③	163	③	164	②	165	1
166	②	167	②	168	⑤	169	80	170	③
171	16	172	①	173	②	174	⑤	175	③
176	④	177	⑤	178	81	179	②	180	63
181	14	182	②	183	⑤	184	③	185	①
186	②	187	15	188	②	189	39	190	196
191	86	192	79	193	392	194	15	195	573
196	120	197	①	198	12	199	②	200	①

B 삼각함수

1	②	2	⑤	3	2.5	4	④	5	④
6	④	7	④	8	②	9	③	10	②
11	14	12	④	13	②	14	①	15	①
16	②	17	②	18	②	19	③	20	③
21	③	22	②	23	②	24	11	25	①
26	③	27	①	28	④	29	⑤	30	①
31	④	32	①	33	④	34	6	35	①
36	⑤	37	30	38	7	39	③	40	④
41	④	42	②	43	③	44	①	45	②
46	②	47	⑤	48	⑤	49	④	50	①
51	⑤	52	②	53	④	54	⑤	55	①
56	②	57	19.39	58	②	59	②	60	②
61	①	62	26	63	21	64	⑤	65	③
66	②	67	③	68	②	69	②		

C 수열

1	②	2	⑤	3	③	4	②	5	15
6	③	7	32	8	15	9	②	10	④
11	10	12	①	13	3	14	③	15	①
16	①	17	③	18	②	19	③	20	⑤
21	⑤	22	①	23	②	24	④	25	③
26	④	27	10	28	⑤	29	①	30	196
31	③	32	16	33	①	34	①	35	②
36	7	37	58	38	③	39	⑤	40	64
41	35	42	25	43	③	44	128	45	25
46	⑤	47	108	48	15	49	④	50	10
51	⑤	52	①	53	①	54	①	55	③
56	20	57	④	58	②	59	①	60	36
61	③	62	①	63	②	64	④	65	14
66	10	67	63	68	64	69	9	70	⑤
71	47	72	39	73	①	74	332	75	⑤
76	①	77	④	78	13	79	①	80	5
81	②	82	⑤	83	②	84	250	85	④
86	88	87	④	88	①	89	③	90	①
91	④	92	②	93	①	94	①	95	14
96	④	97	③	98	117	99	162	100	④
101	①	102	25	103	②	104	②	105	12
106	678	107	⑤	108	②	109	③	110	②
111	15	112	①	113	④	114	110	115	①
116	11	117	④	118	④	119	④	120	150
121	⑤	122	91	123	⑤	124	①	125	160
126	⑤	127	②	128	21	129	①	130	103
131	⑤	132	②	133	9	134	④	135	④
136	④	137	④	138	③	139	56	140	②
141	46	142	④	143	①	144	⑤	145	④
146	②	147	156	148	②	149	④	150	30
151	③	152	⑤	153	②	154	21	155	②
156	39	157	63	158	③	159	100	160	①
161	①	162	④	163	513	164	④	165	23
166	①	167	①	168	11	169	255	170	256
171	8	172	⑤	173	13	174	①	175	②
176	②	177	8	178	①	179	④	180	8
181	④	182	③	183	33	184	③	185	④
186	②	187	②	188	⑤	189	①	190	①
191	④	192	②	193	③	194	②	195	②
196	⑤	197	⑤	198	④	199	①	200	②

201	④	202	②	203	③	204	⑤	205	②
206	④	207	63	208	⑤	209	64	210	⑤
211	④	212	⑤	213	①	214	31		

해설 목차

수학 Ⅰ

A 지수함수와 로그함수

1	①	2	②	3	30	4	①	5	24
6	⑤	7	④	8	③	9	④	10	①
11	②	12	①	13	25	14	②	15	④
16	②	17	16	18	②	19	②	20	④
21	10	22	①	23	7	24	③	25	15
26	①	27	③	28	10	29	④	30	③
31	①	32	⑤	33	32	34	④	35	58
36	③	37	②	38	20	39	①	40	15
41	25	42	78	43	④	44	③	45	①
46	6	47	①	48	②	49	56	50	③
51	④	52	①	53	13	54	②	55	②
56	75	57	①	58	②	59	31	60	84
61	③	62	①	63	②	64	②	65	①
66	20	67	③	68	③	69	①	70	④
71	①	72	①	73	②	74	⑤	75	④
76	⑤	77	③	78	④	79	18	80	③
81	10	82	④	83	④	84	⑤	85	②
86	⑤	87	③	88	16	89	④	90	③
91	13	92	④	93	④	94	16	95	②
96	259	97	53	98	①	99	⑤	100	⑤
101	③	102	③	103	⑤	104	①	105	④
106	①	107	①	108	③	109	⑤	110	④
111	③	112	④	113	25	114	③	115	③
116	①	117	③	118	192	119	②	120	25
121	18	122	⑤	123	128	124	③	125	①
126	17	127	13	128	⑤	129	④	130	②
131	10	132	36	133	⑤	134	⑤	135	③
136	④	137	③	138	①	139	①	140	18
141	①	142	②	143	③	144	⑤	145	15
146	②	147	④	148	③	149	16	150	20
151	④	152	12	153	③	154	⑤	155	④
156	④	157	③	158	12	159	4	160	27
161	①	162	③	163	③	164	②	165	1
166	②	167	②	168	⑤	169	80	170	③
171	16	172	①	173	②	174	⑤	175	③
176	④	177	⑤	178	81	179	②	180	63
181	14	182	②	183	⑤	184	③	185	①
186	②	187	15	188	②	189	39	190	196
191	86	192	79	193	392	194	15	195	573
196	120	197	①	198	12	199	②	200	①

A001 ㅣ답 ①

[풀이]

거듭제곱근의 성질에 의하여

$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{\sqrt{16}}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}=2$

답 ①

A002 ㅣ답 ②

[풀이]

거듭제곱근의 성질에 의하여

$A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[6]{10}$

$B=\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}$

$C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}=\sqrt[6]{28}$

세 양수 A, B, C에 대하여

$A^6<C^6<B^6$이므로

$\therefore\ A<C<B$

답 ②

A003 ㅣ답 30

[풀이]

거듭제곱근의 정의에 의하여

$a=\sqrt[6]{3}$, $b=\sqrt[5]{7}$, $c=\sqrt{11}$

거듭제곱근의 성질에 의하여

$a^n=\sqrt[6]{3^n}$, $b^n=\sqrt[5]{7^n}$, $c^n=\sqrt{11^n}$

3, 7, 11의 어느 두 수의 최대공약수는 1이므로

$(abc)^n$이 자연수가 되려면 세 수

a^n, b^n, c^n이 자연수가 되어야 한다.

따라서 n의 최솟값은 6, 5, 2의 최소공배수이다.

$\therefore\ n\geq 30$

답 30

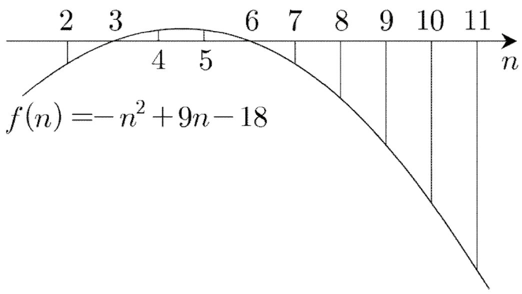
A004 ㅣ답 ①

[풀이] ★

함수

$f(n)=-n^2+9n-18(=-(n-3)(n-6))$

의 그래프는 아래 그림과 같다.



$f(n)$의 n제곱근을 표로 정리하면 다음과 같다.

	$f(n) > 0$	$f(n) = 0$	$f(n) < 0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{f(n)}$	0	$\sqrt[n]{f(n)}$ (음수)
n이 짝수	$\pm\sqrt[n]{f(n)}$	0	$\times$

위의 표에서 $f(n)$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하는 경우는 다음과 같다.

n이 홀수이고 $f(n) < 0$인 경우: $n = 7,\ 9,\ 11$

n이 짝수이고 $f(n) > 0$인 경우: $n = 4$

따라서 구하는 값은

$4 + 7 + 9 + 11 = 31$

답 ①

[참고]

$n = 4$: $f(4) = 2$이므로

$f(4)$의 4제곱근은 $\sqrt[4]{2},\ -\sqrt[4]{2}\,(<0)$이다.

$n = 7$: $f(7) = -4$이므로

$f(7)$의 7제곱근은 $\sqrt[7]{-4} = -\sqrt[7]{4}\,(<0)$이다.

A005 | 답 24

[풀이]

조건 (가)에서 주어진 방정식을 풀면

$x^n = 64$ 또는 $f(x) = 0$ $\cdots(*)$

이때, n이 홀수이면 방정식 $x^n = 64$의 해는 $x = \sqrt[n]{64}$ 뿐이므로 (*)의 해는 아래의 다섯 경우 뿐이다. 그런데 이 다섯 경우 모두 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$\sqrt[n]{64},\ \sqrt[n]{64},\ \sqrt[n]{64}$

$\sqrt[n]{64},\ \alpha,\ \beta$ (단, $\alpha \neq \beta,\ \alpha \neq \sqrt[n]{64},\ \beta \neq \sqrt[n]{64}$)

$\sqrt[n]{64},\ \sqrt[n]{64},\ \alpha$ (단, $\alpha \neq \sqrt[n]{64}$)

$\sqrt[n]{64},\ \alpha,\ \alpha$ (단, $\alpha \neq \sqrt[n]{64}$)

$\sqrt[n]{64}$, 서로 다른 두 허근

귀류법에 의하여 n은 짝수이다.

(*) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt[n]{64},\ f(x) = 0$

조건 (가)에 의하여 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 두 실근은 $\pm\sqrt[n]{64}$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = (x + \sqrt[n]{64})(x - \sqrt[n]{64})$

함수 $f(x)$는 $x = 0$일 때 최솟값을 가지므로

$f(0) = -2^{\frac{12}{n}} =$ (음의 정수) (단, n은 짝수)

$\therefore\ n = 2,\ 4,\ 6,\ 12$

따라서 구하는 값은 24이다.

답 24

A006 | 답 ⑤

[풀이]

지수법칙에 의하여

$a = 3^x \times 3^2$ 즉, $3^x = \dfrac{a}{3^2}$

지수법칙에 의하여

$27^x = (3^3)^x = (3^x)^3 = \left(\dfrac{a}{3^2}\right)^3 = \dfrac{a^3}{3^6}$

답 ⑤

A007 | 답 ④

[풀이1]

(주어진 식)$= \left\{\left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\times\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8}$

답 ④

[풀이2]

지수법칙에 의하여

$\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}^{-\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{3}}$

지수법칙에 의하여

$\left\{\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}} = \left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{9}{4}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{3}\times\frac{9}{4}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \dfrac{27}{8}$

답 ④

A008 | 답 ③

[풀이]

지수법칙에 의하여

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2a+b}=2^{-2a}\times2^{-b}=(2^a)^{-2}\times(2^b)^{-1}$

$=c^{-2}\times d^{-1}=\frac{1}{c^2d}$

답 ③

A009 | 답 ④

[풀이1]

(주어진 식)$=\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}}100^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{100}{25}\right)^{\frac{3}{2}}=2^{2\times\frac{3}{2}}=2^3=8$

답 ④

[풀이2]

지수법칙에 의하여

$25^{-\frac{3}{2}}\times100^{\frac{3}{2}}=(5^2)^{-\frac{3}{2}}\times(2^2\times5^2)^{\frac{3}{2}}$

$=2^3\times5^{-3+3}=8$

답 ④

A010 | 답 ①

[풀이]

거듭제곱근의 성질과 유리수 지수의 정의에 의하여

$\sqrt[6]{6}=\sqrt[6]{2}\ \sqrt[6]{3}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\ \sqrt{\sqrt[3]{3}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

답 ①

A011 | 답 ②

[풀이]

곱셈공식과 지수법칙에 의하여

$(2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2$

$=(2^{x+y}+2^{x-y}+2^{x+y}-2^{x-y})$

$\times(2^{x+y}+2^{x-y}-2^{x+y}+2^{x-y})$

$=2^{x+y+1}\times2^{x-y+1}$

$=2^{x+y+1+x-y+1}=2^{2x+2}$

답 ②

A012 | 답 ①

[풀이]

거듭제곱근의 정의에 의하여

$b=\sqrt[3]{\sqrt{3}}$

거듭제곱근의 성질에 의하여

$b=\sqrt[3]{\sqrt{3}}=\sqrt[6]{3}$

거듭제곱근의 성질에 의하여

$(ab)^2=a^2b^2=(\sqrt{2})^2(\sqrt[6]{3})^2=2\cdot\sqrt[3]{3}$

유리수 지수의 정의에 의하여

$(ab)^2=2\cdot3^{\frac{1}{3}}$

답 ①

A013 | 답 25

[풀이1]

지수법칙에 의하여

$3^{a^2-b^2}=3^{(a+b)(a-b)}=(3^{a+b})^{a-b}$

$=4^{a-b}=(2^{a-b})^2=5^2=25$

답 25

[풀이2] (상용로그)

로그의 정의에서

$a+b=\log_3 4,\ a-b=\log_2 5$

이 두 등식을 변변히 곱하면

$a^2-b^2=(\log_3 4)(\log_2 5)$

$=\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 2}$

($\because$ 로그의 밑의 변환의 공식)

$=\frac{2\log 2}{\log 3}\times\frac{\log 5}{\log 2}$

($\because$ 로그의 성질)

$=\frac{2\log 5}{\log 3}=\log_3 25$

($\because$ 로그의 밑의 변환의 공식)

로그의 정의에서

$\therefore\ 3^{a^2-b^2}=25$

답 25

A014 | 답 ②

[풀이1]

주어진 등식을 변형하면

$\frac{(2^a+2^{-a})\times2^a}{(2^a-2^{-a})\times2^a}=-2$

지수법칙에 의하여

$\frac{4^a+1}{4^a-1}=-2$ 풀면 $4^a=\frac{1}{3}$

$\therefore\ 4^a+4^{-a}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$

답 ②

[풀이2]

주어진 등식의 양변에 2^a-2^{-a}을 곱하면

지수법칙에 의하여

$2^a+2^{-a}=-2^{a+1}+2^{-a+1}$

양변에 양수 2^a을 곱하면

지수법칙에 의하여

$2^{2a}+1=-2\cdot 2^{2a}+2$

정리하면

$3\cdot 2^{2a}=1$ 즉, $4^a=\frac{1}{3}$

$\therefore\ 4^a+4^{-a}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$

답 ②

A015 | 답 ④

[풀이]

유리수 지수의 정의에 의하여

$\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$

- (1) $m=1$인 경우

$n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되는 n은 1, 8이다.

- (2) $m=2$인 경우

$n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되는 n은 1, 8이다.

- (3) $m=3$인 경우

$n^{\frac{m}{3}}$이 자연수가 되는 n은 1, 2, $\cdots$, 8이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 12개다.

답 ④

A016 | 답 ②

[풀이]

유리수 지수의 정의와 지수법칙에 의하여

$\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$

$2\sqrt[3]{4}=2^{\frac{5}{3}}$

$\sqrt{2\sqrt[3]{4}}=2^{\frac{5}{6}}$

$(\sqrt{2\sqrt[3]{4}})^3=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32}$

그런데 $5=\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}=6$이므로 주어진 실수보다 큰 자연수 중에서 가장 작은 것은 6이다.

답 ②

A017 | 답 16

[풀이]

어떤 자연수를 x로 두자.

거듭제곱근의 정의에 의하여

$\sqrt[n]{x}=(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$

유리수 지수의 정의에 의하여

$x^{\frac{1}{n}}=(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}$

지수법칙에 의하여

$x^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{5}{3}\times\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$

정리하면

$x^6=3^{5n}$

자연수 x의 인수는 오직 3뿐이다.

이제 $x=3^k$(k는 자연수)로 두면

$3^{6k}=3^{5n}$

방정식을 풀면

$6k=5n$

$\frac{n}{k}=\frac{6}{5}=\frac{12}{10}=\frac{18}{15}=\cdots=\frac{96}{80}$

따라서 자연수 n의 개수는 16이다.

답 16

A018 | 답 ②

[풀이]

$(2^{\sqrt{3}}\times 4)^{\sqrt{3}-2}=(2^{2+\sqrt{3}})^{\sqrt{3}-2}$

$=2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

답 ②

A019 | 답 ②

[풀이]

지수법칙과 로그의 성질에 의하여

$$3A+2B=3\log_a \frac{x^2}{y^3}+2\log_a \frac{y^2}{x^3}$$
$$=\log_a\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3+\log_a\left(\frac{y^2}{x^3}\right)^2$$
$$=\log_a\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3\left(\frac{y^2}{x^3}\right)^2$$
$$=\log_a \frac{x^6\times y^4}{y^9\times x^6}$$
$$=\log_a \frac{1}{y^5}$$
답 ②

A020 | 답 ④

[풀이]

〈증명〉

$r=\log_a x$, $s=\log_a y$로 놓으면

로그의 정의에 의하여

$a^r=x$, $a^s=\boxed{y}$

지수법칙으로부터

$a^{r+s}=\boxed{xy}$

로그의 정의에 의하여

$r+s=\log_a \boxed{xy}$

그러므로 $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$이다.

(가): y

(나): xy

답 ④

A021 | 답 10

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+\log_2 16$

$=\log_2 2+\log_2 2^2+\log_2 2^3+\log_2 2^4$

$=\log_2 2+2\log_2 2+3\log_2 2+4\log_2 2$

$=1+2+3+4=10$

답 10

A022 | 답 ①

[풀이]

지수법칙과 유리수 지수의 정의에 의하여

$$4^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{2^5}=(2^2)^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{5}{2}}=2^{2\times\frac{3}{4}+\frac{5}{2}}=16$$

로그의 정의에 의하여

$$\therefore\ \log_2(4^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{2^5})^{\frac{1}{2}}=\log_2 4=2$$

답 ①

A023 | 답 7

[풀이]

지수법칙과 로그의 성질에 의하여

$$\log_2\frac{24}{5}+\log_2\frac{80}{3}=\log_2\frac{24}{5}\times\frac{80}{3}$$

$=\log_2 2^7=7$

답 7

A024 | 답 ③

[풀이]

진수의 조건에서 $x>0$, $y>0$

로그의 성질에 의하여

$\log_{10}x^2+\log_{10}y=2$

$\log_{10}x^2y=2$

로그의 정의에서

$x^2y=10^2$

산술기하절대부등식에 의하여

$x^2+y\geq 2\sqrt{x^2y}=20$

(단, 등호는 $x=\sqrt{10}$, $y=10$일 때 성립한다.)

답 ③

A025 | 답 15

[풀이]

로그의 성질과 로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$$\log_2 x+\log_4\frac{1}{x}=\log_2 x-\frac{\log_2 x}{\log_2 4}$$

$$=\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2 x=5$$

정리하면

$\log_2 x=10$

로그의 성질과 로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$$\therefore\ \log_4 x-\log_2\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+\log_2 x=\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x$$

$$=\frac{3}{2}\log_2 x=15$$

답 15

A026 | 답 ①

[풀이]

$\log_a b=x$, $\log_c a=y$라고 하면

로그의 정의에 의하여

$a^x=b$, $c^y=a$

이때, $b=a^x=(c^y)^x=c^{\boxed{xy}}$이므로

로그의 정의에 의하여

$\boxed{xy}=\log_c b$

즉, $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$이다.

여기서 $\boxed{a\neq 1}$이므로 $\log_c a\neq 0$이다.

따라서 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$이다.

답 ①

A027 | 답 ③

[풀이]

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$\log_{\sqrt{3}} x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3\sqrt{3}}=2\log_3 x=4$이므로

$\log_3 x=2$

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$$\therefore\ \log_x y=\frac{\log_3 y}{\log_3 x}=\frac{6}{2}=3$$

답 ③

A028 | 답 10

[풀이]

유리수지수의 정의와 로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{32}\cdot\log_2\frac{1}{16}$$

$$=\frac{\log_2 2^{\frac{5}{2}}}{\log_2 2^{-1}}\cdot\log_2 2^{-4}$$

$$=-\frac{5}{2}\cdot(-4)=10$$

답 10

A029 | 답 ④

[풀이]

로그의 정의에서

$7^a=\sqrt{7-\sqrt{48}}$

양변을 제곱하면

$7^{2a}=7-\sqrt{48}$ 이므로

$$7^{-2a}=\frac{1}{7-\sqrt{48}}=7+\sqrt{48}$$

$$\therefore\ \frac{7^{2a}-7^{-2a}}{7^{2a}+7^{-2a}}=\frac{7-\sqrt{48}-(7+\sqrt{48})}{7-\sqrt{48}+7+\sqrt{48}}=-\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

답 ④

A030 | 답 ③

[풀이]

〈증명〉

$x=\log_{a^m}b^n$로 놓으면

로그의 정의에 의하여

$b^n=\boxed{(a^m)^x}=(a^x)^{\boxed{m}}$이므로 $a^x=\boxed{b^{\frac{n}{m}}}$

로그의 정의와 성질에 의하여

$x=\log_a\boxed{b^{\frac{n}{m}}}=\dfrac{n}{m}\log_a b$가 성립한다.

(가): $(a^m)^x$ (나): m (다): $b^{\frac{n}{m}}$

답 ③

A031 | 답 ①

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

로그의 성질에 의하여

$\log_2 1+\log_2 2+\log_2 3+\ \cdots\ +\log_2 10$

$=\log_2(1\times 2\times 3\times\cdots\times 10)=\log_2 10!$

로그의 정의에 의하여

$2^{\log_2 1+\log_2 2+\log_2 3+\ \cdots\ +\log_2 10}=2^{\log_2 10!}=10!$

▸ ㄴ. (거짓)

지수법칙에 의하여

$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{10}$

$= 2^{1+2+3+\cdots+10} = 2^{55}$

지수법칙과 로그의 성질에 의하여

$\log_2 (2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{10})^2$

$= \log_2 (2^{55})^2 = \log_2 2^{55\times 2}$

$= \log_2 2^{110} = 110 \neq 55^2$

▸ ㄷ. (거짓)

로그의 성질에 의하여

$\log_2 2^1 = 1,\ \log_2 2^2 = 2,\ \cdots,\ \log_2 2^{10} = 10$

이므로

$(\log_2 2^1)(\log_2 2^2)(\log_2 2^3)\cdots(\log_2 2^{10})$

$= 1\times 2\times 3\times\cdots\times 10 = 10! \neq 55$

이상에서 참인 것은 ㄱ이다.

답 ①

A032 | 답 ⑤

[풀이]

〈증명〉

자연수 n에 대하여 $\log_2 n$이 유리수라고 하자.

n이 자연수이므로 $n = 2^k \cdot m$을 만족시키는 $k \geq 0$인 정수 k와 홀수인 자연수 m이 존재한다.

그러면 로그의 성질에 의하여 $\log_2 n = \boxed{k + \log_2 m}$이다.

따라서 $\log_2 n$이 유리수이면 $\log_2 m$도 유리수이어야 하므로

$\log_2 m = \dfrac{q}{p}$(단, p는 자연수이고 q는 정수)로 놓을 수 있다.

그러면 로그의 정의에 의하여 $m = 2^{\frac{q}{p}}$이므로 $\boxed{m^p = 2^q}$이다.

m이 홀수이므로 m^p은 홀수이다.

따라서 2^q도 홀수이어야 하므로 $\boxed{q=0}$이고 $m=1$이다.

따라서 n을 $n = 2^k$(단, k는 $k \geq 0$인 정수)의 꼴로 나타낼 수 있다.

(가): $k + \log_2 m$ (나): $m^p = 2^q$ (다): $q = 0$

답 ⑤

[참고1]

아래의 표처럼 모든 자연수는 $2^k \cdot m$으로 표현할 수 있다.

(단, k는 음이 아닌 정수, m은 양의 홀수)

k \ m	1	3	5	7	9	11	$\cdots$
0	1	3	5	7	9	11	$\cdots$
1	2	6	10	14	18	22	$\cdots$
2	4	12	20	28	36	44	$\cdots$
3	8	24	40	56	72	88	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

[참고2]

(유리수)±(유리수)=(유리수)

현행 교육과정에서는 '유리수 전체의 집합은 덧셈과 뺄셈에 대하여 닫힌집합이다.' 라는 수학적 사실을 배우지 않는다. 따라서 이에 대해서는 상식선에서 생각하면 된다.

A033 | 답 32

[풀이]

$ab = 27$의 양변에 3을 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_3 ab = \log_3 27$

로그의 정의와 로그의 성질에 의하여

$\log_3 a + \log_3 b = 3$

로그의 성질에 의하여

$\log_3 \dfrac{b}{a} = \log_3 b - \log_3 a$

주어진 연립방정식은

$\begin{cases} \log_3 a + \log_3 b = 3 \\ \log_3 b - \log_3 a = 5 \end{cases}$

위의 두 식을 변변히 더하여 정리하면

$\log_3 b = 4$

이를 위의 두 식 중에서 한 식에 대입하면

$\log_3 a = -1$

$\therefore\ 4\log_3 a + 9\log_3 b = 32$

답 32

A034 | 답 ④

[풀이]

주어진 비례식에서

$\log_a c = 2\log_b c$

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\dfrac{\log c}{\log a} = \dfrac{2\log c}{\log b}$

양수 $\log c$로 양변을 나누면

$$\frac{1}{\log a}=\frac{2}{\log b}$$

정리하면

$$\frac{\log b}{\log a}=2,\ \frac{\log a}{\log b}=\frac{1}{2}$$

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$$\log_a b=2,\ \log_b a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \log_a b+\log_b a=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 ④

A036 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

거듭제곱근의 성질에 의하여

$R(16,\ 4)=\sqrt[16]{4}=\sqrt[8]{\sqrt[2]{4}}=\sqrt[8]{2}$

$R(8,\ 2)=\sqrt[8]{2}$

$\therefore\ R(16,\ 4)=R(8,\ 2)$

▸ ㄴ. (거짓)

(반례)

$R(a,\ 5)\cdot R(b,\ 5)=\sqrt[a]{5}\sqrt[b]{5}$

$R(a+b,\ 5)=\sqrt[a+b]{5}$

만약 $a=b=2$이면

$R(a,\ 5)\cdot R(b,\ 5)=5$

$R(a+b,\ 5)=\sqrt[4]{5}$

$R(a,\ 5)\cdot R(b,\ 5)\neq R(a+b,\ 5)$

따라서 2 이상인 모든 자연수 a, b에 대하여 주어진 등식이 항상 성립하는 것은 아니다.

▸ ㄷ. (참)

$R(a,\ b)=k$이면 $\sqrt[a]{b}=k$

거듭제곱근의 정의에 의하여

$b=k^a$

로그의 정의에 의하여

$a=\log_k b$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A035 | 답 58

[풀이1]

조건 (나)에서 로그의 정의에 의하여

$b-a=8$

이를 조건 (가)에 대입하면

$9\le b\le 13$ $\cdots$ ㉠

조건 (다)에서 로그의 정의에 의하여

$c-b=4$

이를 ㉠에 대입하면

$13\le c\le 17$ $\cdots$ ㉡

조건 (가), ㉠, ㉡에 의하여

$k=a+b+c$의 범위는

$23\le k\le 35$

단, 왼쪽 등호는 $a=1$, $b=9$, $c=13$일 때 성립하고 오른쪽 등호는 $a=5$, $b=13$, $c=17$일 때 성립한다.

따라서 k의 최댓값과 최솟값의 합은 58이다.

답 58

[풀이2]

조건 (나), (다)에서 로그의 정의에 의하여

$b-a=2^3=8$, $c-b=2^2=4$

정리하면

$b=a+8$, $c=b+4=a+12$

$k=3a+20$

조건 (가)에서 $1\le a\le 5$이므로

$23\le k\le 35$

따라서 k의 최댓값과 최솟값의 합은 58이다.

답 58

A037 | 답 ②

[풀이]

로그의 정의에서

$\log_3 9=2$

$\therefore\ 2^{2\log_3 9}=2^{2\times 2}=16$

답 ②

A038 | 답 20

[풀이1]

주어진 등식을 t라고 두면

$3a=t\log_a b$ $\cdots$ ㉠

$b=2t\log_b a$ $\cdots$ ㉡

$3a+b=3t$ $\cdots$ ㉢

㉠+㉡을 하면

$3a+b=t(\log_a b+2\log_b a)$ $\cdots$ ㉣

㉢과 ㉣을 연립하면

$3t=t(\log_a b+2\log_b a)$

양변을 $t(\neq 0)$로 나누면

$\log_a b+2\log_b a=3$

$\log_a b=x(>0)$로 두면

$x+\frac{2}{x}=3$

정리하면

$x^2-3x+2=0$

인수분해하면

$(x-1)(x-2)=0$

풀면

$x=1$ 또는 $x=2$

만약 $x=1$이면 $a=b$이므로 문제에서 주어진 조건에 모순이다.

따라서 $x\neq 1$이다.

$x=2$에서 $\log_a b=2$이므로

$\therefore\ 10\log_a b=20$

답 20

[풀이2] 시험장

가비의리에 의하여

$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{\log_a b+2\log_b a}$

문제에서 주어진 등식과 비교하면

$\log_a b+2\log_b a=3$

$\log_a b=x(>0)$로 두면

$x+\frac{2}{x}=3$

정리하면

$x^2-3x+2=0$

좌변을 인수분해하면

$(x-1)(x-2)=0$

풀면

$x=1$ 또는 $x=2$

만약 $x=1$이면 $a=b$이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $x\neq 1$이다.

$x=2$에서 $\log_a b=2$이므로

$\therefore\ 10\log_a b=20$

답 20

[풀이3]

문제에서 주어진 등식을

○ = ● = ◆

이라고 하면

○ = ◆: $\log_a b=\frac{9a}{3a+b}$ $\cdots$ ㉠

● = ◆: $\log_a b=\frac{6a+2b}{3b}$

위의 두 등식에서

$\frac{9a}{3a+b}=\frac{6a+2b}{3b}$, $18a^2-15ab+2b^2=0$,

$(6a-b)(3a-2b)=0$,

$b=6a(\cdots$㉡$)$ 또는 $b=\frac{3}{2}a(\cdots$㉢$)$

㉡을 ㉠에 대입하면

$\log_a 6a=\frac{9a}{3a+6a}$, $1+\log_a 6=1$,

$\log_a 6=0$ 이 등식을 만족시키는 a는 존재하지 않는다.

㉢을 ㉠에 대입하면

$\log_a \frac{3}{2}a=\frac{9a}{3a+\frac{3}{2}a}$, $1+\log_a\frac{3}{2}=2$, $\log_a\frac{3}{2}=1$,

$a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{4}$ (즉, $b=a^2$)

$\therefore\ 10\log_a b=20$

답 20

A039 | 답 ①

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$\log_2 9\cdot\log_3\sqrt{2}=\log_2 3^2\cdot\log_3 2^{\frac{1}{2}}$

$=(2\log_2 3)(\frac{1}{2}\log_3 2)$

$=\frac{\log 3}{\log 2}\frac{\log 2}{\log 3}$($\because$ 로그의 밑의 변환의 공식)

$=1$

답 ①

A040 | 답 15

[풀이]

로그의 정의에서

$2^a=2+\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$4^a=7+4\sqrt{3}$

$\therefore\ 4^a+\frac{4}{2^a}=7+4\sqrt{3}+\frac{4}{2+\sqrt{3}}$

$=7+4\sqrt{3}+4(2-\sqrt{3})=15$

답 15

A041 | 답 25

[풀이1] 시험장

$\log_2 n-\log_2 k=p$로 두자. (단, p는 정수)

로그의 성질과 정의에 의하여

$\log_2\frac{n}{k}=p$, $n=k\cdot 2^p$

n에 $1, 2, 3, \cdots, 100$을 대입하면서

순서쌍 (k, p)를 구해보자. (⇨의 오른쪽에 쓰자.)

$n=1$: $1=k\cdot 2^p$ ⇨ $(1, 0), (2, -1), \cdots$

$n=2$: $2=k\cdot 2^p$ ⇨ $(2, 0), (4, -1), \cdots$

$n=3$: $3=k\cdot 2^p$ ⇨ $(3, 0), (6, -1), \cdots$

⋮

$n=49$: $49=k\cdot 2^p$ ⇨ $(49, 0), (98, -1)$

$n=50$: $50=k\cdot 2^p$ ⇨ $(50, 0), (100, -1)$

$n=51$: $51=k\cdot 2^p$ ⇨ $(51, 0)$ (○)

$n=52$: $52=k\cdot 2^p$ ⇨ $(52, 0), (26, 1), \cdots$

$n=53$: $53=k\cdot 2^p$ ⇨ $(53, 0)$ (○)

$n=54$: $54=k\cdot 2^p$ ⇨ $(54, 0), (27, 1)$

⋮

$n=99$: $99=k\cdot 2^p$ ⇨ $(99, 0)$ (○)

$n=100$: $100=k\cdot 2^p$ ⇨ $(100, 0), (50, 1), \cdots$

$f(n)=1$이 되는 n은 50 이상의 홀수이다.

즉, $51, 53, 55, \cdots, 99$ (총 25개)

답 25

[풀이2]

주어진 집합을 A_n이라고 하자.

로그의 성질에 의하여

$\log_2 n-\log_2 k=\log_2\frac{n}{k}=p$($p$는 정수)

로그의 정의에 의하여

$\frac{n}{k}=2^p$ $\cdots(*)$

(단, $1\le k\le 100$, $1\le n\le 100$)

- (1) $1\le n\le 50$인 경우

$k=n$을 (*)에 대입하면

$1=2^p$에서 $p=0$이므로 $n\in A_n$

$k=2n(\le 100)$을 (*)에 대입하면

$2^{-1}=2^p$에서 $p=-1$이므로 $n\in A_n$

따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 2 이상이다.

- (2) n이 짝수인 경우

$k=n$을 (*)에 대입하면

$1=2^p$에서 $p=0$이므로 $n\in A_n$

$k=\frac{n}{2}$을 (*)에 대입하면

$2=2^p$에서 $p=1$이므로 $\frac{n}{2}\in A_n$

따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 2 이상이다.

- (3) n이 50보다 큰 홀수인 경우

(*)에서 $k=\frac{n}{2^p}$을 만족시키는 정수 p는 0뿐이다.

따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 1이다.

(1), (2), (3)에서 문제에서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n은 $51, 53, \cdots, 99$뿐이다.

답 25

[풀이3]

로그의 성질에 의하여

$\log_2 n-\log_2 k=\log_2\frac{n}{k}=p$

(단, p는 정수)

로그의 정의에 의하여

$n=k\times 2^p$ $\cdots$ ㉠

(단, n, k는 100 이하의 자연수)

예를 들어 $n=10$이면

$10=k\times 2^p$에서 $k=5\times 2^{1-p}$

이를 만족시키는 순서쌍 (p, k)는 각각

$(1, 5), (0, 10), (-1, 20), (-2, 40), (-3, 80)$

이므로

$f(10)=5$

예를 들어 $n=99$이면

$99=k\times 2^p$에서 $k=99\times 2^{-p}$

이를 만족시키는 순서쌍 (p, k)는 $(0, 99)$이므로

$f(99)=1$

100 이하의 자연수 k에 대하여

$k=m\times 2^q$ $\cdots$ ㉡

(단, m은 99 이하의 양의 홀수,

q는 6 이하의 음이 아닌 정수)

㉡을 ㉠에 대입하면

100 이하의 자연수 n에 대하여

$n=m\times 2^{p+q}$ $\cdots$ ㉢

(단, m은 99 이하의 양의 홀수,

p는 -6 이상이고 6 이하인 정수,

q는 6 이하의 음이 아닌 정수)

• m이 49 이하의 양의 홀수인 경우

㉢에서 n은 100 이하의 자연수이므로

$p+q$는 1을 값으로 가질 수 있다.

$p+q=1$이라고 하자.

㉡에서 k는 100 이하의 자연수이므로

$q=0(p=1)$ 또는 $q=1(p=0)$

순서쌍 $(p,\ k)$는 각각 $(1,\ m)$, $(0,\ 2m)$이므로

$f(n) \geq 2$

• m이 51 이상이고 99 이하인 홀수인 경우

㉢에서 n은 100 이하의 자연수이므로

$p+q=0$

㉡에서 k는 100 이하의 자연수이므로

$q=0$

위의 두 식을 연립하면

$p=0$

순서쌍 $(p,\ k)$는 $(0,\ m)$이므로

$f(n)=1$

이상에서 문제에서 주어진 조건을 만족시키는 n은 51 이상 99 이하인 홀수이다.

답 25

A042 |답 78

[풀이]

$\log_2(na-a^2)=k$, $\log_2(nb-b^2)=k$로 두자.

(단, k는 자연수)

로그의 정의에 의하여

$na-a^2=2^k$, $nb-b^2=2^k$

정리하면

$a^2-na+2^k=0$, $b^2-nb+2^k=0$

이므로 a, b는 이차방정식

$x^2-nx+2^k=0$

의 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$a+b=n$, $ab=2^k$

곱셈공식에 의하여

$(b-a)^2=(a+b)^2-4ab=n^2-2^{k+2}$

이므로

$b-a=\sqrt{n^2-2^{k+2}}$

문제에서 주어진 연립부등식에 대입하면

$0<\sqrt{n^2-2^{k+2}} \leq \dfrac{n}{2}$

$0<\sqrt{n^2-2^{k+2}}$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$2^{k+2}<n^2$

$\sqrt{n^2-2^{k+2}} \leq \dfrac{n}{2}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$n^2 \leq \dfrac{2^{k+4}}{3}$

n^2의 범위는

$2^{k+2}<n^2 \leq \dfrac{2^{k+4}}{3}$ …(*)

(*)에 $k=1$을 대입하면

$8<n^2 \leq \dfrac{32}{3}$ 풀면 $n=3$

(*)에 $k=2$를 대입하면

$16<n^2 \leq \dfrac{64}{3}$ 이 연립부등식은 해가 없다.

(*)에 $k=3$을 대입하면

$32<n^2 \leq \dfrac{128}{3}$ 풀면 $n=6$

(*)에 $k=4$를 대입하면

$64<n^2 \leq \dfrac{256}{3}$ 풀면 $n=9$

(*)에 $k=5$를 대입하면

$128<n^2 \leq \dfrac{512}{3}$ 풀면 $n=12$ 또는 $n=13$

(*)에 $k=6$을 대입하면

$256<n^2 \leq \dfrac{1024}{3}$ 풀면 $n=17$ 또는 $n=18$

따라서 구하는 값은

$3+6+9+12+13+17+18=78$

답 78

[참고1]

다음과 같은 방법으로 $b-a$의 방정식을 유도해도 좋다.

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$a=\dfrac{n-\sqrt{n^2-2^{k+2}}}{2}$, $b=\dfrac{n+\sqrt{n^2-2^{k+2}}}{2}$

($\because 0<b-a$에서 $a<b$)

$b-a=\sqrt{n^2-2^{k+2}}$

[참고2] 교육과정 외 (부등식의 영역)

아래와 같은 방법으로 n^2의 범위를 구해도 좋다.

$na-a^2=2^k$, $nb-b^2=2^k$

위의 두 식을 변변히 빼서 정리하면

$(a-b)(n-a-b)=0$

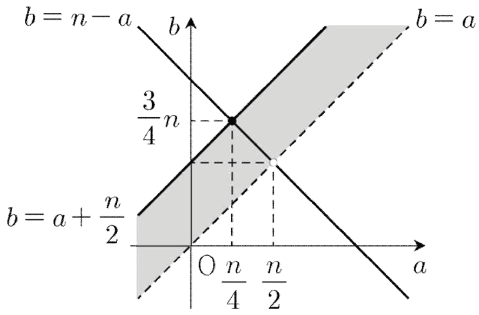
$a-b \neq 0$이므로

$a+b=n$ …㉠

문제에서 주어진 연립부등식을 다시 쓰면

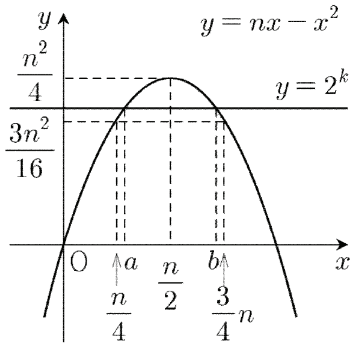
$a < b,\ b \leq a + \dfrac{n}{2}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 좌표평면에 나타내면



a, b의 범위는

$\dfrac{n}{4} \leq a < \dfrac{n}{2}$, $\dfrac{n}{2} < b \leq \dfrac{3}{4}n$



위의 그림에서 2^k의 범위는

$\dfrac{3n^2}{16} \leq 2^k < \dfrac{n^2}{4}$

이므로 n^2의 범위는

$2^{k+2} < n^2 \leq \dfrac{2^{k+4}}{3}$

[참고3] 교육과정 외 (부등식의 영역)

이차방정식

$x^2 - nx + 2^k = 0$

의 서로 다른 두 실근은 a, b이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$a + b = n$ $\cdots$ ㉠

$ab = 2^k$ $\cdots$ ㉡

문제에서 주어진 연립부등식을 다시 쓰면

$a < b,\ b \leq a + \dfrac{n}{2}$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 연립하면

$a < n - a$에서 $a < \dfrac{n}{2}$이고,

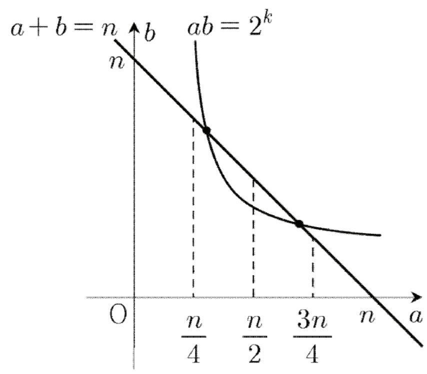
$n - a \leq a + \dfrac{n}{2}$에서 $\dfrac{n}{4} \leq a$이므로

a의 범위는 $\dfrac{n}{4} \leq a < \dfrac{n}{2}$이다.

$\dfrac{n}{4} \leq n - b < \dfrac{n}{2}$에서

b의 범위는 $\dfrac{n}{2} < b \leq \dfrac{3}{4}n$이다.

㉠, ㉡을 좌표평면에 나타내면



직선 $a + b = n$ 위의 점 $\left(\dfrac{n}{4},\ \dfrac{3n}{4}\right)$은

부등식의 영역 $ab \leq 2^k$에 속하므로

$\dfrac{n}{4} \times \dfrac{3n}{4} \leq 2^k$ 즉, $n^2 \leq \dfrac{2^{k+4}}{3}$

직선 $a + b = n$ 위의 점 $\left(\dfrac{n}{2},\ \dfrac{n}{2}\right)$은

부등식의 영역 $ab > 2^k$에 속하므로

$\dfrac{n}{2} \times \dfrac{n}{2} > 2^k$ 즉, $n^2 > 2^{k+2}$

n^2의 범위는

$2^{k+2} < n^2 \leq \dfrac{2^{k+4}}{3}$

A043 | 답 ④

[풀이]

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = \frac{\log_2 5}{\log_3 5} = \frac{\dfrac{\log_5 5}{\log_5 2}}{\dfrac{\log_5 5}{\log_5 3}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\log_5 2}}{\dfrac{1}{\log_5 3}} = \frac{\log_5 3}{\log_5 2} = \log_2 3$$

답 ④

A044 | 답 ③

[풀이1]

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\dfrac{\log_a a}{\log_a \sqrt{3}} = \dfrac{\log_a ab}{\log_a 9}$, $\dfrac{\log_a a}{\log_a 3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\log_a ab}{\log_a 3^2}$

로그의 성질에 의하여

$\dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_a 3} = \dfrac{1+\log_a b}{2\log_a 3}$ $(\because \log_a a = 1)$

양변에 $2\log_a 3(\neq 0)$을 곱하면

정리하면

$4 = 1 + \log_a b$

$\therefore\ \log_a b = 3$

답 ③

[풀이2]

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\dfrac{\log_3 a}{\log_3 \sqrt{3}} = \dfrac{\log_3 ab}{\log_3 9}$

로그의 정의에 의하여

$\log_3 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$, $\log_3 9 = 2$

이므로

$\dfrac{\log_3 a}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\log_3 ab}{2}$

양변에 2를 곱하면

$4\log_3 a = \log_3 ab$

로그의 성질에 의하여

$4\log_3 a = \log_3 a + \log_3 b$

정리하면

$3\log_3 a = \log_3 b$

양변을 $\log_3 a(\neq 0)$로 나누면

$\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a} = 3$

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\therefore\ \log_a b = 3$

답 ③

[풀이3]

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\dfrac{\log a}{\log \sqrt{3}} = \dfrac{\log ab}{\log 9}$, $\dfrac{\log a}{\log 3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\log ab}{\log 3^2}$

로그의 성질에 의하여

$\dfrac{\log a}{\frac{1}{2}\log 3} = \dfrac{\log a + \log b}{2\log 3}$

양변에 $2\log 3(\neq 0)$을 곱하면

$4\log a = \log a + \log b$

정리하면

$3\log a = \log b$

양변을 $\log a(\neq 0)$로 나누면

$\dfrac{\log b}{\log a} = 3$

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\therefore\ \log_a b = 3$

답 ③

A045 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 두 점을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{\log_2 10 - \log_2 5}{2-1} = \log_2 \dfrac{10}{5} = \log_2 2 = 1$

($\because$ 로그의 성질, 로그의 정의)

답 ①

A046 | 답 6

[풀이]

문제에서 주어진 등식의 양변을 제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}})^2 = 8^2$ 즉, $a = 64$ ($\because$ 지수법칙)

로그의 정의에 의하여

$\therefore\ \log_2 a = \log_2 64 = 6$

답 6

A047 | 답 ①

[풀이1]

$5\log_n 2$의 값이 자연수가 되기 위해서는

$\log_n 2$의 값이 양의 유리수이어야 하므로

$n = 2^k$(k는 자연수)이다.

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$5\log_n 2 = 5\log_{2^k} 2 = \dfrac{5\log_2 2}{\log_2 2^k} = \dfrac{5}{k\log_2 2} = \dfrac{5}{k}$

이므로 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 k의 값은 1, 5

뿐이다. 이때, n의 값은 각각 2, $2^5(=32)$이다.
따라서 구하는 값은
$2+32=34$

답 ①

[풀이2]
$5\log_n 2=k$로 두자. (단, k는 자연수)
로그의 성질에 의하여
$\log_n 2^5=k$
로그의 정의에 의하여
$n^k=2^5(=32^1)$
(단, n은 2 이상의 자연수, k는 자연수)
순서쌍 $(n,\ k)$는 $(2,\ 5)$, $(32,\ 1)$뿐이다.
따라서 구하는 값은 $2+32=34$이다.

답 ①

A048 | 답 ②

[풀이]
로그의 성질과 로그의 밑의 변환의 공식에 의하여
$\log_5 12=\log_5(2^2\cdot 3)=2\log_5 2+\log_5 3$
$=\dfrac{2}{\log_2 5}+\log_5 3=\dfrac{2}{a}+b$

답 ②

A049 | 답 56

[풀이]
로그의 정의와 성질에 의하여
$x+2y=8$, $xy=2$
$2y=t$로 두고 정리하면
$x+t=8$, $xt=4$
$\therefore\ x^2+4y^2=x^2+(2y)^2=x^2+t^2$
$=(x+t)^2-2xt=8^2-2\times 4=56$

답 56

A050 | 답 ③

[풀이]
세 점
$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ \log_4 a)$, $\mathrm{B}(3,\ \log_2 b)$
가 한 직선 위에 있으므로
(직선 OA의 기울기)=(직선 AB의 기울기)
즉, $\dfrac{\log_4 a}{2}=\dfrac{\log_2 b-\log_4 a}{3-2}$
정리하면
$\log_4 a=2\log_2 b-2\log_4 a$,
$3\log_4 a=2\log_2 b$, $\dfrac{3}{2}\log_2 a=2\log_2 b$
$(\because \log_4 a=\dfrac{\log_2 a}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 a}{2})$
$\therefore\ \log_a b=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

답 ③

A051 | 답 ④

[풀이]
로그의 성질에 의하여
$a_n=\dfrac{1}{2}\log_2\left(2\times\dfrac{n+1}{n+2}\right)$
로그의 성질에 의하여
$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_m$
$=\dfrac{1}{2}\log_2\left(2\times\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\log_2\left(2\times\dfrac{3}{4}\right)+\cdots$
$+\dfrac{1}{2}\log_2\left(2\times\dfrac{m+1}{m+2}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\log_2\left(2^m\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{m}{m+1}\times\dfrac{m+1}{m+2}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2^{m+1}}{m+2}=k$ (단, k는 100 이하의 자연수)
로그의 정의에 의하여
$\dfrac{2^{m+1}}{m+2}=2^{2k}$, 즉 $2^{m+1-2k}=m+2$ $\cdots(*)$
$(*)$의 좌변이 짝수이므로 우변도 짝수이다. 즉, m은 짝수이다.
$(*)$의 좌변의 $\underbrace{m+1}_{\text{홀수}}-\underbrace{2k}_{\text{짝수}}$는 홀수이다.
$m+2$가 가질 수 있는 값은 2^3, 2^5, 2^7, $\cdots$이다.
이제 다음과 같은 표를 얻는다.

$m+2$	m	k
2^3	6	2
2^5	30	13
2^7	126	60
2^9	510	251 (>100)
⋮	⋮	⋮

따라서 구하는 값은

$6+30+126=162$

답 ④

[풀이2]

로그의 성질에 의하여

$$a_n=\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{n+1}{n+2}\right)$$

로그의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_m$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{3}{4}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\log_2\left(2\times\frac{m+1}{m+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(2^m\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{m}{m+1}\times\frac{m+1}{m+2}\right)$$

$$=\frac{\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}}{2}$$

$$=\frac{\boxed{m+1-\log_2(m+2)}}{2}\qquad\cdots(*)$$

$=(100$ 이하의 자연수)

위의 분수의 분자는 200 이하의 짝수이다.

그런데 $m+1$이 자연수이므로 $\log_2(m+2)$는 정수이다.

이제 $\log_2(m+2)=p$(단, p는 정수)로 두자.

$m=2^p-2$를 (*)에 대입하면

$$(*)=\frac{2^p-1-p}{2}$$

(*)의 분자는 양의 짝수여야 하므로

p는 3 이상의 홀수이다.

$p=3$: $(*)=2$, $m=6$

$p=5$: $(*)=13$, $m=30$

$p=7$: $(*)=60$, $m=126$

$p=9$: $(*)=251(>100)$

따라서 구하는 값은

$6+30+126=162$

답 ④

A052 | 답 ①

[풀이1]

$\log_a b=\dfrac{\log_b c}{2}=\dfrac{\log_c a}{4}=k$로 두자.

$\log_a b=k$, $\log_b c=2k$, $\log_c a=4k$

위의 세 등식을 변변히 모두 곱하면

$(\log_a b)(\log_b c)(\log_c a)$

$$=\frac{\log b}{\log a}\times\frac{\log c}{\log b}\times\frac{\log a}{\log c}$$

($\because$ 로그의 밑 변환공식)

$=8k^3$, 즉 $1=8k^3$ $\therefore$ $k=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $\log_a b+\log_b c+\log_c a$

$$=\frac{1}{2}+1+2=\frac{7}{2}$$

답 ①

[풀이2]

$\log_a b=p$, $\log_b c=q$로 두면

로그의 밑 변환공식에 의하여

$(\log_a b)(\log_b c)=\log_a c$, 즉 $pq=\log_a c$

이므로 $\log_c a=\dfrac{1}{pq}$

다음의 필요충분조건이 성립한다.

$$p=\frac{q}{2}=\frac{1}{4pq}$$

$\Leftrightarrow$

$$p=\frac{q}{2},\ \frac{q}{2}=\frac{1}{4pq}$$

연립하면

$$\frac{2p}{2}=\frac{1}{4p(2p)},\ p^3=\frac{1}{8},\ p=\frac{1}{2},\ q=1$$

$\therefore$ $\log_a b+\log_b c+\log_c a$

$$=\frac{1}{2}+1+2=\frac{7}{2}$$

답 ①

A053 | 답 13

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$$\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$$

$$=\log_4 2+\log_4 n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$$

$$=\frac{1}{2}+\log_2 n-\frac{1}{4}\log_2 n$$

$$=\frac{2+3\log_2 n}{4}\qquad\cdots(*)$$

$\log_2 n$이 $2, 6, 10, \cdots, 4k-2, \cdots, 50$이면 (*)은 자연수이다.

(단, k는 13 이하의 자연수이다.)
($\because$ $\log_2 n$의 자리에 0, 1, 2, 3, $\cdots$을 대입하여 (*)가 자연수가 되는 값만을 찾은 것이다. 그리고 $\dfrac{2+3\log_2 n}{4} \le 40$, $\log_2 n \le 52.\dot{6}$에서 $\log_2 n$의 최댓값은 50임을 알 수 있다.)
따라서 자연수 n의 개수는 13이다.
답 13

[참고1]
다음과 같이 n의 값을 구할 수도 있다.
(*)$=p$로 두면 $n=2^{\frac{4p-2}{3}}$ (단, $1 \le p \le 40$)
n이 자연수이므로 $\dfrac{4p-2}{3}$는 음이 아닌 정수이다.
$p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ 을 대입해보면
$\dfrac{4p-2}{3}=\dfrac{2}{3}(\times),\ 2(\bigcirc),\ \dfrac{10}{3}(\times),\ \dfrac{14}{3}(\times),\ 6(\bigcirc),\ \cdots$
따라서 p의 값은 2, 5, 8, 11, $\cdots$, 38 임을 알 수 있다.
(총 13개)

[참고2]
다음과 같이 n의 값을 구할 수도 있다.
$\log_4 2n^2 - \dfrac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$
$=\log_4 (2n^{\frac{3}{2}})=k$
(단, k는 40 이하의 자연수이다.)
$2n^{\frac{3}{2}}=4^k$
정리하면
$n=4^{\frac{2k-1}{3}}$ 에서 $\dfrac{2k-1}{3}$은 자연수가 되어야 하므로
$k=2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 38$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 13이다.

A054 | 답 ②

[풀이]
우선 두 직선의 방정식을 쓰자.
$$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a,$$
$$y=\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)+\log_4 a$$
두 방정식에 $x=0$을 대입하면
$$y=\frac{-a\log_2 b+b\log_2 a}{b-a}=\frac{\log_2 \frac{a^b}{b^a}}{b-a},$$
$$y=\frac{-a\log_4 b+b\log_4 a}{b-a}=\frac{\log_4 \frac{a^b}{b^a}}{b-a}=\frac{\frac{1}{2}\log_2 \frac{a^b}{b^a}}{b-a}$$
이 두 수가 서로 같으므로
$$\frac{\log_2 \frac{a^b}{b^a}}{b-a}=\frac{\frac{1}{2}\log_2 \frac{a^b}{b^a}}{b-a} \Leftrightarrow \left(\frac{a^b}{b^a}\right)^2=\frac{a^b}{b^a}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^b}{b^a}=1 \Leftrightarrow a^b=b^a$$
$f(1)=a^b+b^a=40,\ a^b=b^a=20$
$\therefore\ f(2)=a^{2b}+b^{2a}=(a^b)^2+(b^a)^2=20^2+20^2=800$
답 ②

A055 | 답 ②

[풀이]
로그의 밑의 변환의 공식에 의하여
$a\log b=(\log_2 10)(\log 2\sqrt{2})$
$=\dfrac{\log 10}{\log 2}\times\log 2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{\log 2}\times\dfrac{3}{2}\log 2=\dfrac{3}{2}$
답 ②

A056 | 답 75

[풀이1]
조건 (나)에서 주어진 등식을 정리하자.
로그의 성질에 의하여
$\log c=\log\dfrac{2a\times b}{2a+b} \Leftrightarrow c=\dfrac{2a\times b}{2a+b}$
($\because \log p=\log q \Leftrightarrow \log p-\log q=0$
$\Leftrightarrow \log\dfrac{p}{q}=0 \Leftrightarrow \dfrac{p}{q}=10^0=1 \Leftrightarrow p=q$)
양변 역수를 취하면
$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{b} \qquad \cdots(*)$$
(가)에서
$3^a=5^b=k^c=t$
로 두면
$\sqrt{3}=t^{\frac{1}{2a}},\ 5=t^{\frac{1}{b}},\ k=t^{\frac{1}{c}}$
(*) $\Leftrightarrow t^{\frac{1}{c}}=t^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}} \Leftrightarrow k=5\sqrt{3}$
$\therefore\ k^2=75$
답 75

[풀이2]

조건 (가)에서

$3^a = 5^b = k^c = t$

로 두면, 로그의 정의에 의하여

$a = \log_3 t$, $b = \log_5 t$, $c = \log_k t$

이를 조건 (나)에서 주어진 등식에 대입하면

$$\log c = \log \frac{2ab}{2a+b}$$

$$\Leftrightarrow \log c = \log \frac{1}{\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}}$$

$$\Leftrightarrow \log(\log_k t) = \log \frac{1}{\frac{1}{2\log_3 t}+\frac{1}{\log_5 t}}$$

$$\Leftrightarrow \log_k t = \frac{1}{\frac{1}{2\log_3 t}+\frac{1}{\log_5 t}}$$

$(\because \log p = \log q \Leftrightarrow \log p - \log q = 0$

$\Leftrightarrow \log \frac{p}{q} = 0 \Leftrightarrow \frac{p}{q} = 1^0 = 1 \Leftrightarrow p = q)$

$$\Leftrightarrow \log_k t = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_t 3 + \log_t 5} = \frac{1}{\log_t 5\sqrt{3}}$$

$\Leftrightarrow (\log_k t)(\log_t 5\sqrt{3}) = 1$

$\Leftrightarrow \log_k 5\sqrt{3} = 1$

$(\because (\log_p q)(\log_q r) = (\log_p q)\frac{\log_p r}{\log_p q} = \log_p r)$

$\Leftrightarrow k = 5\sqrt{3}$

$\therefore\ k^2 = 75$

답 75

A057 | 답 ①

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$$\log\sqrt{a} = \log a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log a$$

이므로

$$\frac{7}{12} < \frac{1}{3} + \log\sqrt{a} < \frac{37}{12}$$

$\frac{1}{3} + \log\sqrt{a}$가 가질 수 있는 자연수는 1, 2, 3 뿐이다. 세 자연수 1, 2, 3에 대응되는 a의 값을 각각 p, q, r이라고 하면

$\frac{1}{3} + \log\sqrt{p} = 1$, $\frac{1}{3} + \log\sqrt{q} = 2$,

$\frac{1}{3} + \log\sqrt{r} = 3$

세 등식을 변변히 합하면

$1 + \log\sqrt{pqr} = 6$, $\log pqr = 10$

$\therefore\ pqr = 10^{10}$

답 ①

A058 | 답 ②

[풀이]

$c(0) = 0.83$, $t = 1$, $c(1) = 0.43$을

주어진 등식에 대입하면

$$Q = k \times \frac{V}{1}\log\frac{0.83-0.03}{0.43-0.03}$$

정리하면

$Q = k \times V\log 2$

즉, $k = \dfrac{Q}{V\log 2}$ $\cdots(*)$

$c(0) = 0.83$, $t = s$, $c(s) = 0.08$을

주어진 등식에 대입하면

$$Q = k \times \frac{V}{s}\log\frac{0.83-0.03}{0.08-0.03}$$

(*)을 대입하여 정리하면

$$Q = \frac{Q}{V\log 2} \times \frac{V}{s}\log 16$$

로그의 성질에 의하여

$$s = \frac{\log 16}{\log 2} = \frac{4\log 2}{\log 2} = 4$$

따라서 환기를 시작한 후 4시간 뒤에 이산화탄소의 농도가 0.08%가 된다.

답 ②

A059 | 답 31

[풀이]

$x = R^{\frac{27}{23}}$, $v = \frac{1}{2}v_c$를 주어진 등식에 대입하면

$$\frac{v_c}{\frac{1}{2}v_c} = 1 - k\log\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R}$$

지수법칙과 로그의 성질에 의하여

$$2 = 1 - \frac{4}{23}k\log R$$

정리하면

$k\log R = -\dfrac{23}{4}$ $\cdots (*)$

$x = R^a$, $v = \dfrac{1}{3}v_c$를 주어진 등식에 대입하면

$$\frac{v_c}{\frac{1}{3}v_c} = 1 - k\log\frac{R^a}{R}$$

지수법칙과 로그의 성질에 의하여

$3 = 1 - (a-1)k\log R$

(*)을 대입하여 a의 값을 구하면

$$\therefore\ a = 1 - \frac{2}{k\log R} = 1 - \frac{2}{-\frac{23}{4}} = \frac{31}{23}$$

답 31

A060 |답 84

[풀이]

열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력을 v라고 하면

열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력은 $0.9v$이다.

주어진 조건에서 $d = 75$이므로

$$L_B = 80 + 28\log\frac{v}{100} - 14\log\frac{75}{25}$$

$$L_A = 80 + 28\log\frac{0.9v}{100} - 14\log\frac{75}{25}$$

두 식을 변변히 빼면

$$L_B - L_A = 28\left(\log\frac{v}{100} - \log\frac{0.9v}{100}\right)$$

로그의 성질에 의하여

$$L_B - L_A = 28\log\frac{10}{9} = 28(1 - 2\log 3)$$

$= 28 - 56\log 3$

$\therefore\ a - b = 28 - (-56) = 84$

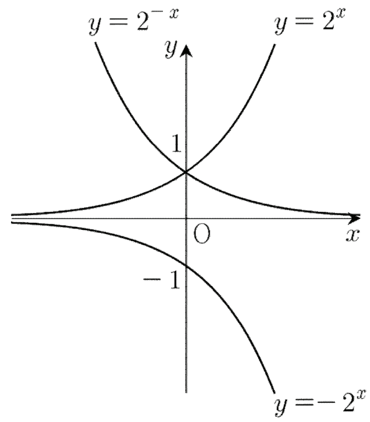
답 84

A061 |답 ③

[풀이]

▶ ㄱ. (거짓)

함수 $y = 2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시키면 함수 $y = -2^x$의 그래프와 일치한다.

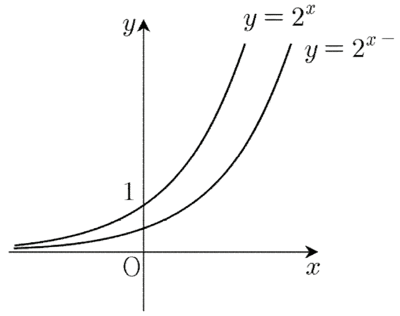


그런데 모든 실수 x에 대하여 $-2^x \neq \dfrac{1}{2^x}$이므로

두 함수 $y = -2^x$, $y = \dfrac{1}{2^x}$는 같지 않다.

▶ ㄴ. (참)

함수 $y = 2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 함수 $y = 2^{x-1}$의 그래프와 일치한다.



$2^x - 2^{x-1} = 2^{x-1} > 0$이므로

함수 $y = 2^{x-1}$의 그래프는 $y = 2^x$의 그래프의 아래에 놓이게 된다.

▶ ㄷ. (참)

지수법칙에 의하여

$$\sqrt{2}\cdot 2^x = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^x = 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

이므로, 함수 $y = \sqrt{2}\cdot 2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼 평행이동시키면 함수 $y = 2^x$의 그래프와 일치한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

A062 |답 ①

[풀이1]

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라고 하자.

점 P는 곡선 $y = 4^x$과 직선 $y = 7$의 교점이므로

$4^\alpha = 7$

로그의 정의에서

$\alpha = \log_4 7$

점 Q는 곡선 $y = 2^x$과 직선 $y = 7$의 교점이므로

$2^\beta = 7$

로그의 정의에서

$\beta = \log_2 7$

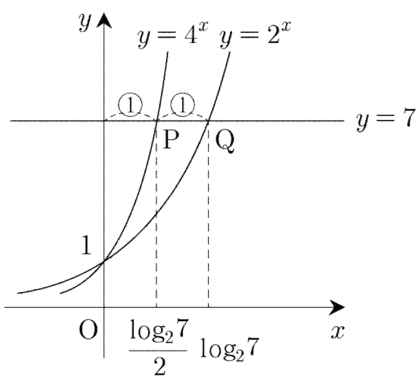
로그의 성질과 로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \beta - \alpha = \log_2 7 - \dfrac{\log_2 7}{\log_2 4}$

$= \log_2 7 - \dfrac{1}{2}\log_2 7 = \dfrac{1}{2}\log_2 7$

답 ①

[풀이2] 시험장



두 지수함수의 밑에 대하여

$4 = 2^{\boxed{2}}$

이므로

(점 Q의 x좌표)$=\boxed{2}$(점 P의 x좌표)

즉, $\log_2 7 = 2 \times \dfrac{1}{2}\log_2 7$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \dfrac{1}{2}\log_2 7$

답 ①

A063 | 답 ②

[풀이1]

문제에서 주어진 두 번째 지수함수를 정리하면

$y = 5^{2(x+1)} + 2$, 즉 $y - 2 = 5^{2(x-(-1))}$ $\cdots(*)$

함수 $y = 5^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 (*)의 그래프와 일치한다.

$m = -1$, $n = 2$

$\therefore\ m + n = 1$

답 ②

[풀이2]

함수 $y = 5^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동시키면 함수

$y = 5^{2(x-m)}$

의 그래프와 일치한다.

이 함수의 그래프를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수

$y = 5^{2(x-m)} + n$

의 그래프와 일치한다.

문제에서 주어진 조건에 의하여 두 함수

$y = 5^{2x-2m} + n$, $y = 5^{2x+2} + 2$

가 일치해야 하므로

$-2m = 2$, $n = 2$ 풀면 $m = -1$, $n = 2$

$\therefore\ m + n = 1$

답 ②

[참고]

항등식의 관점에서도 m, n의 값을 구할 수 있다.

주어진 조건에서 아래의 항등식을 얻는다.

$5^{2x-2m} + n = 25 \cdot 5^{2x} + 2$

지수법칙에 의하여

$5^{2x-2m} + n = 5^{2x+2} + 2$ $\cdots(*)$

(*)은 x에 대한 항등식이므로

$x = -1$을 (*)에 대입하면

$5^{-2-2m} + n = 3$ $\cdots$㉠

$x = m$을 (*)에 대입하면

$1 + n = 5^{2m+2} + 2$ $\cdots$㉡

$5^{2m+2} = t$로 두고 ㉠, ㉡을 연립하면

$\dfrac{1}{t} + t + 1 = 3$ 즉, $t^2 - 2t + 1 = 0$

좌변을 인수분해하면 $(t-1)^2 = 0$ 풀면 $t = 1$

$5^{2m+2} = 1$ 풀면 $m = -1$

이를 ㉠에 대입하면 $n = 2$이다.

A064 | 답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$(a,\ b) \in G$에서 $b = 5^a$

유리수 지수의 정의에 의하여

$\sqrt{b} = 5^{\frac{a}{2}}$이므로 $\left(\dfrac{a}{2},\ \sqrt{b}\right) \in G$

▸ ㄴ. (참)

$(-a,\ b) \in G$에서 $b = 5^{-a}$

양변을 역수를 취하면

$\frac{1}{b}=5^{a}$이므로 $\left(a,\ \frac{1}{b}\right)\in G$

▸ ㄷ. (거짓)

$(2a,\ b)\in G$에서 $b=5^{2a}$

양변을 제곱하면

$b^2=5^{4a}$이므로 $(4a,\ b^2)\in G$

지수함수 $y=5^x$은 일대일대응이므로

$(a,\ b^2)\notin G$

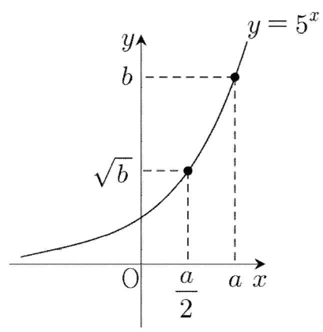
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

[참고1]

등차등비수열의 관점에서 문제를 재해석할 수 있다.

▸ ㄱ. (참)

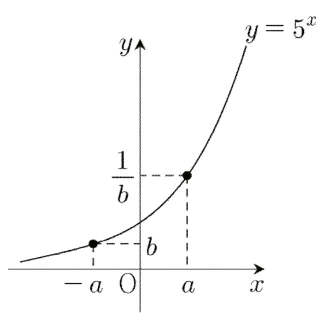


세 점 $(0,\ 1)$, $\left(\frac{a}{2},\ \sqrt{b}\right)$, $(a,\ b)$에 대하여

세 수 $0,\ \frac{a}{2},\ a$는 이 순서대로 등차수열을 이루고,

세 수 $1,\ \sqrt{b},\ b$는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

▸ ㄴ. (참)

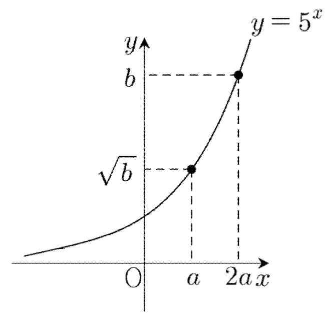


세 점 $(-a,\ b)$, $(0,\ 1)$, $\left(a,\ \frac{1}{b}\right)$에 대하여

세 수 $-a,\ 0,\ a$는 이 순서대로 등차수열을 이루고,

세 수 $b,\ 1,\ \frac{1}{b}$은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

▸ ㄷ. (거짓)



세 점 $(0,\ 1)$, $(a,\ \sqrt{b})$, $(2a,\ b)$에 대하여

세 수 $0,\ a,\ 2a$는 이 순서대로 등차수열을 이루고,

세 수 $1,\ \sqrt{b},\ b$는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이때, 곡선 $y=5^x$은 점 $(a,\ b^2)$이 아닌 점 $(a,\ \sqrt{b})$를 지나게 된다.

왜냐하면 함수 $y=5^x$은 일대일대응이기 때문이다.

[참고2]

보기 ㄷ이 거짓임을 다음과 같이 보일 수도 있다.

▸ ㄷ. (거짓)

보기 ㄱ이 참이므로 a의 자리에 $2a$를 대입하자.

$(2a,\ b)\in G$이면 $(a,\ \sqrt{b})\in G$이다.

그런데 $\sqrt{b}\neq b^2$이므로 보기 ㄷ은 거짓이다.

A065 | 답 ①

[풀이]

밑이 1보다 큰 지수함수 $f(x)=4^x$은 증가함수이므로

$f(-1)\leq f(x)\leq f(3)$

$M=f(3)=4^3$

밑이 1보다 작은 지수함수 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 감소함수이므로

$g(3)\leq g(x)\leq g(-1)$

$m=g(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3$

지수법칙에 의하여

$\therefore\ Mm=4^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=2^3=8$

답 ①

A066 | 답 20

[풀이1]

주어진 조건에서

점 P의 x좌표를 t라고 하면 점 Q의 x좌표는 $2t$이다.

두 곡선 $y=3^{-x}$과 $y=k3^x$의 교점이 점 P이므로

$3^{-t}=k3^t$ $\cdots ㉠$

두 곡선 $y=k3^x$과 $y=-4\cdot3^x+8$의 교점이 점 Q이므로

$k3^{2t}=-4\cdot3^{2t}+8$ $\cdots ㉡$

㉠에서 $3^{2t}=\dfrac{1}{k}$

이를 ㉡에 대입하면

$1=-\dfrac{4}{k}+8$

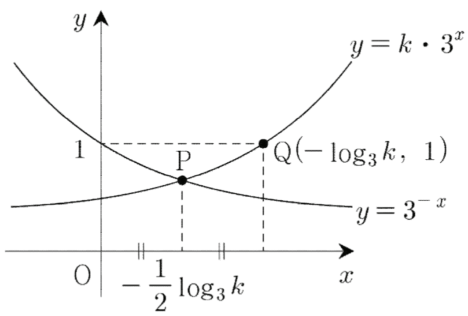
방정식을 풀면

$k=\dfrac{4}{7}$

$\therefore\ 35k=20$

답 20

[풀이2] 시험장



$k\cdot3^x=3^{\log_3 k}\cdot3^x=3^{x-(-\log_3 k)}$

이므로 곡선 $y=3^{-x}$를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후에 x축의 방향으로 $-\log_3 k$만큼 평행이동시키면 곡선 $y=k\cdot3^x$과 일치한다.

두 곡선은 직선

$x=-\dfrac{1}{2}\log_3 k$(=(점 P의 x좌표))

에 대하여 대칭이므로 두 점 $(0,\ 1)$, Q는 이 직선에 대하여 대칭이다.

따라서 점 Q의 좌표는

$Q(-\log_3 k,\ 1)$

점 Q가 곡선 $y=-4\cdot3^x+8$ 위에 있으므로

$1=-4\cdot3^{-\log_3 k}+8,\ 3^{\log_3 \frac{1}{k}}=\dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{k}=\dfrac{7}{4}$

$k=\dfrac{4}{7}$이므로

$\therefore\ 35k=20$

답 20

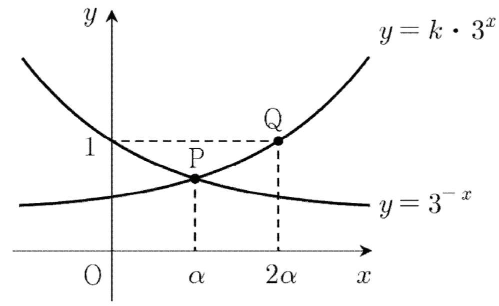
[풀이3] 시험장

로그의 정의와 성질에 의하여

$k\cdot3^x=3^{\log_3 k}\cdot3^x=3^{x+\log_3 k}$

이므로 함수 $y=3^{-x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후 x축의 방향으로 $-\log_3 k$만큼 평행이동시키면

함수 $y=k\cdot3^x$의 그래프와 일치한다.



두 곡선 $y=3^{-x}$와 $y=k\cdot3^x$은 직선 $x=\alpha$에 서로 대칭이므로 점 Q의 y좌표는 1이다.

곡선 $y=k\cdot3^x$가 점 $Q(2\alpha,\ 1)$을 지나므로

$1=k\cdot3^{2\alpha}$ $\cdots ㉠$

곡선 $y=-4\cdot3^x+8$가 점 $Q(2\alpha,\ 1)$을 지나므로

$1=-4\cdot3^{2\alpha}+8$ $\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하면

$k=\dfrac{4}{7}$

$\therefore\ 35k=20$

답 20

A067 | 답 ③

[풀이]

나눗셈 정리에 의하여

$10^a=3n+2$(n은 정수) $\cdots(*)$

주어진 조건에서

$1=10^0<10^a<10^1$이므로 $1<3n+2<10$

연립일차부등식을 풀면

$-\dfrac{1}{3}<n<\dfrac{8}{3}$

n이 정수이므로

$n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

이를 (*)에 대입하면

$10^a=2$ 또는 $10^a=5$ 또는 $10^a=8$

로그의 정의에 의하여

$a=\log2$ 또는 $a=\log5$ 또는 $a=\log8$

로그의 성질에 의하여

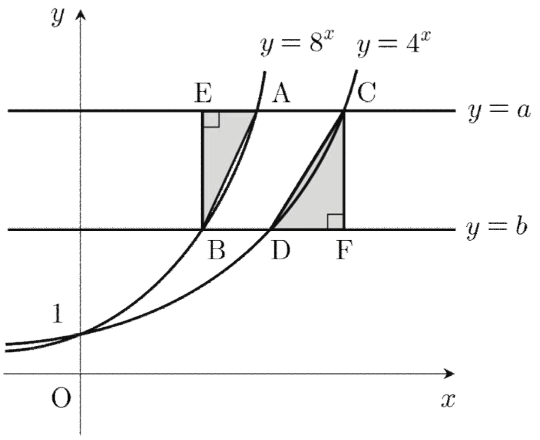
$\log2+\log5+\log8$

$=\log(2\times5)+\log2^3=1+3\log2$

답 ③

A068 | 답 ③

[풀이1]



함수 $y=8^x$의 방정식과 직선 $y=a$의 방정식을 연립하면

$8^x=a$

로그의 정의에 의하여

$x=\log_8 a$

점 A의 좌표는

$A(\log_8 a,\ a)$

마찬가지의 방법으로 점 B의 좌표를 구하면

$B(\log_8 b,\ b)$

함수 $y=4^x$의 방정식과 직선 $y=a$의 방정식을 연립하면

$4^x=a$

로그의 정의에 의하여

$x=\log_4 a$

점 C의 좌표는

$C(\log_4 a,\ a)$

마찬가지의 방법으로 점 D의 좌표를 구하면

$D(\log_4 b,\ b)$

두 점 E, F의 좌표는 각각

$E(\log_8 b,\ a)$, $F(\log_4 a,\ b)$

로그의 성질에 의하여

$\overline{AE}=$(점 A의 x좌표)$-$(점 E의 x좌표)

$=\log_8 a-\log_8 b=\log_8\dfrac{a}{b}$

$\overline{DF}=$(점 F의 x좌표)$-$(점 D의 x좌표)

$=\log_4 a-\log_4 b=\log_4\dfrac{a}{b}$

두 삼각형 AEB, CDF의 넓이를 각각 S, T라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{EB}$, $T=\dfrac{1}{2}\times\overline{DF}\times\overline{FC}$

그런데 두 선분 EB, FC의 길이가 같으므로

$$\therefore\ T=S\times\frac{\overline{DF}}{\overline{AE}}=20\times\frac{\log_4\frac{a}{b}}{\log_8\frac{a}{b}}=20\times\frac{\dfrac{\log_2\frac{a}{b}}{\log_2 4}}{\dfrac{\log_2\frac{a}{b}}{\log_2 8}}$$

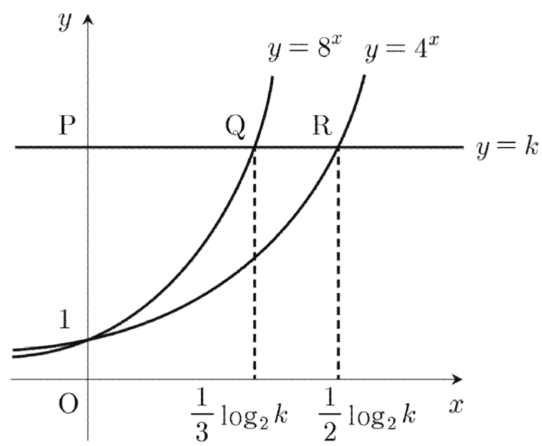
($\because$ 로그의 밑의 변환 공식)

$$=20\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=20\times\frac{3}{2}=30$$

답 ③

[풀이2] 시험장 ★

직선 $y=k$가 두 곡선 $y=8^x$, $y=4^x$과 만나는 점을 각각 Q, R, 직선 $y=k$가 y축과 만나는 점을 P라고 하자. (단, $k>1$)



함수 $y=8^x$의 방정식과 직선 $y=k$의 방정식을 연립하면

$8^x=k$

로그의 정의에 의하여

$x=\log_8 k$

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$x=\dfrac{\log_2 k}{\log_2 8}=\dfrac{1}{3}\log_2 k$

점 Q의 좌표는 $Q\left(\dfrac{1}{3}\log_2 k,\ k\right)$

마찬가지의 방법으로 점 R의 좌표는 $R\left(\dfrac{1}{2}\log_2 k,\ k\right)$

$\overline{PQ}=$(점 Q의 x좌표)$=\dfrac{1}{3}\log_2 k$

$\overline{PR}=$(점 R의 x좌표)$=\dfrac{1}{2}\log_2 k$

$k(>1)$의 값에 관계없이

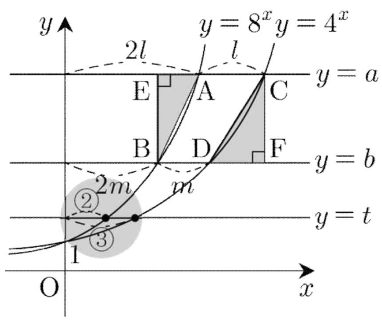
$\overline{PQ}:\overline{PR}=2:3$

이므로

$\overline{AE}=$(점 A의 x좌표)$-$(점 B의 x좌표)

$\overline{\mathrm{DF}}=$(점 C의 x좌표)$-$(점 D의 x좌표)
에서
$\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{DF}}=2:3$
(←좀 더 자세히 설명하면 다음과 같다.
(점 A의 x좌표)$=\frac{2}{3}\times$(점 C의 x좌표)
(점 B의 x좌표)$=\frac{2}{3}\times$(점 D의 x좌표)
이므로 위의 두 등식을 변변히 빼면 $\overline{\mathrm{AE}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{DF}}$이다.)
두 삼각형 AEB, CDF의 넓이를 각각 S, T라고 하면
$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{EB}}$, $T=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DF}}\times\overline{\mathrm{FC}}$
그런데 두 선분 EB, FC의 길이가 같으므로
$\therefore\ T=S\times\frac{\overline{\mathrm{DF}}}{\overline{\mathrm{AE}}}=20\times\frac{3}{2}=30$
답 ③

[풀이3] 시험장



두 지수함수의 밑에 대하여
$4=2^{\boxed{2}}$, $8=2^{\boxed{3}}$
이므로 위의 그림처럼 $2:3$ 비율관계가 성립한다.
($\triangle$AEB의 넓이):($\triangle$CDF의 넓이)
$=\overline{\mathrm{EA}}:\overline{\mathrm{DF}}=2(l-m):3(l-m)=2:3$
$\therefore$ ($\triangle$CDF의 넓이)$=30$
답 ③

A069 | 답 ①

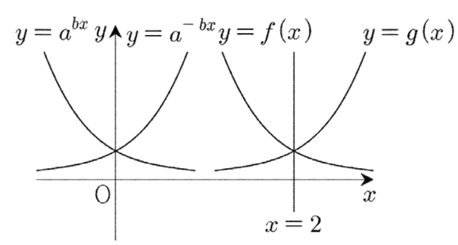
[풀이]
도형의 이동에 의하여 함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=2^{x-m}+n$
점의 이동에 의하여
(점 A′의 x좌표)=(점 A의 x좌표)$+m$
대입하면 $3=1+m$ 풀면 $m=2$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=2^{x-2}+n$
함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1=2^{0-2}+n$ 풀면 $n=\frac{3}{4}$
$\therefore\ m+n=\frac{11}{4}$
답 ①

A070 | 답 ④

[풀이]
직선 $y=f(x)$의 기울기가 1이고, y절편이 1이므로
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x+1$
대입하면
$y=2^{2-f(x)}=2^{1-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$
함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 함수 $y=2^{2-f(x)}$의 그래프와 일치한다.
답 ④

A071 | 답 ①

[풀이]
함수 $f(x)=a^{b\left(x-\frac{1}{b}\right)}$의 그래프는 함수 $y=a^{bx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{b}$만큼 평행이동시킨 것이다.
함수 $g(x)=a^{-b\left(x-\frac{1}{b}\right)}$의 그래프는 함수 $y=a^{-bx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{b}$만큼 평행이동시킨 것이다.
두 함수 $y=a^{bx}$, $y=a^{-bx}$의 그래프는 y축$(x=0)$에 대하여 대칭이므로, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 $x=\frac{1}{b}$에 대하여 대칭이다.



조건(가)에서 $\frac{1}{b}=2$ 즉, $b=\frac{1}{2}$
조건(나)에서 $f(4)+g(4)=a+a^{-1}=\frac{5}{2}$

정리하면

$2a^2-5a+2=0$

좌변을 인수분해하면

$(2a-1)(a-2)=0$

$0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=1$

답 ①

[참고]

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 조건 (나)에서

$f(0)+g(0)=\frac{5}{2}$, 즉 $a^{-1}+a=\frac{5}{2}$

으로 두어도 좋다.

A072 | 답 ①

[풀이1]

함수 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시키면 함수 $y=a^{-x}$의 그래프와 일치한다.

함수 $y=a^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 함수 $y=a^{3-x}+2$의 그래프와 일치한다.

곡선 $y=a^{3-x}+2$가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$a^2+2=4$, $(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})=0$

a가 양수이므로

$\therefore\ a=\sqrt{2}$

답 ①

[풀이2]

점 $(1,\ 4)$을 y축의 방향으로 -2만큼, x축의 방향으로 -3만큼 평행이동시키면 점 $(-2,\ 2)$와 일치한다. 점 $(-2,\ 2)$를 y축에 대하여 대칭이동시키면 점 $(2,\ 2)$와 일치한다.

주어진 조건에서 점 $(2,\ 2)$는 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$2=a^2$, $(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})=0$

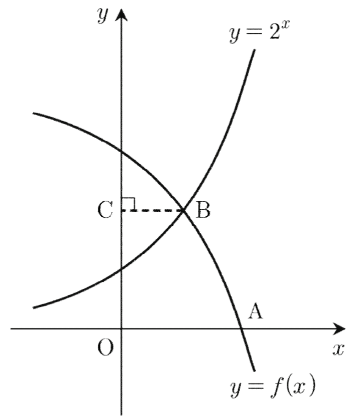
a가 양수이므로

$\therefore\ a=\sqrt{2}$

답 ①

A073 | 답 ②

[풀이1]



함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-2^x+m$

$f(x)=0$으로 두고 정리하면

$2^x=m$

로그의 정의에 의하여

$x=\log_2 m$

점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(\log_2 m,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\log_2 m$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=2^x$의 방정식을 연립하면

$-2^x+m=2^x$

정리하면

$2^{x+1}=m$

로그의 정의에 의하여

$x=-1+\log_2 m$

점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(-1+\log_2 m,\ \frac{m}{2}\right)$이고,

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(0,\ \frac{m}{2}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=-1+\log_2 m$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\log_2 m=2(-1+\log_2 m)$

정리하면

$\log_2 m=2$

로그의 정의에 의하여

$\therefore\ m=4$

답 ②

[풀이2] 시험장

점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 D라고 하자.

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2022 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2022 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통 〉

• 공통 1 : 문제를 보자마자 a^2-b^2이 떠올라야 함. 1번부터 '이 시험은 교과서/기출문제를 풀었던 기억으로 푼다.' 를 의도적으로 말하고 있음. 즉, '정해진 풀이를 따르지 않으면 망한다.' 를 노골적으로 표현.
• 공통 8 : 이차함수의 정적분 → 대칭축을 생각한다.
• 공통 13 : 그림을 그릴 수 없으니, 처음부터 끝까지 계산. 로그문제에서 a^b이 나오면 $\log a^b = b\log a$ 생각이 들어야.
• 공통 14 : x축에서 점 P를 움직이는게 우선.
• 공통 15 : 역대 평가원 기출 중에서 " 코사인법칙에 의하여 " 란 문구가 등장한 첫 번째 문제. 어떤 공식을 써야 하는지 알려 주었는데. 어려운 문제일리 없다. 읽는데 4점.
• 공통 21 : $2+2^2+2^3<2^4$과 같은 계산을 해보았는가? '기하급수적으로 빨라진다.' 의 의미를 아는가를 평가.
• 공통 22 : $f(1)=f(4)$에서 $f(x)$의 그래프의 개형이 바로 나와야 함. 삼차함수의 비율관계.

〈 확률과 통계 〉

• 확률과 통계 28 : 분할, 여사건 모두 가능. 이 문제 보다 경우 구분이 많은 함수 개수 세는 문제는 기출에 널려있음.
• 확률과 통계 29 : 적분 기호 쓰면 좀 더 편하긴 한데. $y=k$ 그리면 더 단순하게 해결 가능.
• 확률과 통계 30 : 답을 맞히기 상당히 어려운, 실수하기 딱 좋은 문제. 수형도 그냥 다 그리는 편이 나음.

〈 미적분 〉

• 미적분 28 : 평행이동/대칭성 & 기출을 풀었던 경험. 풀이 중간 과정에서 답을 바로 알 수 있음.
• 미적분 29 : 계산이 복잡하니. 극한의 근사적 계산으로 접근하면 실수 없이 빠르게 계산 가능.
• 미적분 30 : (나)의 항등식에 $x=1,\ 2,\ 4$ 대입하여 점찍고, 확대해서 그리면 끝. 역함수의 정적분 계산 말고, 그림으로 해결.

〈 기하 〉

• 기하 26 : 동일하게 쌍곡선으로 수능에 출제된 적이 있음. 원 밖의 점에서 접선 2개 그으면 합동인 직각삼각형 2개 찾는다.
• 기하 28 : 빗변 주면, 직각삼각형 그리고, 기울기 없으니, 피타 쓰고. 포물선의 정의대로 선분 그으면 직각 안에 수선 그려지니 닮음 쓰고.
• 기하 29 : 문제에서 원 위의 점 주었으니. (나)는 직선(선분)일 수밖에. 이 유형의 문제 중에서도 중급 수준.
• 기하 30 : 평가원 기출 중, 구/직선 정사영 내려서 점의 이동 관찰하는 문제의 확장판. 풀다보면 이면각 보다는 정사영이 좀 더 편하긴 하지만. 이면각의 정의에 의한 풀이도 계산이 거의 없음. 기존 공도 기출과 비교하여 중급 수준.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2007개정 교육과정		
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2012	모의평가(6월)	2011년 6월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2012	모의평가(9월)	2011년 9월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2012	대학수학능력	2011년 11월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2014	예비시행	2012년 5월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2013	모의평가(9월)	2012년 9월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2013	대학수학능력	2012년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2014	대학수학능력	2013년 11월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2015	모의평가(6월)	2014년 6월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2015	대학수학능력	2014년 11월
6차 교육과정			2016	모의평가(6월)	2015년 6월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2000	대학수학능력	1999년 11월	2016	대학수학능력	2015년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2009개정 교육과정		
2002	대학수학능력	2001년 11월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2017	대학수학능력	2016년 11월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월	2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월	2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2018	대학수학능력	2017년 11월
7차 교육과정			2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2005	예비시행	2003년 12월	2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2019	대학수학능력	2018년 11월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2020	대학수학능력	2019년 11월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2015개정 교육과정		
2006	대학수학능력	2005년 11월	2021	예시문항	2020년 5월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2021	모의평가(6월)	2020년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2021	모의평가(9월)	2020년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월	2021	대학수학능력	2020년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월	2022	모의평가(6월)	2021년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월	2022	모의평가(9월)	2021년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월	2022	대학수학능력	2021년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월			
2009	모의평가(9월)	2008년 9월			
2009	대학수학능력	2008년 11월			
2010	모의평가(6월)	2009년 6월			
2010	모의평가(9월)	2009년 9월			
2010	대학수학능력	2009년 11월			
2011	모의평가(6월)	2010년 6월			
2011	모의평가(9월)	2010년 9월			
2011	대학수학능력	2010년 11월			

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다. 그리고 모든 풀이를 보여준다는 의미에서 교육과정 외의 풀이도 수록하였으나, 이를 반드시 읽어야(공부해야) 하는 것은 아닙니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)
[풀이] (교육과정 외)
[참고] (교육과정 외)

목 차

수학 II

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

D 함수의 극한과 연속

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함

○ 합성함수의 극한과 연속성 관련 문제 제외 (미적분(이과)에 포함됨)

D. 함수의 극한

D001

○○ (1993(실험평가6차)-공통14)

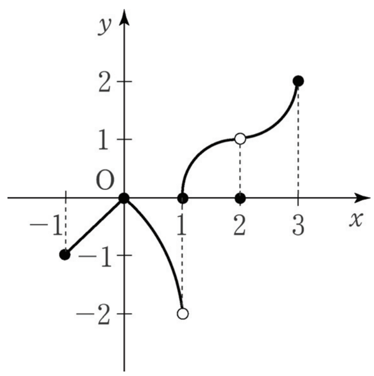
곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여, $A(x)$를 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{Q}(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 면적이라 하고, $B(x)$를 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 면적이라 하자. 이때, $\lim_{x\to0}\dfrac{A(x)}{B(x)}$의 값은?

① 0　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
④ 1　⑤ 2

D002

○ (2005(6)-가형5)

정의역이 $\{x\mid-1\le x\le3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]



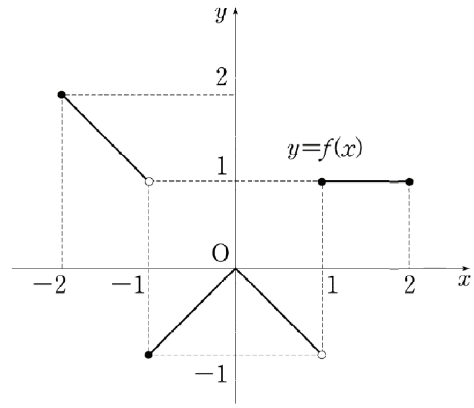
ㄱ. $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재한다.
ㄴ. $\lim_{x\to2}f(x)$가 존재한다.
ㄷ. $-1<a<1$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

D003

○ (2012(6)-나형7)

정의역이 $\{x\mid-2\le x\le2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)$의 값은? [3점]



① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

D004

○○ (2012(6)-나형18)

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to1-}f(t)$의 값은? [4점]

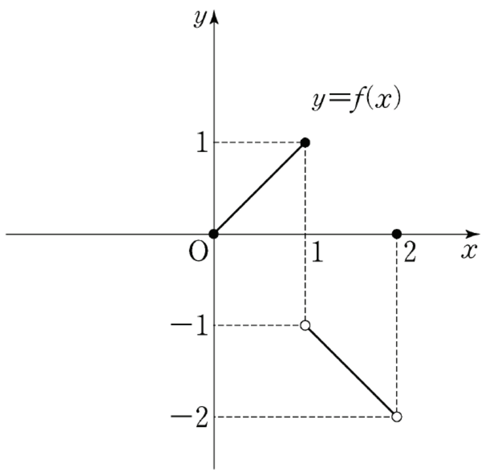
① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

D005

○○ (2014(9)-A형15)

정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[0,\ 2]$에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x) + \lim\limits_{x \to 2-} f(x)$의 값은? [4점]

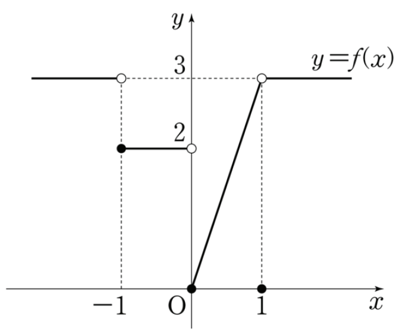


① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

D006

○ (2014-A형11)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



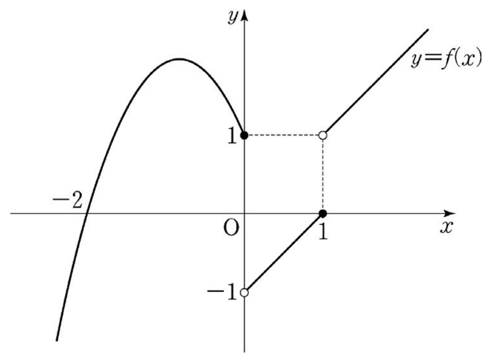
$\lim\limits_{x \to -1-} f(x) + \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

D007

○ (2018(6)-나형9)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



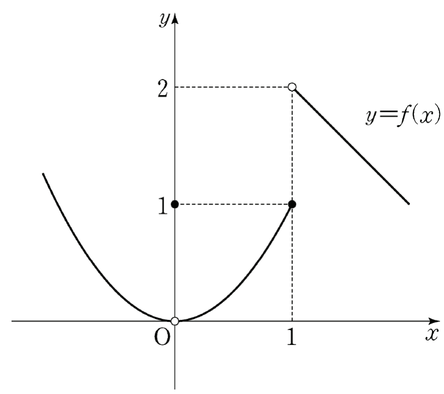
$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) + \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

D008

○ (2018(9)-나형5)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x \to 0} f(x) + \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

D. 함수의 극한값의 계산

D009

(1994(2차)-공통2)

서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=1$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\alpha^2}-\sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha}-\sqrt{4x+\beta}}$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 4

D010

(2001-인문27)

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{8(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}=1$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [2점]

D011

(2002-인문4/자연4)

다음 식을 성립하게 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값은? [2점]

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\frac{1}{3}$$

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

D012

(2005-가형18)

두 실수 a, b가 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-2}=\frac{2}{5}$를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

D013

○ (2006(6)−가형3)

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}=b$(단, $b\neq 0$)가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? [2점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

D014

○○ (2006(6)−가형4)

곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(t,\ \sqrt{t})$에서 점 $(1,\ 0)$까지의 거리를 d_1, 점 $(2,\ 0)$까지의 거리를 d_2라 할 때, $\lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ 0

D015

○ (2006−가형3)

두 상수 a, b가 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=3$을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [2점]

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

D016

○ (2008(6)−가형3)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=b$일 때, ab의 값은? [2점]

① 16 ② 4 ③ 1 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

D017

○○
(2008(6)-가형5)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(-1)=2,\ f(0)=0,\ f(1)=-2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

D018

○○
(2008(6)-가형6)

극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=4$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 〈보기〉에서 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $f(x)=4\lvert x\rvert$
ㄴ. $f(x)=2x^2+2x$
ㄷ. $f(x)=x+\frac{4}{x}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D019

○
(2008(9)-가형2)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$일 때, ab의 값은? [2점]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

D020

○
(2009(6)-가형2)

$\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x}$의 값은? [2점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

D021

○○
(2009(6)-가형4)

다항함수 $g(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$가 존재한다. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

D022

○○○
(2010(6)-가형19)

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

D023

○○○
(2011(6)-가형24)

x가 양수일 때, x보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 $f(x)$라 하고, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>2f(x)) \\ \frac{1}{f(x)} & (x\le 2f(x)) \end{cases}$$

라고 하자. 예를 들어, $f\left(\frac{7}{2}\right)=2$이고 $\frac{7}{2}<2f\left(\frac{7}{2}\right)$이므로 $g\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}$이다.

$\lim_{x\to8+}g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to8-}g(x)=\beta$라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오. [4점]

D024

○○ (2011(9)−가형5)

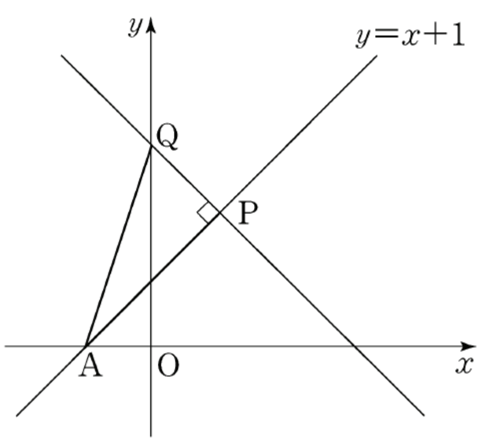
다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 -2일 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

D025

○○ (2012−나형12)

그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$과 $\mathrm{P}(t,\ t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$의 값은? [3점]



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

D026

○○ (2013(6)−나형9)

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=4$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

D027

○○ (2014(6)−A형9)

함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$$

일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{24}$
④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

D028

★★★

(2015(6)−A형21)

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$
(나) $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

D029

○○

(2016(9)−A형28)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=2$
(나) $\lim_{x\to 0}f(x)=-7$

D030

○○○
(2017−나형18)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

D031

○○
(2018(9)−나형12)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$
(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

$f(2)$의 값은? [3점]

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

D032

○○
(2018−나형25)

함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 1}(x+1)f(x)=1$을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1}(2x^2+1)f(x)=a$이다. $20a$의 값을 구하시오. [3점]

D033

●●● (2020(6)-나형20)

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}=4$
>
> 인 자연수 n이 존재한다.

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

D034

○○○ (2020-나형14)

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

> (가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3}=2$
>
> (나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

D035

(2022(9)-확률과통계8/미적분8/기하8)

삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8

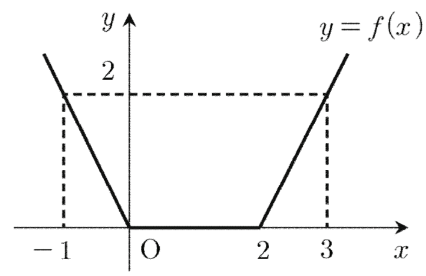
④ 10 ⑤ 12

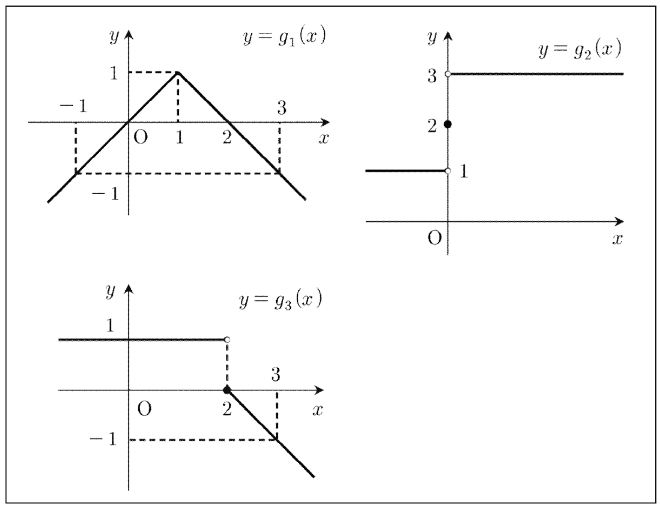
D. 함수의 연속

D036

(1996-인문예체능9/자연9)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 주어져 있다. 아래의 그래프로 주어진 함수 $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$, $y=g_3(x)$ 중에서 $f(x)$와 곱하여 얻어지는 함수 $y=f(x)g_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$이 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이 되는 $g_k(x)$를 모두 고르면? [1점]





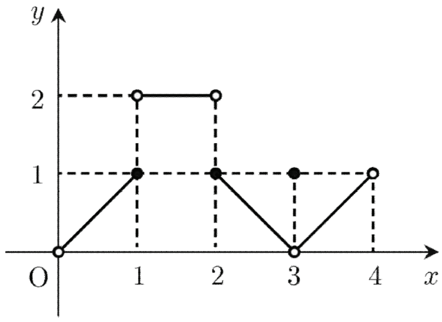
① $g_1(x)$ ② $g_2(x)$ ③ $g_1(x)$, $g_2(x)$

④ $g_1(x)$, $g_3(x)$ ⑤ $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$

D037

○ (2004(6)−인문15)

$0<x<4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]



ㄱ. $\lim_{x\to3} f(x)=1$

ㄴ. $x=1$에서 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 3개의 점에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

D038

●●● (2006(6)−가형15)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim_{x\to0} f(x)$와 $\lim_{x\to0} g(x)$가 모두 존재하지 않으면 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}$도 존재하지 않는다.

ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $y=|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $y=|f(x)|$가 $x=0$에서 연속이면 $y=f(x)$도 $x=0$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

D039

○○ (2006(9)–가형4)

함수 $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (|x|>1) \\ -x^2+ax+b & (|x|\le 1)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 3

D040

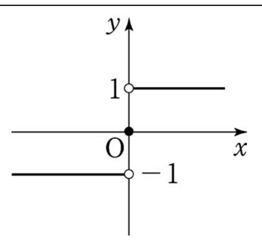
○○○ (2006–가형6)

모든 실수에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $y=x^kf(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k를 $N(f)$로 나타내자. 예를 들어,

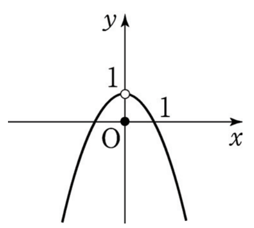
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$이면 $N(f)=2$이다.

다음 함수 $g_i(i=1,\ 2,\ 3)$에 대하여 $N(g_i)=a_i$라 할 때, a_i의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [3점]

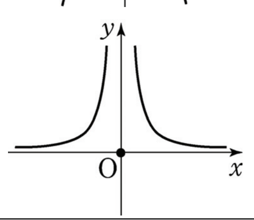
$g_1(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$



$g_2(x)=\begin{cases} -x^2+1 & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$



$g_3(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$



① $a_1=a_2<a_3$ ② $a_1<a_2=a_3$

③ $a_1=a_2=a_3$ ④ $a_2=a_3<a_1$

⑤ $a_3<a_1=a_2$

D041

○○○ (2007(6)–가형6)

함수 $f(x)$에 대하여 불연속점의 개수를 $N(f)$로 나타내자. 예를 들어

$f(x)=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$이면 $N(f)=1$이다.

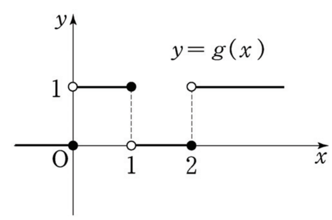
다음 두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여

$a_1=N(g+h)$, $a_2=N(gh)$, $a_3=N(|h|)$

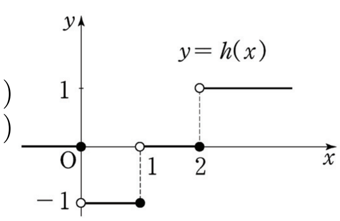
라 할 때, a_1, a_2, a_3의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

(단, $(g+h)(x)=g(x)+h(x)$, $(gh)(x)=g(x)h(x)$, $|h|(x)=|h(x)|$이다.) [3점]

$g(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ 1 & (0<x\le 1) \\ 0 & (1<x\le 2) \\ 1 & (x>2)\end{cases}$



$h(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ -1 & (0<x\le 1) \\ 0 & (1<x\le 2) \\ 1 & (x>2)\end{cases}$



① $a_1=a_2=a_3$ ② $a_1<a_2=a_3$ ③ $a_1=a_3<a_2$

④ $a_2<a_1=a_3$ ⑤ $a_3<a_1=a_2$

D042

○○ (2007(9)−가형6)

집합 $\{x \mid 0<x<2\}$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}-1 & (0<x\le 1) \\ \dfrac{1}{x-1}-1 & (1<x<2) \end{cases}$$

일 때, 함수 $y=f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$를 〈보기〉에서 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $g(x)=(x-1)^2 \ (0<x<2)$

ㄴ. $g(x)=(x-1)^3+1 \ (0<x<2)$

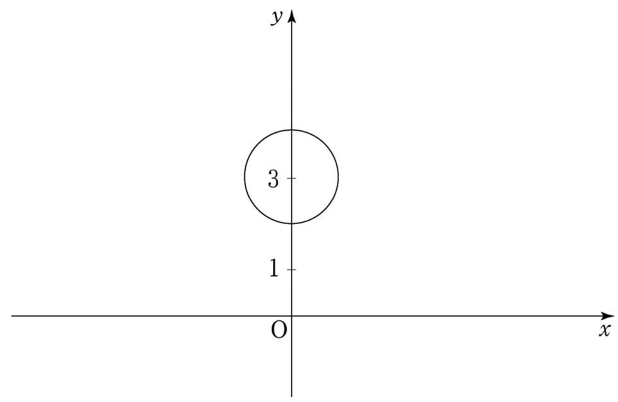
ㄷ. $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & (0<x\le 1) \\ (x-1)^3 & (1<x<2) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D043

●●● (2007−가형9)

좌표평면에서 중심이 $(0,\ 3)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 하자. 양수 r에 대하여 $f(r)$를 반지름의 길이가 r인 원 중에서, 원 C와 한 점에서 만나고 동시에 x축에 접하는 원의 개수라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



ㄱ. $f(2)=3$

ㄴ. $\lim_{r \to 1+} f(r)=f(1)$

ㄷ. 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(r)$의 불연속점은 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D044

○○ (2008(9)-가형7)

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2x-|x|} & (x\neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a는 실수이다.) [3점]

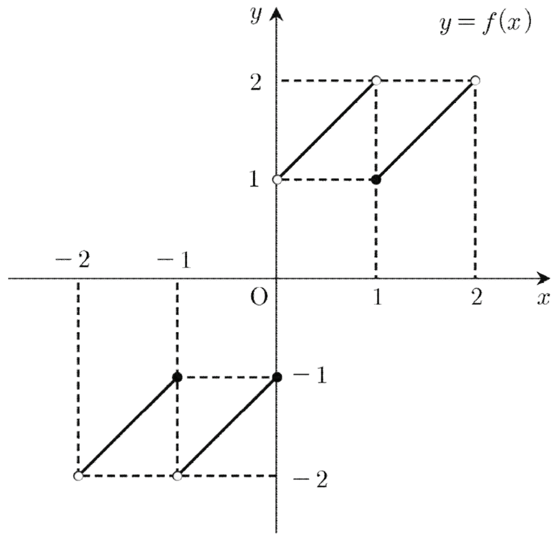
ㄱ. $f(-3)=1$이다.
ㄴ. $x>0$일 때, $f(x)=x$이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 a가 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

D045

○○○ (2008-가형8)

열린구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



열린구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+f(-x)$$

로 정의할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim_{x\to 0}f(x)$가 존재한다.
ㄴ. $\lim_{x\to 0}g(x)$가 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

D046

○○○
(2009(6)−가형10)

서로 다른 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수

$$y=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 개수를 $N(f,\ g)$라 하자. ⟨보기⟩에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$이면 $N(f,\ g)=2$이다.
ㄴ. $N(f,\ g)=N(g,\ f)$
ㄷ. $h(x)=x^3$이면
$N(f,\ g)=N(h\circ f,\ h\circ g)$이다.

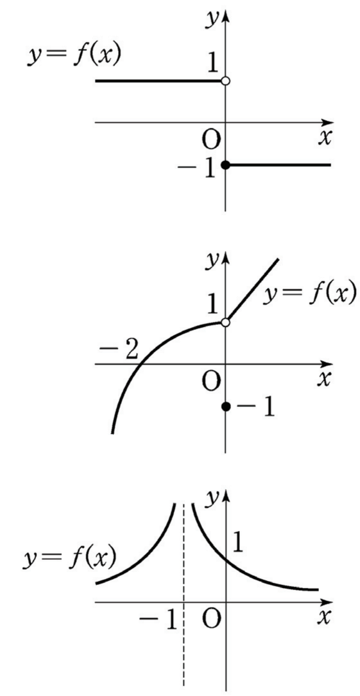
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D047

○○○
(2009(9)−가형6)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 ⟨보기⟩와 같이 주어질 때, 함수 $y=f(x-1)f(x+1)$이 $x=-1$에서 연속이 되는 경우만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ.
ㄴ.
ㄷ.



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D048

●●● (2010−가형8)

실수 a에 대하여 집합

$\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x는\ 실수\}$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim_{a\to0} f(a)=f(0)$
ㄴ. $\lim_{a\to c+} f(a) \neq \lim_{a\to c-} f(a)$인 실수 c는 2개다.
ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D049

○○○ (2011(6)−가형11)

함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\neq1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)$
ㄴ. 함수 $g(x)=f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a가 존재한다.
ㄷ. 함수 $h(x)=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

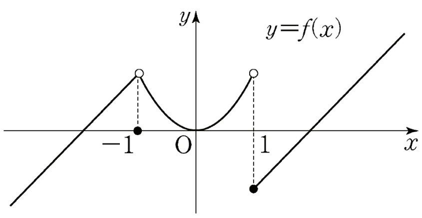
D050
(2011-가형8)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ 0 & (x=-1) \\ x^2 & (-1<x<1) \\ x-2 & (x \ge 1) \end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim_{x \to 1+} \{f(x)+f(-x)\}=0$
ㄴ. 함수 $f(x)-|f(x)|$가 불연속인 점은 1개다.
ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a는 없다.



① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D051
(2012(6)-가형6)

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-10}{x-2} & (x \ne 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

D052
(2012(9)-나형20)

함수 $f(x)=x^2-x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\begin{cases} f(x+1) & (x \le 0) \\ f(x-1) & (x>0) \end{cases}$이라 하자.

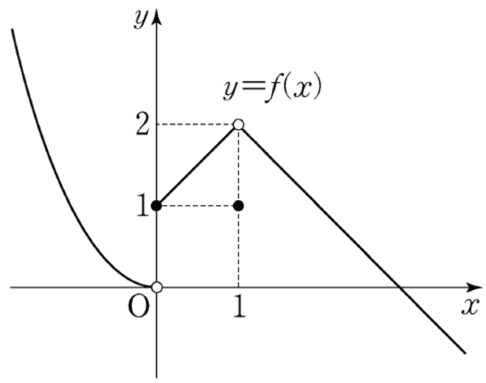
함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

D053

○○
(2012−나형18)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $\lim_{x \to 0+} f(x)=1$
ㄴ. $\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$
ㄷ. 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D054

○○
(2014(예비)−A형11)

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & (-1 \le x < 0) \\ 3x^2+2ax+b & (0 \le x < 1) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

D055

○○
(2013(6)−나형19)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (|x| \ge 1) \\ -x & (|x| < 1) \end{cases}$$

에 대하여, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 2개다.
ㄴ. 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

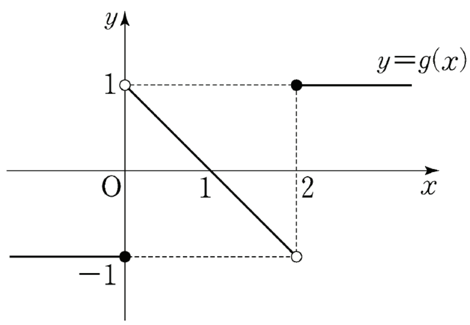
D056

○○○
(2013(6)−가형6)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}-1 & (x\le 0)\\ -x+1 & (0<x<2)\\ 1 & (x\ge 2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(5)$의 값은? [3점]



① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

D057

○○
(2013(9)−나형13)

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}a & (x\le 1)\\ -x+2 & (x>1)\end{cases}$$

일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.) [3점]

ㄱ. $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$
ㄴ. $a=0$이면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $y=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D058

○○○
(2013−나형20)

두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (|x|\ge 1)\\ 1 & (|x|<1)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}1 & (|x|\ge 1)\\ -x & (|x|<1)\end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

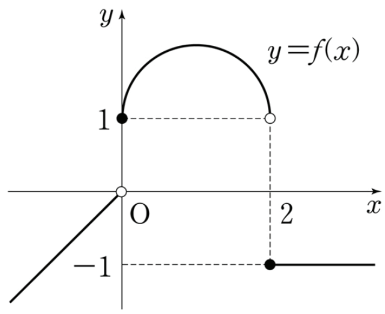
ㄱ. $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=-1$
ㄴ. 함수 $g(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D059

○○ (2014(6)−A형11)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 2-} f(x)=-1$

ㄷ. 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

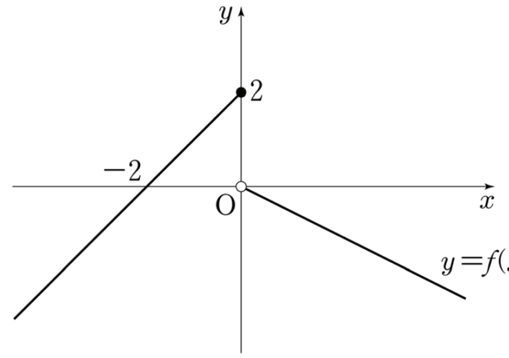
D060

○○ (2014(6)−A형13)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x\le 0) \\ -\dfrac{1}{2}x & (x>0) \end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같다.



함수 $g(x)=f(x)\{f(x)+k\}$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

D061

●●● (2014-A형28)

함수

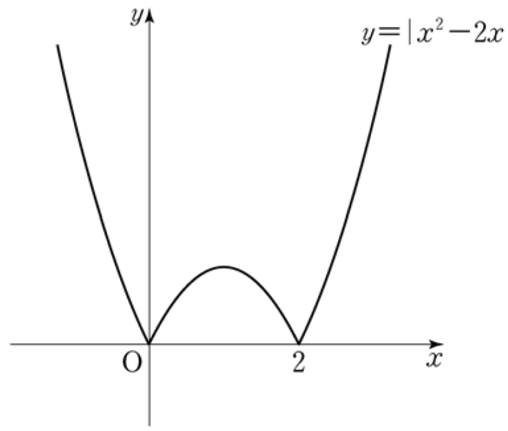
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \le 0) \\ -\frac{1}{2}x+7 & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

D062

○○○ (2016(6)-A형29)

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오. [4점]



D063

●●● (2016−A형27)

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (x \le a) \\ x^2-x & (x > a) \end{cases},\ g(x)=x-(2a+7)$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

D064

○○ (2017(9)−나형10)

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x-2}=12$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

D065

○○ (2017−나형14)

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & (x < 2) \\ 1 & (x \ge 2) \end{cases},\ g(x)=ax+1$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\dfrac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\dfrac{3}{4}$ ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

D 함수의 극한과 연속

1	①	2	⑤	3	⑤	4	④	5	①
6	③	7	⑤	8	④	9	③	10	16
11	②	12	26	13	③	14	①	15	①
16	④	17	③	18	③	19	③	20	②
21	①	22	10	23	16	24	②	25	③
26	④	27	⑤	28	⑤	29	13	30	④
31	②	32	30	33	③	34	③	35	②
36	⑤	37	⑤	38	①	39	①	40	①
41	②	42	③	43	④	44	⑤	45	⑤
46	⑤	47	④	48	④	49	③	50	②
51	①	52	②	53	③	54	③	55	⑤
56	①	57	③	58	④	59	③	60	①
61	13	62	8	63	21	64	③	65	④
66	⑤	67	24	68	20	69	③	70	①
71	④	72	6	73	④	74	6	75	④
76	④	77	③						

E 미분

1	⑤	2	①	3	③	4	14	5	28
6	①	7	④	8	13	9	②	10	③
11	⑤	12	③	13	186	14	②	15	③
16	②	17	11	18	①	19	④	20	12
21	−6	22	③	23	24	24	⑤	25	①
26	28	27	50	28	24	29	⑤	30	25
31	19	32	28	33	10	34	①	35	243
36	④	37	①	38	③	39	②	40	3
41	②	42	①	43	20	44	20	45	③
46	②	47	28	48	13	49	②	50	32
51	④	52	②	53	21	54	⑤	55	97
56	③	57	②	58	⑤	59	②	60	④
61	11	62	①	63	13	64	④	65	①
66	③	67	3	68	6	69	③	70	③
71	⑤	72	16	73	15	74	16	75	32
76	⑤	77	14	78	16	79	⑤	80	②
81	②	82	①	83	8	84	④	85	⑤
86	②	87	⑤	88	12	89	③	90	147
91	②	92	⑤	93	③	94	④	95	⑤
96	③	97	④	98	⑤	99	②	100	10
101	65	102	40	103	⑤	104	42	105	105
106	39	107	③	108	108	109	527	110	11
111	①	112	①	113	④	114	②	115	5
116	12	117	14	118	38	119	④	120	⑤
121	33	122	④	123	②	124	③	125	⑤
126	③	127	④	128	④	129	①	130	①
131	⑤	132	⑤	133	65	134	③	135	③
136	19	137	21	138	51	139	③	140	61
141	21	142	⑤	143	22	144	32	145	5
146	3	147	③	148	②	149	①	150	12
151	①	152	②	153	④	154	①	155	①
156	22	157	27						

F 적분

1	④	2	④	3	②	4	12	5	④
6	③	7	9	8	⑤	9	②	10	②
11	20	12	16	13	⑤	14	①	15	16
16	③	17	⑤	18	②	19	40	20	⑤
21	5	22	④	23	④	24	①	25	②
26	③	27	③	28	96	29	③	30	16
31	①	32	①	33	③	34	17	35	①
36	①	37	②	38	④	39	25	40	167
41	①	42	45	43	43	44	⑤	45	④
46	7	47	③	48	②	49	⑤	50	110
51	③	52	12	53	③	54	14	55	④
56	2	57	13	58	40	59	②	60	①
61	④	62	③	63	200	64	4	65	④
66	③	67	14	68	②	69	②	70	①
71	③	72	②	73	③	74	⑤	75	④
76	①	77	⑤	78	⑤	79	12	80	④
81	④	82	③	83	③	84	6	85	③
86	③								

해설 목차

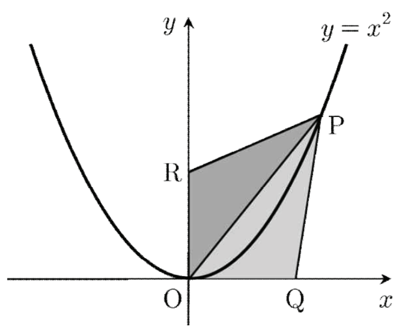
수학 II

D 함수의 극한과 연속

1	①	2	⑤	3	⑤	4	④	5	①
6	③	7	⑤	8	④	9	③	10	16
11	②	12	26	13	③	14	①	15	①
16	④	17	③	18	③	19	③	20	②
21	①	22	10	23	16	24	②	25	③
26	④	27	⑤	28	⑤	29	13	30	④
31	②	32	30	33	③	34	③	35	②
36	⑤	37	⑤	38	①	39	①	40	①
41	②	42	③	43	④	44	⑤	45	⑤
46	⑤	47	④	48	④	49	③	50	②
51	①	52	②	53	③	54	③	55	⑤
56	①	57	③	58	④	59	③	60	①
61	13	62	8	63	21	64	③	65	④
66	⑤	67	24	68	20	69	③	70	①
71	④	72	6	73	④	74	6	75	④
76	④	77	③						

D001 | 답 ①

[풀이]



P 가 제1사분면의 점이면

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$A(x)=\frac{1}{2}x^2,\ B(x)=\frac{1}{2}x$

P 가 제2사분면의 점이면

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$A(x)=\frac{1}{2}x^2,\ B(x)=-\frac{1}{2}x$

두 함수 $A(x)$, $B(x)$의 방정식은

$A(x)=\frac{1}{2}x^2,\ B(x)=\frac{1}{2}|x|$

(단, $x\neq 0$)

$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{x^2}{|x|}=|x|$

이므로

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim_{x\to 0}|x|=0$

답 ①

[참고]

다음과 같이 빠르게 계산할 수도 있다.

$\overline{OQ}=\overline{OR}=1$이므로

$A(x):B(x)=$(점 P 의 y좌표):|점 P 의 x좌표|

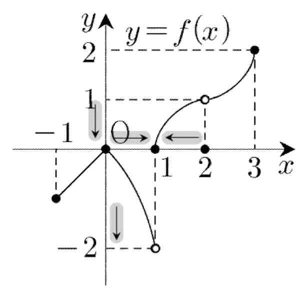
즉, $\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{x^2}{|x|}=|x|$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{B(x)}=0$

D002 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)



$x\to 1+$일 때, $f(x)$가 0보다 큰 값을 가지면서 0에 수렴하므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=0$

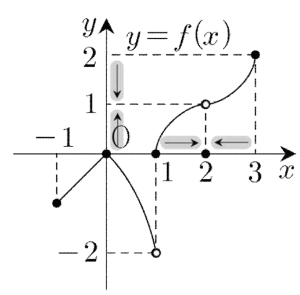
$x\to 1-$일 때, $f(x)$가 -2보다 큰 값을 가지면서 -2에 수렴하므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=-2$

$\lim_{x\to 1+}f(x)\neq\lim_{x\to 1-}f(x)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극한값을 갖지 않는다.

▸ ㄴ. (참)



$x\to 2+$일 때, $f(x)$가 1보다 큰 값을 가지면서 1에 수렴하므로

$\lim_{x \to 2+} f(x) = 1$

$x \to 2-$일 때, $f(x)$가 1보다 작은 값을 가지면서 1에 수렴하므로

$\lim_{x \to 2-} f(x) = 1$

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 극한값은 1이다.

▸ ㄷ. (참)

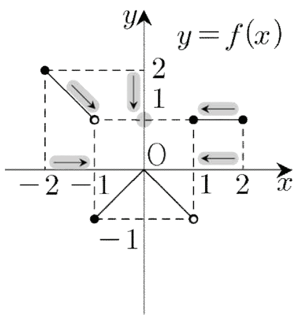
구간 $[-1,\ 1)$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 $-1 < a < 1$인 실수 a에 대하여 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한값은 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

D003 | 답 ⑤

[풀이]



$x \to -1-$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 수렴하므로

$\lim_{x \to -1-} f(x) = 1$

$x \to 1+$일 때, $f(x)$는 1의 값을 가지면서 1에 수렴하므로

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$

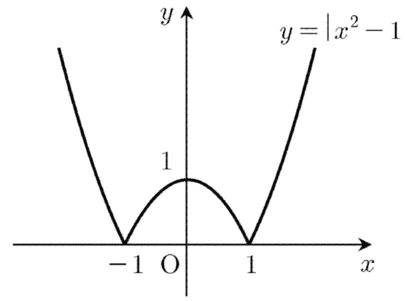
$\therefore \lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

답 ⑤

D004 | 답 ④

[풀이]

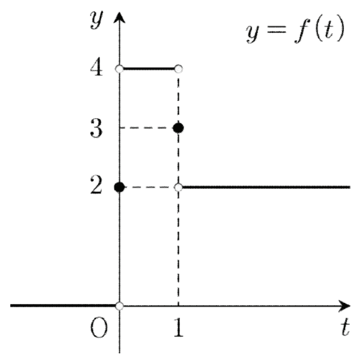
함수 $y = |x^2 - 1|$의 그래프는



함수 $f(t)$의 방정식은

$$f(t) = \begin{cases} 2 & (t > 1) \\ 3 & (t = 1) \\ 4 & (0 < t < 1) \\ 2 & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

함수 $f(t)$의 그래프는



$t \to 1-$일 때, $f(t)$는 4의 값을 가지면서 4에 수렴한다.

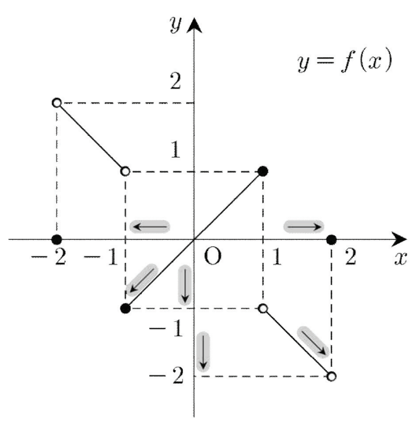
$\therefore \lim_{t \to 1-} f(t) = 4$

답 ④

D005 | 답 ①

[풀이]

주어진 조건에서 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



$x \to -1+$일 때, $f(x)$는 -1보다 큰 값을 가지면서 -1에 수렴한다.

$\lim_{x \to -1+} f(x) = -1$

$x \to 2-$일 때, $f(x)$는 -2보다 큰 값을 가지면서 -2에 수렴한다.

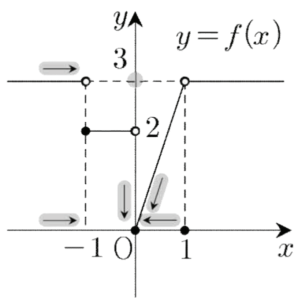
$\lim_{x \to 2-} f(x) = -2$

$\therefore \lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x) = -3$

답 ①

D006 | 답 ③

[풀이]



$x \to -1-$일 때, $f(x)$는 3의 값을 가지면서 3에 수렴한다.

$\lim_{x \to -1-} f(x) = 3$

$x \to 0+$일 때, $f(x)$는 0 보다 큰 값을 가지면서 0에 수렴한다.

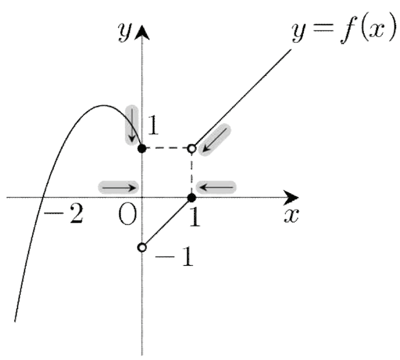
$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$

$\therefore \lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x) = 3$

답 ③

D007 | 답 ⑤

[풀이]



$x \to 0-$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) = 1$

$x \to 1+$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

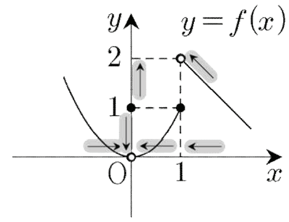
$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$

$\therefore \lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 1 + 1 = 2$

답 ⑤

D008 | 답 ④

[풀이]



$x \to 0+$일 때, $f(x)$는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$

$x \to 0-$일 때, $f(x)$는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$

$x = 0$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 0으로 같으므로

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$x \to 1+$일 때, $f(x)$는 2보다 작은 값을 가지면서 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 0 + 2 = 2$

답 ④

D009 | 답 ③

[풀이1]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+\alpha^2} - \sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha} - \sqrt{4x+\beta}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\sqrt{4x+\alpha} + \sqrt{4x+\beta})}{(\alpha - \beta)(\sqrt{x+\alpha^2} + \sqrt{x+\beta^2})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x+\alpha} + \sqrt{4x+\beta}}{\sqrt{x+\alpha^2} + \sqrt{x+\beta^2}} \ (\because \alpha + \beta = 1)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{\alpha}{x}}+\sqrt{4+\frac{\beta}{x}}}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x}}+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{x}}}=\frac{2+2}{1+1}=2$$

답 ③

[풀이2] 시험장

$\alpha=1$, $\beta=0$으로 두어도 답을 구하는데 문제가 없다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\alpha^2}-\sqrt{x+\beta^2}}{\sqrt{4x+\alpha}-\sqrt{4x+\beta}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x})(\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x})}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{2+2}{1+1}=2$$

($\because$ $x\to\infty$일 때,

$\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\approx\frac{\sqrt{4x}+\sqrt{4x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$)

답 ③

D010 | 답 16

[풀이]

좌변을 정리하면

$$\lim_{x\to1}\frac{8(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{8(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{8(x^2+1)}{f(x)}=1$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$x\to1$일 때, (분수식)$\to1$, (분자)$\to16$이므로

(분모)$\to16$, 즉 $\lim_{x\to1}f(x)=16$

그런데 함수 $f(x)$는 다항함수이므로

$\therefore$ $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=16$

답 16

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{8(x^2+1)}{\frac{8(x^2+1)}{f(x)}}=\frac{16}{1}=16$$

D011 | 답 ②

[풀이1]

$x\to1$일 때, (분수식)$\to\frac{1}{3}$, (분자)$\to0$이므로

(분모)$\to0$

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$에서 $b=-1-a$

이를 문제에서 주어진 분수식에 대입하자.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-(1+a)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1+a)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1+a}=\frac{1}{a+2}=\frac{1}{3}$$

$a=1$이므로 $b=-2$이다.

$\therefore$ $ab=-2$

답 ②

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\frac{x-1}{x^2+ax+b}}=\frac{\lim_{x\to1}(x-1)}{\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}}$$

$=0\times3=0$

이므로

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

즉, $b=-1-a$

[풀이2] 교육과정 외 (로피탈의 정리) 시험장

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)'}{(x^2+ax+b)'}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{2x+a}=\frac{1}{2+a}=\frac{1}{3},\ \text{즉 } a=1$$

$x\to1$일 때, (분수식)$\to\frac{1}{3}$, (분자)$\to0$이므로

(분모)$\to 0$, 즉 $1+a+b=0$에서 $b=-2$

$\therefore\ ab=-2$

답 ②

D012 | 답 26

[풀이]

$x\to 2$일 때, (분수식)$\to \frac{2}{5}$, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$, 즉 $\sqrt{2^2+a}-b=0$에서

$b=\sqrt{4+a}$ $\cdots$ ㉠

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{a+4}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a+4})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a+4}}=\frac{2}{\sqrt{a+4}}=\frac{2}{5}$$

에서 $a=21$

이를 ㉠에 대입하면

$b=5$

$\therefore\ a+b=26$

답 26

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{x^2+a}-b)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-2}\times(x-2)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-2}\times\lim_{x\to 2}(x-2)$$

$$=\frac{2}{5}\times 0=0$$

이므로

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{x^2+a}-b)=\sqrt{4+a}-b=0$$

즉, $b=\sqrt{4+a}$

D013 | 답 ③

[풀이1]

$x\to 2$일 때, (분수식)$\to b$, (분자)$\to 0$이므로

(분모)$\to 0$, 즉 $4+2a=0$, $a=-2$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=\frac{4}{2}=2\text{에서 } b=2$$

$\therefore\ a+b=0$

답 ③

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 2}(x^2+ax)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\frac{x^2-4}{x^2+ax}}=\frac{\lim_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}}=\frac{0}{b}=0$$

이므로

$\lim_{x\to 2}(x^2+ax)=4+2a=0$ 즉, $a=-2$

[풀이2] 교육과정 외 (로피탈의 정리) 시험장

$x\to 2$일 때, (분수식)$\to b$, (분자)$\to 0$이므로

(분모)$\to 0$, 즉 $4+2a=0$, $a=-2$

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)'}{(x^2-2x)'}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{2x-2}=\frac{4}{2}=2=b$$

$\therefore\ a+b=0$

답 ③

D014 | 답 ①

[풀이]

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$d_1=\sqrt{t^2-t+1}$, $d_2=\sqrt{t^2-3t+4}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2-3t+4})$$

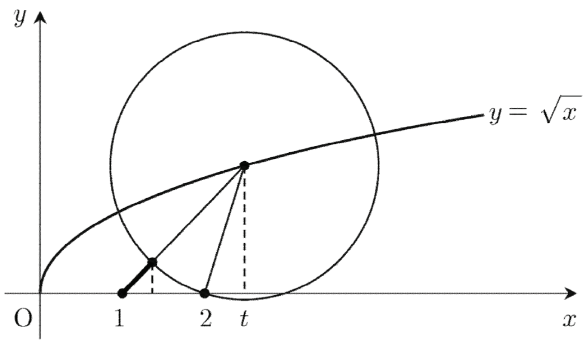
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2-3t+4}}$$

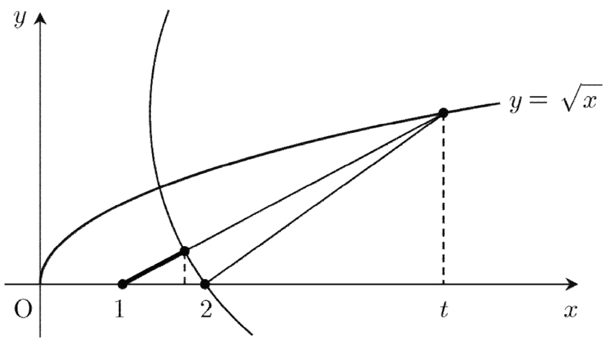
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2-\frac{3}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

답 ①

[참고]





위의 그림에서 $\lim\limits_{t\to\infty}(d_1-d_2)=1$임을 확인해볼 수 있다.

D015 | 답 ①

[풀이1]

$x\to2$일 때, (분수)$\to3$, (분자)$\to0$이므로

(분모)$\to0$, 즉 $2^2-b=0$, $b=4$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-a}{x+2}=\frac{2-a}{4}=3\text{에서 } a=-10$$

$\therefore\ a+b=-6$

답 ①

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to2}(x^2-b)$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to2}\{x^2-(a+2)x+2a\}}{\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}}=\frac{0}{3}=0$$

이므로

$\lim\limits_{x\to2}(x^2-b)=2^2-b=0$에서 $b=4$

[풀이2] 교육과정 외 (로피탈의 정리) 시험장

$x\to2$일 때, (분수식)$\to3$, (분자)$\to0$이므로

(분모)$\to0$, 즉 $4-b=0$, $b=4$

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\{x^2-(a+2)x+2a\}'}{(x^2-4)'}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2x-(a+2)}{2x}$$

$$=\frac{2-a}{4}=3,\ \text{즉 } a=-10$$

$\therefore\ a+b=-6$

답 ①

D016 | 답 ④

[풀이]

$x\to1$일 때, (분수)$\to b$, (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$, 즉 $\sqrt{2+a}-2=0$, $a=2$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x^2-1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}$$

$$=\frac{1}{2\times4}=\frac{1}{8}=b$$

$$\therefore\ ab=\frac{1}{4}$$

답 ④

[참고]
생략된 계산과정은 다음과 같다.
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}(\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+3})$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}\times(x^2-1)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}(x^2-1)$$
$$=b\times0=0$$

이므로

$$\lim_{x\to1}(\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+3})$$
$=\sqrt{2+a}-2=0$에서 $a=2$

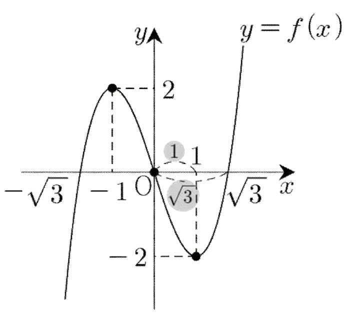
D017 | 답 ③

[풀이1]
함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$
주어진 조건에서
$f(-1)=-1+a-b+c=2$, 즉 $a-b+c=3$
$f(0)=c=0$, 즉 $c=0$
$f(1)=1+a+b+c=-2$, 즉 $a+b+c=-3$
a, b, c에 대한 연립일차방정식을 풀면
$a=0$, $b=-3$, $c=0$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^3-3x$
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2-3)}{x}=\lim_{x\to0}(x^2-3)=-3$$

답 ③

[풀이2] 시험장



위의 그림처럼 세 점
$(-1,\ 2)$(극대점), $(0,\ 0)$(대칭점), $(1,\ -2)$(극소점)
를 지나는 삼차함수의 방정식을 구하면
$y=x^3-3x$
이다.
따라서 $f(x)=x^3-3x$이다.
왜냐하면
$f(x)=x^3+ax+b+c$
로 두면 구해야 하는 상수가 a, b, c로 3개인데, 주어진 점의 개수가 3으로 같기 때문이다.

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x^2-3)=-3$$

답 ③

D018 | 답 ③

[풀이]
▸ ㄱ. (성립○)
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{16x^2}{4x^2}=\lim_{x\to0}4=4$$

▸ ㄴ. (성립×)
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{4x^4+8x^3+4x^2}{2x^4+2x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+4x+2}{x^2+1}=2$$

▸ ㄷ. (성립○)
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+8+\frac{16}{x^2}}{x^2+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^4+8x^2+16}{x^4+4}$$
$$=4$$

이상에서 주어진 조건을 만족하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고]
함수 $f(x)$의 $x=0$에서의 미분가능성은 다음과 같다.
▸ ㄱ과 ㄷ: 불가능
ㄱ과 ㄷ의 경우 $f'(0)$이 존재하지 않으므로 미분계수를 이용하여 참, 거짓을 판단할 수 없다.
▸ ㄴ: 가능
ㄴ의 경우 $f'(0)$이 존재하므로 다음과 같은 참, 거짓 판단도 가능하다.
▸ ㄴ. (성립×)
미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x \to 0} \frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)^2}{\frac{f(x^2)-f(0^2)}{x^2-0^2}} \quad (\because f(0)=0)$$
$$= \frac{\{f'(0)\}^2}{f'(0)} = f'(0) = 2 \neq 4$$
$(\because f'(x) = 4x+2)$

D019 | 답 ③

[풀이]

$x \to 1$일 때, (분수식)$\to 2\sqrt{2}$, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$, 즉 $a+b=0$, $b=-a$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 1} \frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}} = \lim_{x \to 1} \frac{ax-a}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{a(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1} a(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}$$

에서 $a=1$이고, $b=-1$이다.

$\therefore$ $ab=-1$

답 ③

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 1} (ax+b)$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}} \times (\sqrt{x+1}-\sqrt{2})$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}} \times \lim_{x \to 1} (\sqrt{x+1}-\sqrt{2})$$
$$= 2\sqrt{2} \times 0 = 0$$

이므로

$\lim_{x \to 1} (ax+b) = a+b = 0$ 즉, $b=-a$

D020 | 답 ②

[풀이]

$t=-x$로 두면 $x \to -\infty$일 때, $t \to \infty$이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{t \to \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1} = -\frac{1}{2}$$

답 ②

D021 | 답 ①

[풀이1]

$x \to 1$일 때,

$\frac{g(x)-2x}{x-1} \to$ (상수), $x-1 \to 0$이므로

$g(x)-2x \to 0$, 즉 $g(1)=2$

주어진 등식에서

$f(x)=(x-1)\{g(x)-1\}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\{g(x)\}^2-g(x)}{x+1}$$
$$= \frac{\{g(1)\}^2-g(1)}{2} = 1$$

답 ①

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1} = \alpha$ (α는 상수)라고 하자.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 1} \{g(x)-2x\}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1} \times (x-1)$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1} \times \lim_{x \to 1} (x-1)$$
$$= \alpha \times 0 = 0$$

이므로

$\lim_{x \to 1} \{g(x)-2x\} = g(1)-2=0$ 즉, $g(1)=2$

[풀이2]

$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1} = \alpha$ (α는 상수)로 두자.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to 1} \{g(x)-2x\} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-2x}{x-1} \times (x-1)$$

$=\alpha \times 0 = 0$이므로 $g(1)=2$이다. …㉠

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)-2(x-1)}{x-1}$$

$=g'(1)-2=\alpha$ 즉, $g'(1)=\alpha+2$

문제에서 주어진 등식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0$ $\cdots$ ㉡

문제에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+1=g(x)+(x-1)g'(x)$

위의 등식에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)+1=g(1)$ $\cdots$ ㉢

㉠을 ㉢에 대입하면 $f'(1)=1$ $\cdots$ ㉣

㉠, ㉡에 의하여

$f(1)g(1)=0\times 2=0$

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{2}(f'(1)g(1)+f(1)g'(1))$$

$$=\frac{1}{2}(1\times 2+0\times g'(1))=1$$

답 ①

[풀이3] 교육과정 외 (로피탈의 정리)

$x\to 1$일 때,

$\frac{g(x)-2x}{x-1}\to$(상수)$(=\alpha)$, $x-1\to 0$이므로

$g(x)-2x\to 0$, 즉 $g(1)=2$

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(g(x)-2x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{g'(x)-2}{1}$$

$=g'(1)-2=\alpha$, 즉 $g'(1)=\alpha+2$

문제에서 주어진 등식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0$

문제에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+1=g(x)+(x-1)g'(x)$

위의 등식에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$f'(1)=g(1)-1=1$

이상의 결과를 정리해서 쓰면

$g(1)=2$, $g'(1)=\alpha+2$, $f(1)=0$, $f'(1)=1$

로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)g(x)\}'}{(x^2-1)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{2x}$$

$$=\frac{f'(1)g(1)+f(1)g'(1)}{2}$$

$$=\frac{1\times 2+0\times(\alpha+2)}{2}=1$$

답 ①

D022 | 답 10

[풀이1]

$\frac{1}{x}=t$로 두면 $x\to 0+$일 때, $t\to\infty$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=5$$

만약 $f(x)$가 2차 이하의 다항함수이면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=-\infty$$

이는 가정에 모순이다.

만약 $f(x)$가 4차 이상의 다항함수이면

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}$은 발산하므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$는 삼차함수이다.

그런데 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1이 아닌 삼차함수라고 하면 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}$은 발산하므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{at^2+bt+c}{1+t^2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+1}=a=5$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+5x^2+bx+c$

$x\to 1$일 때,

$\frac{f(x)}{x^2+x-2}\to\frac{1}{3}$이고, $x^2+x-20\to 0$이므로

$f(x)\to 0$, 즉 $f(1)=6+b+c=0$ 즉, $c=-b-6$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+5x^2+bx-b-6$

인수분해하면

$f(x)=(x-1)(x^2+6x+b+6)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x+b+6}{x+2}$$

$=\frac{b+13}{3}=\frac{1}{3}$에서 $b=-12$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)(x^2+6x-6)$

$\therefore\ f(2)=10$

답 10

[참고]

생략된 계산과정은 다음과 같다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}\times(x^2+x-2)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}\times\lim_{x\to1}(x^2+x-2)$$

$$=\frac{1}{3}\times0=0$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^3+5x^2+bx+c)$$

$=6+b+c=0$ 즉, $c=-b-6$

[풀이2] 시험장

$x\to1$일 때,

$\frac{f(x)}{x^2+x-2}\to\frac{1}{3}$, $x^2+x-2\to0$이므로

$f(x)\to0$, 즉 $f(1)=0$ …㉠

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$=\frac{1}{3}f'(1)=\frac{1}{3}$, 즉 $f'(1)=1$ …㉡

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{1+t^2}=5$$

($\frac{1}{x}=t$로 두면 $x\to0+$일 때, $t\to\infty$이다.)

$f(t)-t^3$은 최고차항의 계수가 5인 이차함수이므로

$f(t)=t^3+5t^2+at+b$에서

$f(1)=6+a+b=0$ ($\because$ ㉠)

$f'(t)=3t^2+10t+a$에서

$f'(1)=13+a=1$, 즉 $a=-12$ ($\because$ ㉡)

$b=-a-6=6$

함수 $f(t)$의 방정식은

$f(t)=t^3+5t^2-12t+6$

$\therefore\ f(2)=10$

답 10

D023 | 답 16

[풀이]

8 이하의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로

$x\to8+$일 때, $f(x)=4$이고,

$x>8=2f(x)$이므로 $g(x)=f(x)$

$$\alpha=\lim_{x\to8+}g(x)=\lim_{x\to8+}f(x)=4$$

8보다 작은 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로

$x\to8-$일 때, $f(x)=4$이고,

$x\le8=2f(x)$이므로 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\beta=\lim_{x\to8-}g(x)=\lim_{x\to8-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ \frac{\alpha}{\beta}=16$

답 16

D024 | 답 ②

[풀이1] 시험장

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0\Rightarrow f(x)=ax^2+\cdots$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5\Rightarrow f(x)=\cdots+5x$$

(즉, $f(0)=0$, $f'(0)=5$)

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=ax^2+5x$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$f(-2)=4a-10=-2$ 풀면 $a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+5x$

$\therefore\ f(1)=7$

답 ②

[풀이2]

함수 $f(x)$를 다음과 같이 두자.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(단, $a_n\neq 0$)

$n\geq 4$이라고 가정하자.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{n-3}\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_2}{x^{n-2}}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)$$

$a_n>0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\infty$

$a_n<0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=-\infty$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $n\leq 3$

$n=3$이라고 가정하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(a_3+\frac{a_2}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x^3}\right)=a_3\neq 0$$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $n\leq 2$

$n=2$이라고 가정하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_2}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x^3}\right)=0$$

$n=1$이라고 가정하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x^3}\right)=0$$

다항함수 $f(x)$는 2차 이하이다.

이제 $f(x)=ax^2+bx+c$로 두자.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+c}{x}$$

$=\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(ax+b+\frac{c}{x}\right)=5$에서 $b=5$, $c=0$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^2+5x$

주어진 조건에서 방정식

$ax^2+5x=x$의 한 근이 -2이므로

$4a-10=-2$에서 $a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+5x$

$\therefore\ f(1)=7$

답 ②

[참고]

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 결정해도 좋다.

함수 $f(x)-x$가 이차함수이므로

인수정리에 의하여

$f(x)-x=a(x+2)(x-b)$

(단, $a(\neq 0)$, b는 상수)

로 둘 수 있다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x+2)(x-b)+x$

그런데 문제에서 주어진 등식

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5 \qquad \cdots ㉠$$

에 의하여 함수 $f(x)$의 상수항은 0이다.

즉, $f(0)=-2ab=0$에서 $b=0(\because a\neq 0)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^2+(2a+1)x$

㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 일차항의 계수는 5이므로

$2a+1=5$에서 $a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+5x$

D025 | 답 ③

[풀이]

점 P를 지나고 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식은

$y=-x+2t+1$

점 Q의 좌표는

Q$(0,\ 2t+1)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}^2=2t^2+4t+2$

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=4t^2+4t+2$

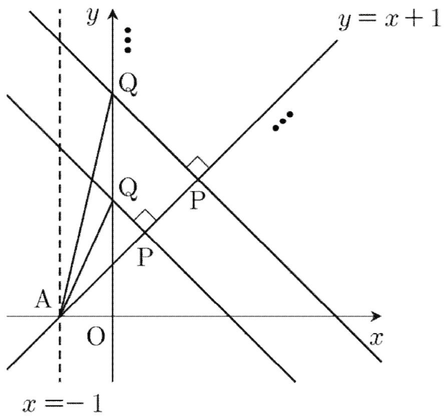
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}=2$$

답 ③

[참고]



위의 그림에서 $t\to\infty$일 때 직선 AQ가 $x=-1$에 한없이 가까워지는 것을 관찰할 수 있다.
직각삼각형 APQ에 대하여
$t\to\infty$일 때 $\angle \mathrm{QAP}\to 45^\circ$이므로
삼각비의 정의에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{QA}}}\to\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=2$$

D026 | 답 ④

[풀이1]
$t=x-2$로 두면 $x\to 2$일 때 $t\to 0$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t(t+2)}=4$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x(x+2)}\times(x+2)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x(x+2)}\times\lim_{x\to 0}(x+2)=8$$

답 ④

[풀이2]
※ 함수 $f(x)$가 연속함수라는 조건이 있다면 다음과 같은 풀이도 가능하다.
함수의 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 2}f(x-2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}\times(x^2-2x)=4\times 0=0$$

즉, $\lim_{t\to 0}f(t)=0$, $f(0)=0$
미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}\times\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\times\frac{1}{t+2}$$

$$=\frac{1}{2}f'(0)=4 \text{ 즉, } f'(0)=8$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=8$$

답 ④

[풀이3]
$x\to 2$일 때,
$\dfrac{f(x-2)}{x^2-2x}\to 4$이고, $x^2-2x\to 0$이므로
$f(x-2)\to 0$, 즉 $f(0)=0$
모든 곡선과 점을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(x+2)x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{1}{2}f'(0)=4,\text{ 즉 } f'(0)=8$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=8$$

답 ④

D027 | 답 ⑤

[풀이1]
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}\times(x-2)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}\times\lim_{x\to 2}(x-2)$$

$$=5\times 0=0$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\dfrac{f(x)-3}{x-2}}\times\frac{1}{f(x)-3+6}$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{0+6}=\frac{1}{30}$$

답 ⑤

[풀이2]

※ 함수 $f(x)$가 미분가능한 함수라는 조건이 있다면 다음과 같은 풀이도 가능하다.

$x\to2$일 때, $\dfrac{f(x)-3}{x-2}\to5$이고, $x-2\to0$이므로

$f(x)-3\to0$, 즉 $f(2)=3$

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=5$$

미분계수의 정의와 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\dfrac{f(x)-3}{x-2}\times\{f(x)+3\}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\{f(x)+3\}}$$

$$=\frac{1}{f'(2)\times\{f(2)+3\}}=\frac{1}{5\times(3+3)}=\frac{1}{30}$$

답 ⑤

[참고]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}\times(x-2)=5\times0=0$$

이므로

$\lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=f(2)-3=0$ 즉, $f(2)=3$

[풀이3] 시험장

※ 함수 $f(x)$가 미분가능하다는 조건이 있다면 아래와 같은 풀이도 가능하다.

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5\Rightarrow f(2)=3,\ f'(2)=5$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\cdot(f(x)+f(2))}$$

$$=\frac{1}{f'(2)\cdot2f(2)}=\frac{1}{30}$$

답 ⑤

D028 | 답 ⑤

[풀이1] ★

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$

조건 (가)에 의하여

$\lim_{x\to1}g(x)=0$

조건 (나)에서 $n=1$이면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

함수의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to1}g(x)=0\times0=0$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$ 즉, $f(1)=0$ …㉠

조건 (나)에서 $n=2$이면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

$g(2)=a$(a는 상수)라고 두자.

마찬가지의 방법으로 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 함숫값을 구하면

$f(2)=0$ …㉡

함수 $f(x)$, $g(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+b)$($\because$ ㉠, ㉡)

$g(x)=(x-1)(x^2+cx+d)$($\because$ (가))

조건 (나)에서 $n=1$이면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x+b)}{x^2+cx+d}=\frac{-1-b}{1+c+d}=0$$

풀면 $b=-1$이므로

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$

조건 (나)에서 $n=3$이면

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+cx+d}=\frac{2}{9+3c+d}=2$$

분수식을 풀면 $3c+d=-8$ …㉢

조건 (나)에서 $n=4$이면

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2+cx+d}=\frac{6}{16+4c+d}=6$$

분수식을 풀면 $4c+d=-15$ …㉣

㉢과 ㉣을 연립하면

$c=-7$, $d=13$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$

$\therefore\ g(5)=12$

답 ⑤

[참고1] ★

인수정리를 이용하여 함수 $f(x)$의 방정식을 유도할 수 있다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$g(1)=0$이고 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이므로 $f(1)=0$이다.

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)P(x)$, $g(x)=(x-1)Q(x)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{P(x)}{Q(x)}=0$에서 $P(1)=0$이다.

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)^2R(x)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)R(x)}{Q(x)}=0$에서 $R(2)=0$이다.

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$

[참고2] ★

미분계수의 정의와 인수정리를 이용하여 함수 $f(x)$가

$(x-1)^2$을 인수로 가짐을 보일 수 있다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$g(1)=0$이고 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이므로 $f(1)=0$이다.

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=0$$

에서 $f'(1)=0$이다.

$f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로 인수정리에 의하여

함수 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가진다.

[풀이2] 시험장

조건 (나)에서 $n=1$이면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Rightarrow f(1)=0$ ($\because$ (가):$g(1)=0$)

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=0$$

$\Rightarrow f'(1)=0$

조건 (나)에서 $n=2$이면

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Rightarrow f(2)=0$

이상의 결과를 정리하면

$f(1)=0$, $f'(1)=0$, $f(2)=0$

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$,

$g(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$

(단, $g(2)=4+ax+b\neq0$)

조건 (나)에서 $n=3$이면

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{4}{2(9+3a+b)}=2$

즉, $3a+b=-8$

조건 (나)에서 $n=4$이면

$\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to3}\frac{18}{3(16+4a+b)}=6$

즉, $4a+b=-15$

연립방정식을 풀면

$a=-7$, $b=13$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$

$\therefore$ $g(5)=12$

답 ⑤

D029 | 답 13

[풀이1]

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)-x^3$은 다항함수이다.

$f(x)-x^3=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(단, n은 자연수이고 $a_n\neq0$이다.)

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n}{3}x^{n-1}+\frac{a_{n-1}}{3}x^{n-2}+\cdots+\frac{a_1}{3}+\frac{a_0}{3x}\right)$$

$=2$

만약 $n\geq2$이고 $a_n>0$이면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{3}x^{n-1}=\infty$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{3}x^{n-1}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\cdots+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)$$

$=\infty$

이는 가정에 모순이다.

만약 $n\geq2$이고 $a_n<0$이면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{3}x^{n-1}=-\infty$$

이므로 마찬가지의 방법으로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=-\infty$$

이는 가정에 모순이다.

따라서 $n=1$이므로 다항함수 $f(x)-x^3$는 일차식이다.

$f(x)-x^3=ax+b$ (단, $a\neq 0$)

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3x}\right)=\frac{a}{3}=2$$

풀면

$a=6$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+6x+b$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(x^3+6x+b)=b=-7$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+6x-7$

$\therefore\ f(2)=13$

답 13

[풀이2] 시험장

(가) $\Rightarrow f(x)-x^3=6x+a$

(나) $\Rightarrow f(0)=a=-7$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3+6x-7$

$\therefore\ f(2)=13$

답 13

D030 | 답 ④

[풀이1]

방정식 $f(x)=0$의 두 근이 각각 α, β이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}$$

$$=\lim_{x\to a}\{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-a)\}$$

$$=(a-\alpha)(a-\beta)=f(a) \qquad \cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}\times\{f(x)+(x-a)\}$$

$$=\frac{3}{5}\times f(a) \qquad \cdots ㉡$$

㉠=㉡: $f(a)=\frac{3}{5}\times f(a)$

풀면 $f(a)=0$이므로 인수정리에 의하여

$\alpha=a$ 또는 $\beta=a$

- (1) $\alpha=a$인 경우

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-a)(x-\beta)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-\beta-1)}{(x-a)(x-\beta+1)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-\beta-1}{x-\beta+1}=\frac{a-\beta-1}{a-\beta+1}=\frac{3}{5}$$

정리하면

$\beta=a-4$

이므로

$|\alpha-\beta|=4$

- (2) $\beta=a$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 아래의 결과를 얻는다.

$|\alpha-\beta|=4$

(1), (2)에서

$\therefore\ |\alpha-\beta|=4$

답 ④

[참고]

$f(a)=0$임을 귀류법을 이용하여 보일 수 있다.

함수 $f(x)$는 다항함수이므로

임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)$이 항상 존재한다.

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\alpha\neq 0$이라고 가정하자.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{\alpha}{\alpha}=1\neq\frac{3}{5}$$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

$\therefore\ f(a)=0$

[풀이2]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}=f(a) \qquad \cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}\times\{f(x)+(x-a)\}$$

$$=\frac{3}{5}\times f(a) \qquad \cdots ㉡$$

㉠=㉡: $f(a)=\frac{3}{5}\times f(a)$

풀면 $f(a)=0$이므로

인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=(x-a)(x-b)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-b-1)}{(x-a)(x-b+1)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-b-1}{x-b+1}=\frac{a-b-1}{a-b+1}=\frac{3}{5}$$

정리하면

$b=a-4$

이므로 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는

$(a,\ a-4)$ 또는 $(a-4,\ a)$

이다. 두 경우 모두에 대하여

$\therefore\ |\alpha-\beta|=4$

답 ④

[풀이3]

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^2+bx+c$ $\cdots(*)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}=f(a)$ $\cdots$㉠

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}\times\{f(x)+(x-a)\}$$

$=\frac{3}{5}\times f(a)$ $\cdots$㉡

㉠=㉡: $f(a)=\frac{3}{5}\times f(a)$

풀면 $f(a)=0$이므로

$f(a)=a^2+ab+c=0$ 즉, $c=-a^2-ab$

이를 (*)에 대입하여 정리하면

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-a)(x+a+b)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a+b-1)}{(x-a)(x+a+b+1)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x+a+b-1}{x+a+b+1}=\frac{2a+b-1}{2a+b+1}=\frac{3}{5}$$

정리하면

$b=4-2a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-a)(x-a+4)$

이므로 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는

$(a,\ a-4)$ 또는 $(a-4,\ a)$

이다. 두 경우 모두에 대하여

$\therefore\ |\alpha-\beta|=4$

답 ④

[풀이4] 시험장

$x\to a$일 때,

$$\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}\to\frac{f(a)}{f(a)}\to\frac{3}{5}\neq 1$$

이므로 $f(a)=0$ $\cdots$㉠

($\because f(a)\neq 0$이라고 하면 $\frac{f(a)}{f(a)}\to 1$이기 때문이다.)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+1}$$

$=\frac{f'(a)-1}{f'(a)+1}=\frac{3}{5}$에서 $f'(a)=4$ $\cdots$㉡

㉠에 의하여

$f(x)=(x-a)(x-b)$

$f'(x)=2x-a-b$에서

$f'(a)=a-b=4(\because$ ㉡$)$

$\therefore\ \alpha-\beta=|a-b|=4$

답 ④

D031 | 답 ②

[풀이1]

함수 $f(x)$를 3차함수로 가정하자.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$\frac{f(x)}{x^2}=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}$이므로

$a>0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\infty$이고,

$a<0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=-\infty$이다.

이는 가정에 모순이므로 $f(x)$는 3차함수가 아니다.

함수 $f(x)$를 4차이상의 함수로 가정했을 때에도

동일한 모순이 발생한다.

따라서 $f(x)$는 1차 또는 2차함수이다.

함수 $f(x)$가 1차함수라고 가정하자.

$f(x)=ax+b(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)=0\neq 2$$

이는 가정에 모순이므로 $f(x)$는 2차함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a=2$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+bx+c$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2x+b+\frac{c}{x}\right)=3$$

그런데 $\lim_{x\to 0}(2x+b)=b$이므로

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{c}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2x+b+\frac{c}{x}\right)-\lim_{x\to 0}(2x+b)$$

$=3-b$ $\cdots$ ㉠

이때,

$c>0$이면 $\lim_{x\to 0+}\frac{c}{x}=\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{c}{x}=-\infty$,

$c<0$이면 $\lim_{x\to 0+}\frac{c}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{c}{x}=\infty$

이므로 $c=0$이다.

이를 ㉠에 대입하면 $b=3$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+3x$

$\therefore\ f(2)=14$

답 ②

[참고1]

함수 $f(x)$가 2차함수임을 엄밀하게 증명하면 다음과 같다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

으로 두자. (단, $a_n\neq 0$)

$n\geq 3$이라고 가정하자.

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(a_nx^{n-2}+\frac{a_{n-1}}{x^{3-n}}+\cdots+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}\right)$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_{n-1}}{x^{3-n}}+\cdots+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}\right)$은 수렴하고,

$\lim_{x\to\infty}a_nx^{n-2}=\infty\ (a_n>0$인 경우$)$,

$\lim_{x\to\infty}a_nx^{n-2}=-\infty\ (a_n<0$인 경우$)$

이므로, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$은 발산한다.

이는 가정에 모순이므로 $n=1$ 또는 $n=2$이다.

$n=1$이라고 가정하자.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=ax+b(a\neq 0)$

으로 두면, 조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)=0\neq 2$$

이는 가정에 모순이므로 $n=2$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 2차함수이다.

[참고2]

다음과 같은 빠른 풀이도 가능하다.

조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

조건 (나)에서 주어진 등식의 좌변을 변형하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=3$$

에서 $f(0)=0$, $f'(0)=3$임을 알 수 있다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=2x^2+ax+b$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x+a$

$f(0)=b=0$, $f'(0)=a=3$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+3x$

$\therefore\ f(2)=14$

[풀이2] 시험장

(가) $\Rightarrow f(x)=2x^2+\cdots$

(나) $\Rightarrow f(x)=\cdots+3x$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^2+3x$

$\therefore\ f(2)=14$

답 ②

D032 | 답 30

[풀이1]

$(x+1)f(x)=g(x)$로 치환하면

$\lim_{x\to 1}g(x)=1$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$a=\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=\lim_{x\to1}g(x)\times\frac{2x^2+1}{x+1}$

$=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 20a=30$

답 30

[풀이2]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$a=\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)$

$=\lim_{x\to1}(x+1)f(x)\times\frac{2x^2+1}{x+1}$

$=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 20a=30$

답 30

[풀이3] 시험장

※ 함수 $f(x)$가 연속이라는 조건이 있다면 다음과 같은 풀이도 가능하다.

함수 $f(x)$가 연속이므로

$\lim_{x\to1}(x+1)f(x)=2f(1)=1$에서 $f(1)=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=3f(1)=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 20a=30$

답 30

D033 | 답 ③

[풀이]

우선 문제에서 주어진 왼쪽 등식을 생각하자.

$n=1$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$

이므로

$f(x)-4x^3+3x^2=6x^2+\cdots$

즉, $f(x)=4x^3+3x^2+\cdots$

$n=2$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$

이므로

$f(x)-4x^3+3x^2=6x^3+\cdots$

즉, $f(x)=10x^3+\cdots$

$n\geq3$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^{n+1}+\cdots}{x^{n+1}+1}=6$

이므로

$f(x)-4x^3+3x^2=6x^{n+1}+\cdots$

즉, $f(x)=6x^{n+1}+\cdots$

정리하면

$n=1$일 때, $f(x)=4x^3+3x^2+\cdots$

$n=2$일 때, $f(x)=10x^3+\cdots$

$n\geq3$일 때, $f(x)=6x^{n+1}+\cdots$

이제 문제에서 주어진 오른쪽 등식을 생각하자.

$n=1$일 때,

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{4x^3+3x^2+\cdots}{x}=4$

이므로 $f(x)=4x^3+3x^2+4x$

$n=2$일 때,

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{10x^3+\cdots}{x^2}=4$

이므로 $f(x)=10x^3+4x^2$

$n\geq3$일 때,

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{6x^{n+1}+\cdots}{x^n}=4$

이므로 $f(x)=6x^{n+1}+4x^n$

이상에서

$f(1)=\begin{cases}11 & (n=1)\\ 14 & (n=2)\\ 10 & (n\geq3)\end{cases}$

따라서 $f(1)$의 최댓값은 14이다.

답 ③

D034 | 답 ③

[풀이1]

$f(x)g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

(단, $a_n\neq0$, a_{n-1}, $\cdots$, a_0은 모두 정수)

으로 두자.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=\begin{cases}\pm\infty & (n\ge 4)\\ a_n & (n=3)\\ 0 & (n\le 2)\end{cases}$$

이므로 조건 (가)에 의하여

$n=3,\ a_n=2$ ⋯㉠

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(a_nx^{n-2}+\ \cdots\ +a_3x+a_2+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}\right)$$

가 -4에 수렴하려면 (조건(나))

$a_1=a_0=0,\ a_2=-4$ ⋯㉡

이어야 한다.

㉠, ㉡에 의하여

함수 $f(x)g(x)$의 방정식은

$f(x)g(x)=2x^3-4x^2$

$=2x^2(x-2)=x^2(2x-4)$

$=2x(x^2-2x)=x(2x^2-4x)$

$f(x)$가 $2x^2$이면 $f(2)$는 최댓값 8을 갖는다.

답 ③

[풀이2] 시험장

(가) $\Rightarrow f(x)g(x)=2x^3+\ \cdots$

(나) $\Rightarrow f(x)g(x)=\ \cdots\ -4x^2$

$f(x)g(x)=2x^3-4x^2$

$=2x^2(x-2)=x^2(2x-4)$

$=2x(x^2-2x)=x(2x^2-4x)$

$f(x)$가 $2x^2$이면 $f(2)$는 최댓값 8을 갖는다.

답 ③

D035 | 답 ②

[풀이1]

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1\ \Rightarrow f(0)=0$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1\ \Rightarrow f(1)=0$

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (단, $a\neq 0$)

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)(ax+b)$

$=-b=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x(ax+b)=a+b=1$

연립방정식을 풀면

$a=2,\ b=-1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x(x-1)(2x-1)$

$\therefore\ f(2)=6$

답 ②

[풀이2]

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

$\Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

$\Rightarrow f(1)=0,\ f'(1)=1$

인수정리에 의하여

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (단, $a\neq 0$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(x-1)(ax+b)+x(ax+b)+ax(x-1)$

$f'(0)=-b=1$

$f'(1)=a+b=1,\ a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x(x-1)(2x-1)$

$\therefore\ f(2)=6$

답 ②

[풀이3]

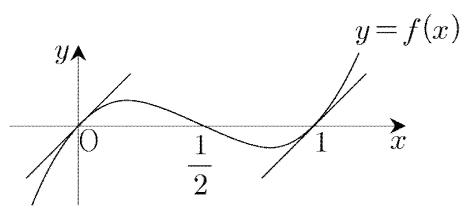
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

$\Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

$\Rightarrow f(1)=0,\ f'(1)=1$

함수 $f(x)$의 그래프는



모든 삼차함수는 점대칭이므로 위의 그림처럼 함수 $f(x)$는 점 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=kx(x-1)(2x-1)$ (단, $k\neq 0$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=k(x-1)(2x-1)+kx(2x-1)+2kx(x-1)$

$f'(0)=k=1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x(x-1)(2x-1)$

$\therefore\ f(2)=6$

답 ②

D036 | 답 ⑤

[풀이1]

• (1) $k=1$인 경우

구간 $[-1,\ 3]$에서 두 함수 $f(x)$와 $g_1(x)$는 모두 연속이다.

연속함수의 성질에 의하여

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_1(x)$는 연속이다.

• (2) $k=2$인 경우

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고,

구간 $[-1,\ 0),\ (0,\ 3]$에서 함수 $g_2(x)$가 연속이다.

연속함수의 성질에 의하여

구간 $[-1,\ 0),\ (0,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_2(x)$는 연속이다.

$x=0$에서의 함수 $f(x)g_2(x)$의 함숫값은

$f(0)g_2(0)=0\times 2=0$

$x=0$에서의 함수 $f(x)g_2(x)$의 극한값은

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)g_2(x)=0\times 3=0$

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)g_2(x)=0\times 1=0$

즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g_2(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)g_2(x)=0=f(0)g_2(0)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여 함수 $f(x)g_2(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_2(x)$는 연속이다.

• (3) $k=3$인 경우

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고,

구간 $[-1,\ 2),\ (2,\ 3]$에서 함수 $g_3(x)$가 연속이다.

연속함수의 성질에 의하여

구간 $[-1,\ 2),\ (2,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_3(x)$는 연속이다.

$x=2$에서의 함수 $f(x)g_3(x)$의 함숫값은

$f(2)g_3(2)=0\times 0=0$

$x=2$에서의 함수 $f(x)g_3(x)$의 극한값은

$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)g_3(x)=0\times 0=0$

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)g_3(x)=0\times 1=0$

즉, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)g_3(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)g_3(x)=0=f(2)g_3(2)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여 함수 $f(x)g_3(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

따라서 구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_3(x)$는 연속이다.

이상에서 구하는 함수는 $g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x)$이다.

답 ⑤

[풀이2] 시험장

• $k=1$인 경우

구간 $[-1,\ 3]$에서 두 함수 $f(x)$와 $g_1(x)$는 모두 연속이다.

연속함수의 성질에 의하여

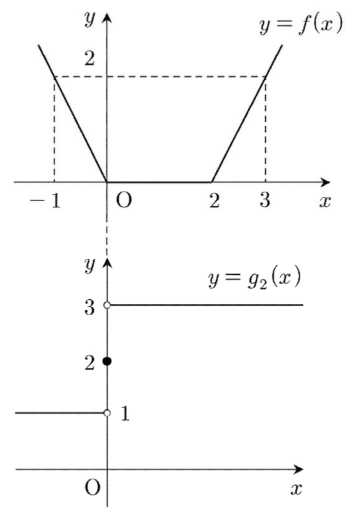
구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)g_1(x)$는 연속이다.

• $k=2$인 경우

함수 $g_2(x)$는 $x=0$에서 불연속이지만

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $f(0)=0$이므로

함수 $f(x)g_2(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

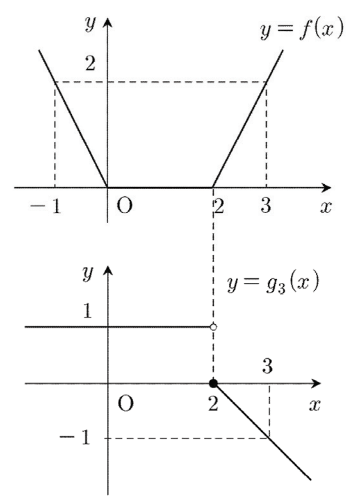


• $k=3$인 경우

함수 $g_3(x)$는 $x=2$에서 불연속이지만

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이고 $f(2)=0$이므로

함수 $f(x)g_3(x)$는 $x=2$에서 연속이다.



이상에서 구하는 함수는 $g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x)$이다.

답 ⑤

D037 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

$x \to 3+$일 때, 함수 $f(x)$는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 수렴하므로

$\lim_{x \to 3+} f(x) = 0$

$x \to 3-$일 때, 함수 $f(x)$는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 수렴하므로

$\lim_{x \to 3-} f(x) = 0$

$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = 0$

▸ ㄴ. (참)

$x \to 1+$일 때, 함수 $f(x)$는 2의 값을 가지면서 2에 수렴하므로

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

$x \to 1-$일 때, 함수 $f(x)$는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 수렴하므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1-} f(x) \neq \lim_{x \to 1+} f(x)$

따라서 $x=1$에서 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다.

▸ ㄷ. (참)

보기 ㄴ에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$\lim_{x \to 2-} f(x) = 2 \neq 1 = \lim_{x \to 2+} f(x)$

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

$\lim_{x \to 3} f(x) = 0 \neq 1 = f(3)$

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

함수 $f(x)$의 불연속점의 개수는 3이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

D038 | 답 ①

[풀이] ★

▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

두 함수를 다음과 같이 두자.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty$이지만

함수의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{x \to 0} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$

▸ ㄴ. (참)

$g(x) = |x|$로 두면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이고,

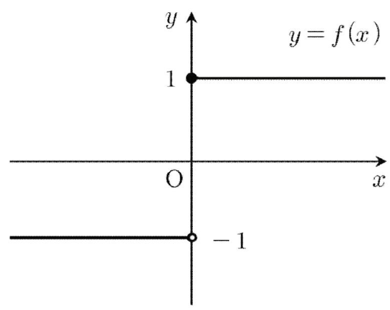
함수 $g(x)$가 $x=f(0)$에서 연속이므로

함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$으로 두자.



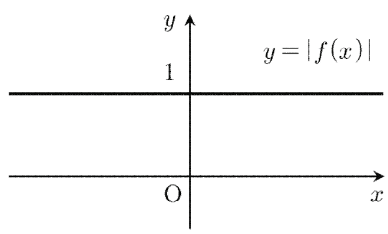
$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0+} f(x)$

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

실수 전체의 집합에서

$|f(x)| = 1$



$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 1 = |f(0)|$

함수의 연속의 정의에 의하여

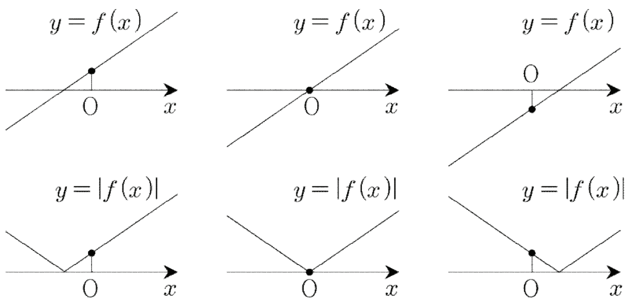
함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ①

[참고]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 그림을 이용하여 보일 수도 있다.



위의 그림에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 함수 $|f(x)|$도 $x=0$에서 연속임을 알 수 있다.

위의 내용이 옳음을 수식으로 보이면 다음과 같다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

이때, $f(0)=\alpha$로 두자.(단, α는 상수)

$\alpha>0$일 때, $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\alpha=|f(0)|$

$\alpha=0$일 때, $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0=|f(0)|$

$\alpha<0$일 때, $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=-\alpha=|f(0)|$

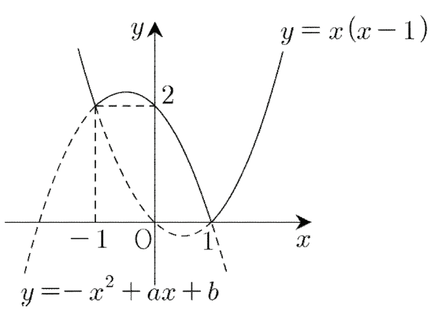
이상에서 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=|f(0)|$이다.

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

D039 ㅣ답 ①

[풀이1]



함수 $f(x)$가 연속이다.

$\Leftrightarrow$

곡선 $y=-x^2+ax+b$가 두 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 0)$을 지난다.

$2=-1-a+b$, $0=-1+a+b$

연립방정식을 풀면

$a=-1$, $b=2$

$\therefore\ a-b=-3$

답 ①

[풀이2]

다항함수 $y=x(x-1)$이 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$, $(1,\ \infty)$에서 연속이다.

다항함수 $y=-x^2+ax+b$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-1,\ 1)$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+}(-x^2+ax+b)$

$=-1-a+b$

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-} x(x-1)=2$

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-} f(x)$

즉, $-1-a+b=2$

정리하면

$a-b=-3$ …㉠

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} x(x-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(-x^2+ax+b)$

$=-1+a+b$

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$

즉, $0=-1+a+b$

정리하면

$a+b=1$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=-1$, $b=2$ $\therefore$ $a-b=-3$

답 ①

D040 ㅣ답 ①

[풀이1]

• (1) $i=1$인 경우

함수 $g_1(x)$의 방정식은

$$g_1(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$h(x)=xg_1(x)$로 두자.

함수 $h(x)$의 방정식은

$$h(x)=\begin{cases}|x| & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

즉, $h(x)=|x|$

함수 $h(x)$의 $x=0$에서의 함숫값은

$h(0)=|0|=0$

함수 $h(x)$의 $x=0$에서의 극한값은

$$\lim_{x\to 0+} h(x)= \lim_{x\to 0+} x=0$$

$$\lim_{x\to 0-} h(x)= \lim_{x\to 0-} (-x)=0$$

즉, $\lim_{x\to 0} h(x)=0$

$\lim_{x\to 0} h(x)=0=h(0)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_1=1$

• (2) $i=2$인 경우

함수 $g_2(x)$의 방정식은

$$g_2(x)=\begin{cases}-x^2+1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$h(x)=xg_2(x)$로 두자.

함수 $h(x)$의 방정식은

$$h(x)=\begin{cases}-x^3+x & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

즉, $h(x)=-x^3+x$

다항함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_2=1$

• (3) $i=3$인 경우

함수 $g_3(x)$의 방정식은

$$g_3(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$h_1(x)=xg_3(x)$로 두자.

함수 $h_1(x)$의 방정식은

$$h_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0+} h_1(x)=\infty$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $h_1(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

$h_2(x)=x^2g_3(x)$로 두자.

함수 $h_2(x)$의 방정식은

$$h_2(x)=\begin{cases}1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

함수 $h_2(x)$의 $x=0$에서의 함숫값은

$h_2(0)=0$

함수 $h_2(x)$의 $x=0$에서의 극한값은

$\lim_{x\to 0} h_2(x)=1$

$\lim_{x\to 0} h_2(x)\neq h_2(0)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $h_2(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

$h_3(x)=x^3g_3(x)$로 두자.

함수 $h_3(x)$의 방정식은

$$h_3(x)=\begin{cases}x & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

즉, $h_3(x)=x$

다항함수 $h_3(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_3=3$

(1), (2), (3)에서 $a_1=a_2<a_3$이다.

답 ①

[풀이2] 시험장

• (1) $i=1$, $i=2$인 경우

함수 $g_1(x)(g_2(x))$는 $x=0$에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 존재하지만 불연속이다.

곡선 $y=x$는 $x=0$에서 연속이고, 원점을 지나므로

함수 $x\times g_1(x)(x\times g_2(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_1=N(g_1)=1$, $a_2=N(g_2)=1$

• (2) $i=3$인 경우

함수 $x^2g_3(x)=\begin{cases}1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$는 $x=0$에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 존재하지만 불연속이다.

곡선 $y=x$는 $x=0$에서 연속이고, 원점을 지나므로

함수 $x\times x^2g_3(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_3=N(g_3)=3$

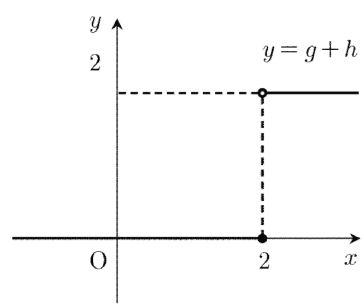
$\therefore\ a_1=a_2<a_3$

답 ①

D041 | 답 ②

[풀이]

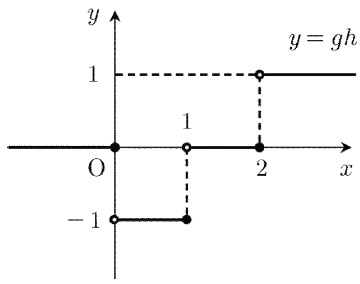
함수 $g+h$의 그래프는



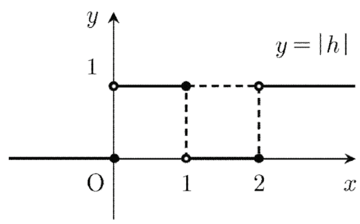
$\lim_{x\to 2-}\{g(x)+h(x)\}=0$이고,

$\lim_{x\to 2+}\{g(x)+h(x)\}=2$이므로

함수의 극한의 정의에 의하여
함수 $g+h$는 $x=2$에서 극한값을 갖지 않는다.
함수의 연속의 정의에 의하여
함수 $g+h$는 $x=2$에서 불연속이다.
$\therefore\ a_1=1$
함수 gh의 그래프는



위와 마찬가지의 방법으로
함수 gh는 $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 불연속이다.
$\therefore\ a_2=3$
함수 $|h|$의 그래프는



위와 마찬가지의 방법으로
함수 $|h|$는 $x=0$, $x=1$, $x=2$에서 불연속이다.
$\therefore\ a_3=3$
이상에서 $a_1<a_2=a_3$이다.
답 ②

D042 | 답 ③

[풀이]
▸ ㄱ. (연속)
함수 $f(x)g(x)$의 방정식은

$$f(x)g(x)=\begin{cases}-\dfrac{(x-1)^3}{x} & (0<x\le 1)\\ -(x-1)(x-2) & (1<x<2)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 함숫값은

$$f(1)g(1)=-\frac{(1-1)^3}{1}=0$$

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 극한값은

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}-(x-1)(x-2)=0$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}-\frac{(x-1)^3}{x}=0$$

$$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$$

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0=f(1)g(1)$이므로
함수의 연속에 대한 정의에 의하여
함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
▸ ㄴ. (불연속)
함수 $f(x)g(x)$의 방정식은

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{-(x-1)^4+1-x}{x} & (0<x\le 1)\\ \dfrac{(2-x)(x-1)^3+2-x}{x-1} & (1<x<2)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 함숫값은

$$f(1)g(1)=\frac{-(1-1)^4+1-1}{1}=0$$

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 극한은

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{(2-x)(x-1)^3+2-x}{x-1}=\infty$$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)$가 발산하므로
함수의 연속의 정의에 의하여
함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
▸ ㄷ. (연속)
함수 $f(x)g(x)$의 방정식은

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)(x^2+1)}{x} & (0<x\le 1)\\ (2-x)(x-1)^2 & (1<x<2)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 함숫값은

$$f(1)g(1)=\frac{(1-1)(1^2+1)}{1}=0$$

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 극한값은

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}(2-x)(x-1)^2=0$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}\frac{(1-x)(x^2+1)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$$

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0=f(1)g(1)$이므로
함수의 연속의 정의에 의하여
함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
이상에서 구하는 함수 $g(x)$는 ㄱ, ㄷ이다.
답 ③

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2022 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2022 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통 〉

- 공통 1 : 문제를 보자마자 a^2-b^2이 떠올라야 함. 1번부터 '이 시험은 교과서/기출문제를 풀었던 기억으로 푼다.' 를 의도적으로 말하고 있음. 즉, '정해진 풀이를 따르지 않으면 망한다.' 를 노골적으로 표현.
- 공통 8 : 이차함수의 정적분 → 대칭축을 생각한다.
- 공통 13 : 그림을 그릴 수 없으니, 처음부터 끝까지 계산. 로그문제에서 a^b이 나오면 $\log a^b = b\log a$ 생각이 들어야.
- 공통 14 : x축에서 점 P를 움직이는게 우선.
- 공통 15 : 역대 평가원 기출 중에서 " 코사인법칙에 의하여 " 란 문구가 등장한 첫 번째 문제. 어떤 공식을 써야 하는지 알려 주었는데. 어려운 문제일리 없다. 읽는데 4점.
- 공통 21 : $2+2^2+2^3<2^4$과 같은 계산을 해보았는가? '기하급수적으로 빨라진다.' 의 의미를 아는가를 평가.
- 공통 22 : $f(1)=f(4)$에서 $f(x)$의 그래프의 개형이 바로 나와야 함. 삼차함수의 비율관계.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 28 : 분할, 여사건 모두 가능. 이 문제 보다 경우 구분이 많은 함수 개수 세는 문제는 기출에 널려있음.
- 확률과 통계 29 : 적분 기호 쓰면 좀 더 편하긴 한데, $y=k$ 그리면 더 단순하게 해결 가능.
- 확률과 통계 30 : 답을 맞히기 상당히 어려운, 실수하기 딱 좋은 문제. 수형도 그냥 다 그리는 편이 나음.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 : 평행이동/대칭성 & 기출을 풀었던 경험. 풀이 중간 과정에서 답을 바로 알 수 있음.
- 미적분 29 : 계산이 복잡하니. 극한의 근사적 계산으로 접근하면 실수 없이 빠르게 계산 가능.
- 미적분 30 : (나)의 항등식에 $x=1,\ 2,\ 4$ 대입하여 점찍고, 확대해서 그리면 끝. 역함수의 정적분 계산 말고, 그림으로 해결.

〈 기하 〉

- 기하 26 : 동일하게 쌍곡선으로 수능에 출제된 적이 있음. 원 밖의 점에서 접선 2개 그으면 합동인 직각삼각형 2개 찾는다.
- 기하 28 : 빗변 주면, 직각삼각형 그리고, 기울기 없으니, 피타 쓰고, 포물선의 정의대로 선분 그으면 직각 안에 수선 그려지니 닮음 쓰고.
- 기하 29 : 문제에서 원 위의 점 주었으니. (나)는 직선(선분)일 수밖에. 이 유형의 문제 중에서도 중급 수준.
- 기하 30 : 평가원 기출 중, 구/직선 정사영 내려서 점의 이동 관찰하는 문제의 확장판. 풀다보면 이면각 보다는 정사영이 좀 더 편하긴 하지만, 이면각의 정의에 의한 풀이도 계산이 거의 없음. 기존 공도 기출과 비교하여 중급 수준.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정		
1991	실험평가(1차)	1990년 12월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월
1995	대학수학능력	1994년 11월
1996	대학수학능력	1995년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월
1998	대학수학능력	1997년 11월
6차 교육과정		
1999	대학수학능력	1998년 11월
2000	대학수학능력	1999년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월
2002	대학수학능력	2001년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월
7차 교육과정		
2005	예비시행	2003년 12월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월
2005	대학수학능력	2004년 11월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월
2006	대학수학능력	2005년 11월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월
2009	모의평가(9월)	2008년 9월
2009	대학수학능력	2008년 11월
2010	모의평가(6월)	2009년 6월
2010	모의평가(9월)	2009년 9월
2010	대학수학능력	2009년 11월
2011	모의평가(6월)	2010년 6월
2011	모의평가(9월)	2010년 9월
2011	대학수학능력	2010년 11월
2007개정 교육과정		
2012	모의평가(6월)	2011년 6월
2012	모의평가(9월)	2011년 9월
2012	대학수학능력	2011년 11월
2014	예비시행	2012년 5월
2013	모의평가(6월)	2012년 6월
2013	모의평가(9월)	2012년 9월
2013	대학수학능력	2012년 11월
2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2014	대학수학능력	2013년 11월
2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2015	대학수학능력	2014년 11월
2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2016	대학수학능력	2015년 11월
2009개정 교육과정		
2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2017	대학수학능력	2016년 11월
2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2018	대학수학능력	2017년 11월
2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2019	대학수학능력	2018년 11월
2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2020	대학수학능력	2019년 11월
2015개정 교육과정		
2021	예시문항	2020년 5월
2021	모의평가(6월)	2020년 6월
2021	모의평가(9월)	2020년 9월
2021	대학수학능력	2020년 11월
2022	모의평가(6월)	2021년 6월
2022	모의평가(9월)	2021년 9월
2022	대학수학능력	2021년 11월

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다. 그리고 모든 풀이를 보여준다는 의미에서 교육과정 외의 풀이도 수록하였으나, 이를 반드시 읽어야(공부해야) 하는 것은 아닙니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)
[풀이] (교육과정 외)
[참고] (교육과정 외)

목 차

확률과 통계

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

○ 순열, 조합, 분할(정수/자연수) 관련 문제 모두 제외

J 경우의 수

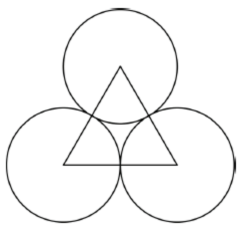
- 2015개정 교육과정

○ 순열, 조합, 분할(정수/자연수) 관련 문제 모두 제외

J. 원순열

J001
○○○
(2012(6)-가형15)

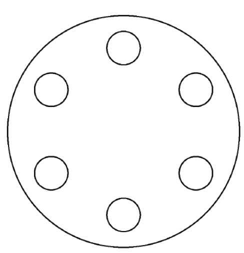
그림과 같이 서로 접하고 크기가 같은 원 3개와 이 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정삼각형이 있다. 원의 내부 또는 정삼각형의 내부에 만들어지는 7개의 영역에 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



① 1260　② 1680　③ 2520
④ 3760　⑤ 5040

J002
○
(2012(9)-가형6)

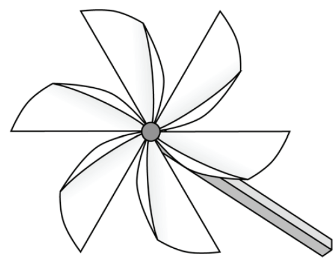
그림과 같이 최대 6개의 용기를 넣을 수 있는 원형의 실험 기구가 있다. 서로 다른 6개의 용기 A, B, C, D, E, F를 이 실험 기구에 모두 넣을 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 36　② 48　③ 60
④ 72　⑤ 84

J003
○
(2014(예비)-B형6)

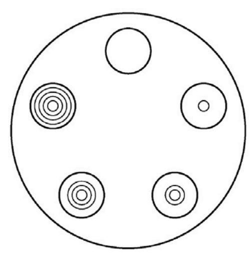
빨간색과 파란색을 포함한 서로 다른 6가지의 색을 모두 사용하여, 날개가 6개인 바람개비의 각 날개에 색칠하려고 한다. 빨간색과 파란색을 서로 맞은편의 날개에 칠하는 경우의 수는? (단, 각 날개에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 12　② 18　③ 24
④ 30　⑤ 36

J004
○
(2018(9)-나형6)

서로 다른 5개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

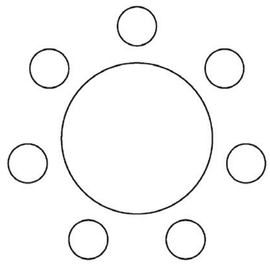


① 6　② 12　③ 18
④ 24　⑤ 30

J005

○○
(2021(6)-가형8/나형12)

1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

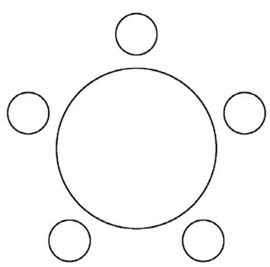


① 96 ② 100 ③ 104
④ 108 ⑤ 112

J006

○○
(2021(9)-가형9/나형14)

다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



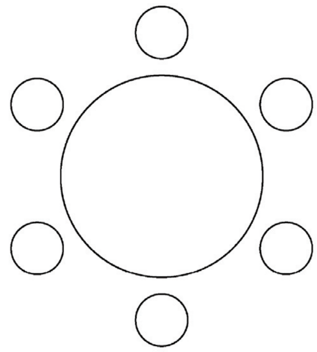
① 180 ② 200 ③ 220
④ 240 ⑤ 260

J007

○○
(2021-가형26/나형15)

세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉을 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

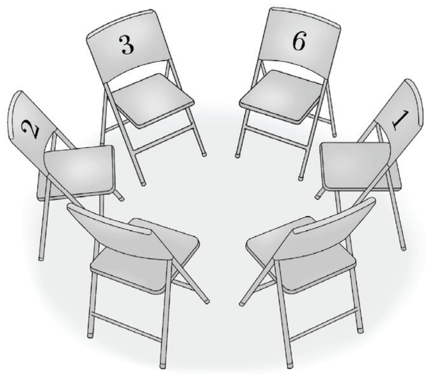
(가) A와 B는 이웃한다. (나) B와 C는 이웃하지 않는다.



J008

○○○
(2022(6)–확률과통계29)

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



J. 중복순열

J009

○○
(2001–인문28/자연28)

문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 세 개를 택하여 만든 단어를 전송하려고 한다. 단, 전송되는 단어에 a가 연속되면 수신이 불가능하다고 하자. 예를 들면 aab, aaa 등은 수신이 불가능하고 bba, aba 등은 수신이 가능하다. 수신 가능한 단어의 개수를 구하시오. [2점]

J010

○○
(2005(예비)–가형21/나형21)

세 주사위 A, B, C를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수를 구하시오. [3점]

J011

○○ (2004-인문14/자연14)

세 숫자 1, 2, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 때, 1과 2가 모두 포함되어 있는 자연수의 개수는? [3점]

① 58 ② 56 ③ 54
④ 52 ⑤ 50

J012

○○ (2005-가형28이산수학)

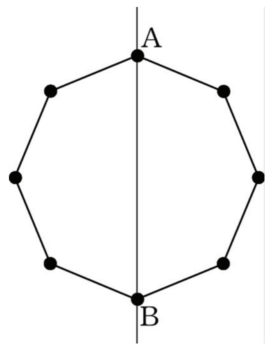
집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 서로소인 두 부분집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는? [3점]

① 729 ② 720 ③ 243
④ 64 ⑤ 36

J013

○○ (2006(6)-가형27이산수학)

정팔각형의 모든 꼭짓점에 숫자 0 또는 1을 지정하려고 한다. 오른쪽 그림과 같이 고정된 두 꼭짓점 A와 B를 잇는 직선에 대하여 대칭인 점에 같은 숫자를 지정하는 경우의 수는? [3점]



① 16 ② 32 ③ 48
④ 64 ⑤ 80

J014

○○ (2007-가형14/나형14)

1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적힌 5개의 공을 3개의 상자 A, B, C에 넣으려고 한다. 어느 상자에도 넣어진 공에 적힌 수의 합이 13 이상이 되는 경우가 없도록 공을 상자에 넣는 방법의 수는? (단, 빈 상자의 경우에는 넣어진 공에 적힌 수의 합을 0으로 한다.) [4점]

① 233 ② 228 ③ 222
④ 215 ⑤ 211

J015

○○ (2011-가형6/나형6)

어느 행사장에는 현수막을 1개씩 설치할 수 있는 장소가 5곳이 있다. 현수막은 A, B, C 세 종류가 있고, A는 1개, B는 4개, C는 2개가 있다. 다음 조건을 만족시키도록 현수막 5개를 택하여 5곳에 설치할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 현수막끼리는 구분하지 않는다.) [3점]

(가) A는 반드시 설치한다. (나) B는 2곳 이상 설치한다.

① 55 ② 65 ③ 75
④ 85 ⑤ 95

J016

○ (2016(6)-B형9)

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 1024 ② 1034 ③ 1044
④ 1054 ⑤ 1064

J017

○○ (2017(9)-가형19)

서로 다른 과일 5개를 3개의 그릇 A, B, C에 남김없이 담으려고 할 때, 그릇 A에는 과일 2개만 담는 경우의 수는? (단, 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있다.) [4점]

① 60 ② 65 ③ 70
④ 75 ⑤ 80

J018

○ (2017-가형5)

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우의 수는? [3점]

① 115 ② 120 ③ 125
④ 130 ⑤ 135

J019

○○○
(2018−가형18)

서로 다른 공 4개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣으려고 할 때, 넣은 공의 개수가 1인 상자가 있도록 넣는 경우의 수는? (단, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.) [4점]

① 220 ② 216 ③ 212
④ 208 ⑤ 204

J020

○○
(2019(6)−가형27)

세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 문자 a가 두 번 이상 나오는 경우의 수를 구하시오. [4점]

J021

●●●
(2022(예시문항)−확률과통계27)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f:\ X \to X$의 개수는? [3점]

(가) $f(1)+f(2)+f(3) \geq 3f(4)$
(나) $k=1,\ 2,\ 3$일 때 $f(k) \neq f(4)$이다.

① 41 ② 45 ③ 49
④ 53 ⑤ 57

J022

○○○
(2022(9)-확률과통계28)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(3)+f(4)$는 5의 배수이다.
(나) $f(1)<f(3)$이고 $f(2)<f(3)$이다.
(다) $f(4)<f(5)$이고 $f(4)<f(6)$이다.

① 384　② 394　③ 404　④ 414　⑤ 424

J023

●●●
(2022-확률과통계28)

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
$f(x) \geq \sqrt{x}$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128　② 138　③ 148　④ 158　⑤ 168

J. 같은 것이 있는 순열

J024

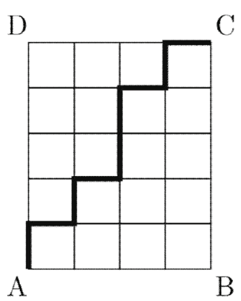
○○
(2005(6)−나형30)

7개의 문자 a, a, b, b, c, d, e를 일렬로 나열할 때, a끼리 또는 b끼리 이웃하게 되는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]

J025

○○
(2005(9)−나형22)

그림과 같은 바둑판 모양의 도로망이 있다. 갑은 A에서 C까지 굵은 선을 따라 걷고, 을은 C에서 A까지 굵은 선을 따라 걸으며, 병은 B에서 D까지 도로를 따라 최단거리로 걷는다. 갑, 을, 병 세 사람이 모두 만나도록 병이 B에서 D까지 가는 경우의 수를 구하시오. (단, 갑, 을, 병은 동시에 출발하고 같은 속력으로 걷는다고 가정한다.) [4점]



J026

○○
(2005−나형30)

1, 2, 2, 4, 5, 5를 일렬로 배열하여 여섯 자리 자연수를 만들 때, 300000보다 큰 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

J027

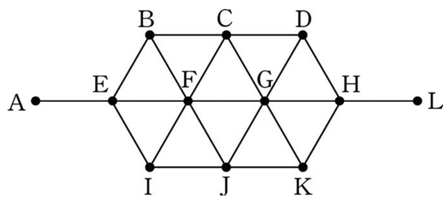
○○○
(2006(6)−나형30)

어느 건물에서는 출입을 통제하기 위하여 각 자리가 '0'과 '1'로 이루어진 8자리 문자열의 보안카드를 이용하고 있다. 보안카드의 8자리 문자열에 '1'의 개수가 5개이거나 문자열의 처음 4자리가 '0110'이면 이 건물의 출입문을 통과할 수 있다. 예를 들어, 보안카드의 문자열이 '10110011'이거나 '01100101'이면 이 건물에 출입할 수 있다. 이 건물의 출입문을 통과할 수 있는 서로 다른 보안카드의 총 개수를 구하시오. [4점]

J028

○○
(2007(9)–가형30이산수학)

그림은 지점 A부터 지점 L까지 12개의 지점을 연결한 것이다.

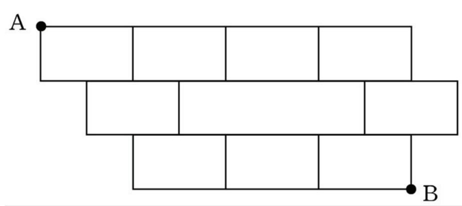


지점 A에서 출발하여 5개의 지점을 거쳐 지점 L에 도착하는 방법의 수를 구하시오. [4점]

J029

○○○
(2008(9)–가형12/나형12)

그림과 같은 모양의 도로망이 있다. 지점 A에서 지점 B까지 도로를 따라 최단 거리로 가는 경우의 수는? (단, 가로 방향 도로와 세로 방향 도로는 각각 서로 평행하다.) [4점]



① 14　　② 16　　③ 18
④ 20　　⑤ 22

J030

○○○
(2009(6)–나형30)

$\frac{4}{4}$박자는 4분음을 한 박으로 하여 한 마디가 네 박으로 구성된다. 예를 들어 $\frac{4}{4}$박자 한 마디는 4분 음표(♩) 또는 8분 음표(♪)만을 사용하여 ♩♩♩♩ 또는 ♪♩♪♩♩와 같이 구성할 수 있다. 4분 음표 또는 8분 음표만 사용하여 $\frac{4}{4}$박자의 한 마디를 구성하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

J031

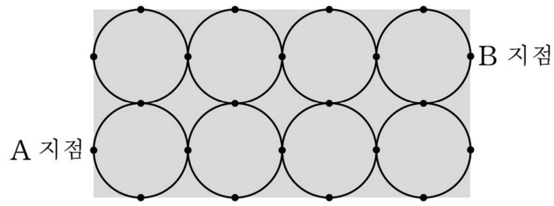
(2009(6)−가형30확률통계)

A, B 두 사람이 하루에 한 번씩 탁구 경기를 하기로 하였다. 첫 경기부터 A가 이긴 횟수가 B가 이긴 횟수보다 항상 많거나 같도록 유지되면서 경기가 진행될 때, 처음 7일 동안 경기를 치른 결과, A가 네 번 이기고 B가 세 번 이기는 경우의 수를 구하시오. [4점]

J032

(2009−나형25)

직사각형 모양의 잔디밭에 산책로가 만들어져 있다. 이 산책로는 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 원 8개가 서로 외접하고 있는 형태이다.



A 지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수를 구하시오. (단, 원 위에 표시된 점은 원과 직사각형 또는 원과 원의 접점을 나타낸다.) [4점]

J033

●●● (2010(6)-가형25/나형25)

좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x,\ y)\,|\,x$와 y는 정수$\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

> 점 P에서 한 번의 '점프'로 점 Q로 이동할 때,
> 선분 PQ의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$이다.

점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$에서 점 $\mathrm{B}(2,\ 0)$까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우의 수를 구하시오. (단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.) [4점]

J034

○○○ (2010(9)-나형30)

다음 표와 같이 3개의 과목에 각각 2개의 수준으로 구성된 6개의 과제가 있다. 각 과목의 과제는 수준 I의 과제를 제출한 후에만 수준 II의 과제를 제출할 수 있다.

예를 들어 '국어A → 수학 A → 국어 B → 영어 A → 영어 B → 수학 B'의 순서로 과제를 제출할 수 있다.

수준 \ 과목	국어	수학	영어
I	국어A	수학A	영어A
II	국어B	수학B	영어B

6개의 과제를 모두 제출할 때, 제출순서를 정하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

J035

○○ (2010-가형6/나형6)

어느 회사원이 처리해야 할 업무는 A, B를 포함하여 모두 6가지이다. 이 중에서 A, B를 포함한 4가지 업무를 오늘 처리하려고 하는데, A를 B보다 먼저 처리해야 한다. 오늘 처리할 업무를 택하고, 택한 업무의 처리 순서를 정하는 경우의 수는? [3점]

① 60 ② 66 ③ 72
④ 78 ⑤ 84

J036

○○○
(2011(6)-나형28)

1개의 본사와 5개의 지사로 이루어진 어느 회사의 본사로부터 각 지사까지의 거리가 표와 같다.

지사	가	나	다	라	마
거리(km)	50	50	100	150	200

본사에서 각 지사에 A, B, C, D, E를 지사장으로 각각 발령할 때, A보다 B가 본사로부터 거리가 먼 지사의 지사장이 되도록 5명을 발령하는 경우의 수는? [4점]

① 50 ② 52 ③ 54
④ 56 ⑤ 58

J037

○
(2012-가형5)

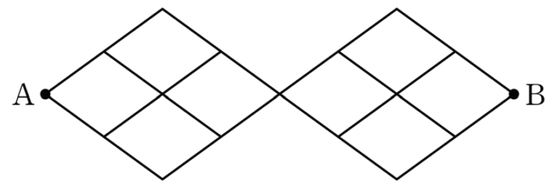
흰색 깃발 5개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 모두 나열할 때, 양 끝에 흰색 깃발이 놓이는 경우의 수는? (단, 같은 색 깃발끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 56 ② 63 ③ 70
④ 77 ⑤ 84

J038

○
(2013(9)-가형5)

그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]

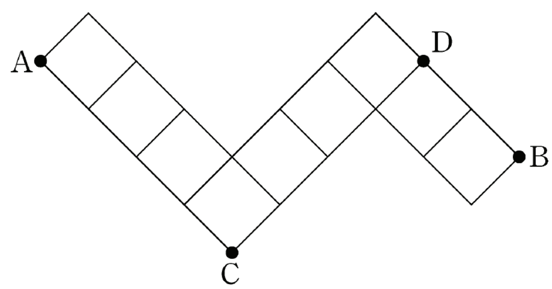


① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

J039

○○
(2013-가형5)

그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 C지점을 지나지 않고, D지점도 지나지 않으면서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 26 ② 24 ③ 22
④ 20 ⑤ 18

J040

○○
(2014(6)-B형5)

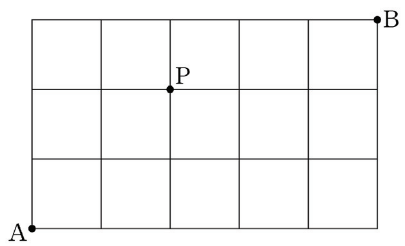
1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 2가 적혀 있는 카드는 4가 적혀 있는 카드보다 왼쪽에 나열하고 홀수가 적혀 있는 카드는 작은 수부터 크기 순서로 왼쪽부터 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 56 ② 60 ③ 64
④ 68 ⑤ 72

J041

○
(2018(6)-나형7)

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

J042

○○○
(2020-가형28/나형19)

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 다섯 개를 다음 조건을 만족시키도록 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 다섯 자리의 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 각각의 홀수는 선택하지 않거나 한 번만 선택한다.
(나) 각각의 짝수는 선택하지 않거나 두 번만 선택한다.

J043

○○○
(2022(6)-확률과통계28)

한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193
④ 196 ⑤ 199

J. 중복조합

J044

○○○
(2005-가형14/나형14)

여덟 개의 a와 네 개의 b를 모두 사용하여 만든 12자리 문자열 중에서 다음 조건을 모두 만족시키는 문자열의 개수는? [4점]

(가) b는 연속해서 나올 수 없다. (나) 첫째 자리 문자가 b이면 마지막 자리 문자는 a이다.

① 70 ② 105 ③ 140
④ 175 ⑤ 210

J045

○○
(2006(6)-가형30이산수학)

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$로의 함수 중에서 $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) \ge f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

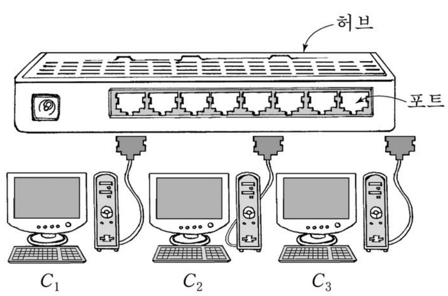
J046
○○○
(2006-가형30이산수학)

네 종류의 사탕 중에서 15개를 선택하려고 한다. 초콜릿사탕은 4개 이하, 박하사탕은 3개 이상, 딸기사탕은 2개 이상, 버터사탕은 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 사탕은 15개 이상씩 있다.) [4점]

J047
○○○
(2007(6)-가형30이산수학)

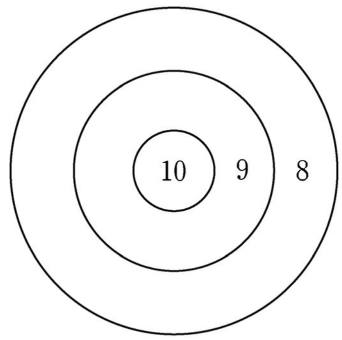
그림과 같이 8개의 포트를 가진 컴퓨터용 허브가 있다. 이 허브에 컴퓨터 C_1, C_2, C_3을 왼쪽부터 이 순서로 다음 조건을 만족시키도록 연결하는 방법의 수를 구하시오. [4점]

컴퓨터 C_k가 연결되는 포트와 컴퓨터 C_{k+1}이 연결되는 포트 사이에는 k개 이상의 포트가 비어 있다. (단, $k=1$, 2이다.)



J048
○○○
(2008(9)-가형28이산수학)

점수가 표시된 그림과 같은 과녁에 6개의 화살을 쏘아 점수를 얻는 경기가 있다. 6개의 화살을 모두 과녁에 맞혔을 때, 점수의 합계가 51점 이상이 되는 경우의 수는? (단, 화살이 과녁의 경계에 맞는 경우는 없다.) [3점]



① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

J049
○○
(2009(9)-가형27이산수학)

사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스 중에서 8병을 선택하려고 한다. 사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스를 각각 적어도 1병 이상씩 선택하는 경우의 수는? (단, 각 종류의 주스는 8병 이상씩 있다.) [3점]

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

J050
○○○
(2009-가형15/나형15)

어떤 사회봉사센터에서는 다음과 같은 4가지 봉사활동 프로그램을 매일 운영하고 있다.

프로그램	A	B	C	D
봉사활동 시간	1시간	2시간	3시간	4시간

철수는 이 사회봉사센터에서 5일간 매일 하나씩의 프로그램에 참여하여 다섯 번의 봉사활동 시간 합계가 8시간이 되도록 아래와 같은 봉사활동 계획서를 작성하려고 한다. 작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는? [4점]

봉사활동 계획서

성명 :

참여일	참여 프로그램	봉사활동 시간
2009. 1. 5		
2009. 1. 6		
2009. 1. 7		
2009. 1. 8		
2009. 1. 9		
봉사활동 시간 합계		8시간

① 47 ② 44 ③ 41
④ 38 ⑤ 35

J051
○○○
(2010(6)-가형30이산수학)

빨간색, 파란색, 노란색 색연필이 있다. 각 색의 색연필을 적어도 하나씩 포함하여 15개 이하의 색연필을 선택하는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 색의 색연필은 15개 이상씩 있고, 같은 색의 색연필은 서로 구별이 되지 않는다.) [4점]

J052
○○
(2010-가형27이산수학)

같은 종류의 사탕 5개를 3명의 아이에게 1개 이상씩 나누어 주고, 같은 종류의 초콜릿 5개를 1개의 사탕을 받은 아이에게만 1개 이상씩 나누어 주려고 한다. 사탕과 초콜릿을 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? [3점]

① 27 ② 24 ③ 21
④ 18 ⑤ 15

J053

○○
(2011(6)−나형30)

0을 한 개 이하 사용하여 만든 세 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 3인 자연수는 111, 120, 210, 102, 201이다. 0을 한 개 이하 사용하여 만든 다섯 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 5인 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

J054

○○
(2011(6)−가형30이산수학)

어느 상담 교사는 월요일, 화요일, 수요일 3일 동안 학생 9명과 상담하기 위하여 상담 계획표를 작성하려고 한다.

[상담 계획표]

요일	월요일	화요일	수요일
학생 수 (명)	a	b	c

상담 교사는 각 학생과 한 번만 상담하고, 요일별로 적어도 한 명의 학생과 상담한다. 상담 계획표에 학생 수만을 기록할 때, 작성할 수 있는 상담 계획표의 가짓수를 구하시오. (단, a, b, c는 자연수이다.) [4점]

J055

○○
(2014(예비)−A형27)

$(a+b+c)^4(x+y)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하시오. [4점]

J056

○
(2013(6)−가형25)

방정식 $x+y+z+w=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수를 구하시오. [3점]

J057

○○ (2013−나형12)

같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.) [3점]

① 330 ② 315 ③ 300
④ 285 ⑤ 270

J058

○○ (2014(6)−B형10)

고구마피자, 새우피자, 불고기피자 중에서 m개를 주문하는 경우의 수가 36일 때, 고구마피자, 새우피자, 불고기피자를 적어도 하나씩 포함하여 m개를 주문하는 경우의 수는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

J059

○○ (2014(9)−A형10)

$3 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 10$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [3점]

① 240 ② 270 ③ 300
④ 330 ⑤ 360

J060

○○ (2014(9)−B형8)

방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 -1 이상의 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는? [3점]

① 21 ② 28 ③ 36
④ 45 ⑤ 56

J061

○○
(2014-A형18)

흰색 탁구공 8개와 주황색 탁구공 7개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생이 흰색 탁구공과 주황색 탁구공을 각각 한 개 이상 갖도록 나누어 주는 경우의 수는? [4점]

① 295 ② 300 ③ 305
④ 310 ⑤ 315

J062

○○
(2014-B형9)

숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 5개를 택할 때, 숫자 4가 한 개 이하가 되는 경우의 수는? [3점]

① 45 ② 42 ③ 39
④ 36 ⑤ 33

J063

○○○
(2015(6)-B형20)

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c=6$ (나) 좌표평면에서 세 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$가 한 직선 위에 있지 않다.

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

J064

○○○
(2015(9)-A형15)

네 개의 자연수 1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택할 때, 세 수의 곱이 100 이하가 되도록 선택하는 경우의 수는? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

J065

○○○
(2015(9)−B형26)

자연수 n에 대하여 $abc=2^n$을 만족시키는 1 보다 큰 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수가 28일 때, n의 값을 구하시오. [4점]

J066

○○○
(2015−A형18)

연립방정식

$$\begin{cases} x+y+z+3w=14 \\ x+y+z+w=10 \end{cases}$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는? [4점]

① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

J067

○○
(2015−B형26)

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a\times b\times c$는 홀수이다.
(나) $a\le b\le c\le 20$

J068

○○○
(2016(6)−B형27)

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x+y+z+u=6$
(나) $x\neq u$

J069

○○○
(2016(9)−A형19)

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c+3d=10$
(나) $a+b+c \le 5$

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

J070

●●●
(2016(9)−B형27)

다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=20$
(나) a, b, c는 모두 d의 배수이다.

J071

○○○
(2016−A형17)

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [4점]

(가) a, b, c, d, e 중에서 0의 개수는 2이다.
(나) $a+b+c+d+e=10$

① 240 ② 280 ③ 320
④ 360 ⑤ 400

J072

○○○
(2016−B형14)

세 정수 a, b, c에 대하여

$$1 \le |a| \le |b| \le |c| \le 5$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [4점]

① 360 ② 320 ③ 280
④ 240 ⑤ 200

J073

○○○
(2017(6)－나형14)

방정식 $x+y+z+5w=14$를 만족시키는 양의 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는? [4점]

① 27 ② 29 ③ 31
④ 33 ⑤ 35

J074

○○○
(2017(6)－가형27)

사과, 감, 배, 귤 네 종류의 과일 중에서 8개를 선택하려고 한다. 사과는 1개 이하를 선택하고, 감, 배, 귤을 각각 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 과일은 8개 이상씩 있다.) [4점]

J075

○○
(2017(9)－가형15/나형19)

각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7인 모든 자연수의 개수는? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

J076

●●●
(2017－가형27/나형27)

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c=7$
(나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다.

J077

●●● (2018(9)-가형20)

다음은 n명의 사람이 각자 세 상자 A, B, C 중 2개의 상자를 선택하여 각 상자에 공을 하나씩 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, n은 6의 배수인 자연수이고 공은 구별하지 않는다.)

> 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는 '(ⅰ) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우'에서 '(ⅱ) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우'와 '(ⅲ) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우'를 제외하면 된다.
>
> (ⅰ)의 경우 :
>
> n명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{(가)}$ 이다.
>
> (ⅱ)의 경우 :
>
> 각 상자에 $\frac{2n}{3}$개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.
>
> (ⅲ)의 경우 :
>
> 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\frac{n}{2}$개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$ 이다.
>
> 그러므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times (\boxed{(나)} - 1)$이다.
>
> 따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\frac{f(30)}{g(30)} + h(30)$의 값은? [4점]

① 481 ② 491 ③ 501
④ 511 ⑤ 521

J078

○○○ (2018(9)-나형16)

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [4점]

> (가) $x+y+z=10$
>
> (나) $0<y+z<10$

① 39 ② 44 ③ 49
④ 54 ⑤ 59

J079

○○ (2019(9)-나형16)

서로 다른 종류의 사탕 3개와 같은 종류의 구슬 7개를 같은 종류의 주머니 3개에 남김없이 나누어 넣으려고 한다. 각 주머니에 사탕과 구슬이 각각 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

J 경우의 수

1	②	2	②	3	③	4	④	5	①
6	④	7	36	8	48	9	22	10	189
11	⑤	12	①	13	②	14	②	15	①
16	①	17	⑤	18	③	19	②	20	33
21	⑤	22	④	23	①	24	600	25	36
26	90	27	68	28	12	29	①	30	34
31	14	32	40	33	19	34	90	35	③
36	③	37	①	38	④	39	②	40	②
41	⑤	42	450	43	⑤	44	②	45	210
46	185	47	10	48	④	49	③	50	⑤
51	455	52	⑤	53	17	54	28	55	60
56	35	57	⑤	58	②	59	④	60	③
61	⑤	62	④	63	⑤	64	③	65	9
66	②	67	220	68	68	69	①	70	32
71	④	72	③	73	③	74	36	75	④
76	32	77	①	78	④	79	⑤	80	②
81	①	82	84	83	49	84	③	85	285
86	332	87	114	88	74	89	168	90	201
91	⑤	92	③	93	218	94	①	95	①
96	⑤	97	682	98	12	99	135	100	84
101	20	102	⑤	103	102	104	②	105	③
106	25	107	10	108	3	109	①	110	25
111	③	112	②	113	①	114	③		

K 확률

1	④	2	③	3	43	4	②	5	①
6	③	7	⑤	8	①	9	③	10	④
11	①	12	23	13	⑤	14	①	15	③
16	④	17	11	18	④	19	④	20	②
21	①	22	③	23	②	24	④	25	③
26	⑤	27	①	28	44	29	④	30	⑤
31	⑤	32	②	33	②	34	15	35	②
36	②	37	③	38	①	39	①	40	②
41	②	42	⑤	43	②	44	③	45	④
46	③	47	13	48	⑤	49	19	50	89
51	④	52	12	53	22	54	⑤	55	⑤
56	①	57	④	58	③	59	⑤	60	47
61	③	62	③	63	①	64	②	65	④
66	④	67	④	68	⑤	69	④	70	④
71	30	72	③	73	②	74	④	75	②
76	④	77	③	78	⑤	79	②	80	③
81	④	82	72	83	30	84	③	85	③
86	43	87	50	88	③	89	②	90	48
91	③	92	46	93	④	94	④	95	④
96	⑤	97	③	98	238	99	①	100	①
101	50	102	①	103	④	104	③	105	②
106	②	107	①	108	154	109	①	110	20
111	11	112	④	113	④	114	④	115	④
116	34	117	④	118	68	119	⑤	120	⑤
121	①	122	16	123	⑤	124	②	125	②
126	⑤	127	①	128	④	129	③	130	④
131	③	132	⑤	133	⑤	134	③	135	⑤
136	②	137	④	138	②	139	②	140	②
141	⑤	142	③	143	252	144	50	145	②
146	120	147	①	148	②	149	19	150	⑤
151	③	152	⑤	153	④	154	①	155	②
156	118	157	③	158	②	159	30	160	8
161	④	162	④	163	①	164	④	165	③
166	⑤	167	②	168	73	169	②	170	③
171	①	172	590	173	③	174	②	175	④
176	①	177	⑤	178	①	179	②	180	①
181	①	182	43	183	①	184	③	185	③
186	137	187	①	188	191				

L 통계

1	③	2	④	3	17	4	①	5	②
6	①	7	③	8	②	9	26.25	10	8.96
11	③	12	244	13	①	14	⑤	15	105
16	13	17	④	18	14	19	②	20	112
21	580	22	④	23	④	24	①	25	④
26	②	27	②	28	⑤	29	①	30	③
31	20	32	②	33	①	34	②	35	②
36	⑤	37	121	38	③	39	78	40	①
41	⑤	42	30	43	12	44	④	45	47
46	①	47	50	48	④	49	③	50	30
51	⑤	52	④	53	⑤	54	②	55	①
56	51	57	④	58	10	59	④	60	③
61	②	62	⑤	63	①	64	37	65	125
66	④	67	①	68	10	69	5	70	④
71	③	72	31	73	⑤	74	④	75	①
76	⑤	77	89	78	④	79	④	80	②
81	①	82	①	83	③	84	③	85	③
86	③	87	⑤	88	③	89	②	90	③
91	⑤	92	96	93	②	94	①	95	⑤
96	35	97	②	98	62	99	③	100	155
101	⑤	102	④	103	①	104	⑤	105	④
106	④	107	⑤	108	③	109	③	110	③
111	330	112	⑤	113	②	114	②	115	③
116	②	117	23	118	⑤	119	②	120	①
121	④	122	②	123	①	124	①	125	16
126	③	127	①	128	②	129	⑤	130	②
131	⑤	132	①	133	③	134	25	135	④
136	④	137	71	138	③	139	③	140	⑤
141	③	142	④	143	③	144	③	145	⑤
146	③	147	249	148	③	149	⑤	150	98
151	51	152	③	153	25	154	②	155	12
156	②	157	10	158	②				

해설 목차

확률과 통계

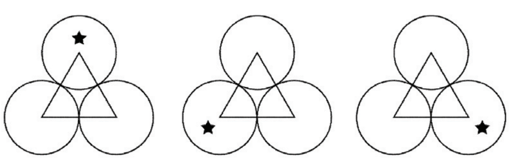
J 경우의 수

1	②	2	②	3	③	4	④	5	①
6	④	7	36	8	48	9	22	10	189
11	⑤	12	①	13	②	14	②	15	①
16	①	17	⑤	18	③	19	②	20	33
21	⑤	22	④	23	①	24	600	25	36
26	90	27	68	28	12	29	①	30	34
31	14	32	40	33	19	34	90	35	③
36	③	37	①	38	④	39	②	40	②
41	⑤	42	450	43	⑤	44	②	45	210
46	185	47	10	48	④	49	③	50	⑤
51	455	52	⑤	53	17	54	28	55	60
56	35	57	⑤	58	②	59	④	60	③
61	⑤	62	④	63	⑤	64	③	65	9
66	②	67	220	68	68	69	①	70	32
71	④	72	③	73	③	74	36	75	④
76	32	77	①	78	④	79	⑤	80	②
81	①	82	84	83	49	84	③	85	285
86	332	87	114	88	74	89	168	90	201
91	⑤	92	③	93	218	94	①	95	①
96	⑤	97	682	98	12	99	135	100	84
101	20	102	⑤	103	102	104	②	105	③
106	25	107	10	108	3	109	①	110	25
111	③	112	②	113	①	114	③		

J001 | 답 ②

[풀이1] ★

서로 다른 7개의 색을 칠하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_7P_7$이다.



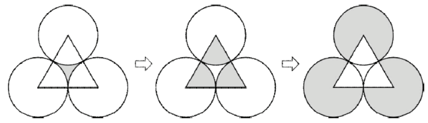
위의 그림처럼 3가지씩 같은 경우가 생기므로, 구하는 경우의 수는

$$\frac{{}_7P_7}{3}=1680$$

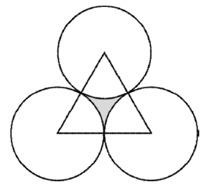
답 ②

[풀이2] ★

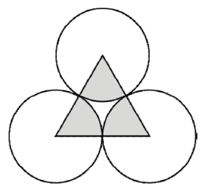
아래와 같은 순서대로 색칠하자.



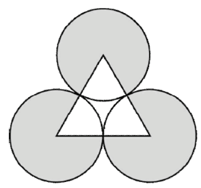
아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_7C_1$이다.



아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 조합의 수와 원순열의 수에 의하여 ${}_6C_3\times\frac{3!}{3}$이다.



아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3P_3$이다.



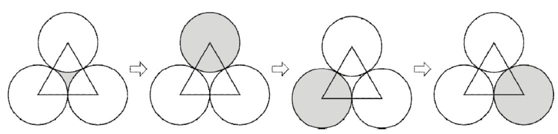
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$${}_7C_1\times{}_6C_3\times\frac{3!}{3}\times{}_3P_3=1680$$

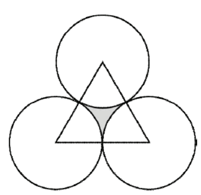
답 ②

[풀이3] ★

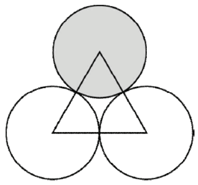
아래와 같은 순서대로 색칠하자.



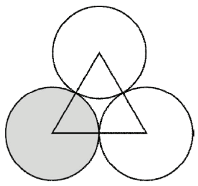
아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_7C_1$이다.



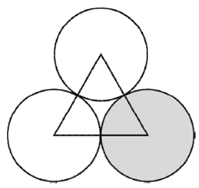
아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_6P_2$이다.



아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_2$이다.



아래 그림의 어두운 영역에 색을 칠하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 ${}_2\mathrm{P}_2$이다.



원순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
구하는 경우의 수는

$${}_7\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{P}_2 \times {}_4\mathrm{P}_2 \times {}_2\mathrm{P}_2 \times \frac{1}{3} = 1680$$

답 ②

J002 | 답 ②

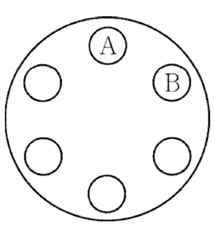
[풀이1]
두 개의 용기 A, B를 한 개의 용기로 보고, 다섯 개의 용기 (AB), C, D, E, F를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $4!$ $(=\frac{5!}{5})$이므로 구하는 경우의 수는

$2!4! = 48$

이다. 이때, $2!$은 두 개의 용기 A, B를 일렬로 배열하는 순열의 수이다.

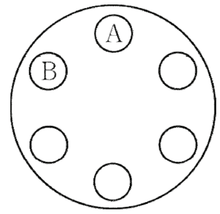
답 ②

[풀이2]
- (1) A, B가 시계 방향으로 나열되는 경우



C, D, E, F를 나열하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_4$이다.

- (2) A, B가 시계 반대방향으로 나열되는 경우



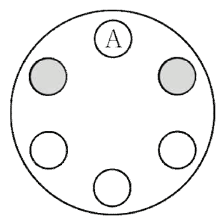
C, D, E, F를 나열하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_4$이다.
(1), (2)가 동시에 일어나지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{P}_4 + {}_4\mathrm{P}_4 = 48$

답 ②

[풀이3] +확률과 통계(확률)
주어진 6개의 용기를 실험 기구에 넣을 경우의 수는
원순열의 수에 의하여

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_6}{6} = \frac{6!}{6} = 5!$$

용기 A가 아래 그림과 같이 실험 기구에 넣어졌다고 하자.



용기 B가 용기 A에 이웃할 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

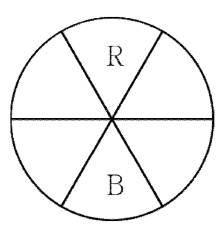
따라서 구하는 경우의 수는

$$5! \times \frac{2}{5} = 48$$

답 ②

J003 | 답 ③

[풀이1]
빨간색과 파란색을 각각 R, B라고 하자.



위의 그림과 같이 빨간색과 파란색을 색칠하고 다른 4가지의 색을 칠하면 된다. 이때, 다른 4가지의 색을 칠하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여

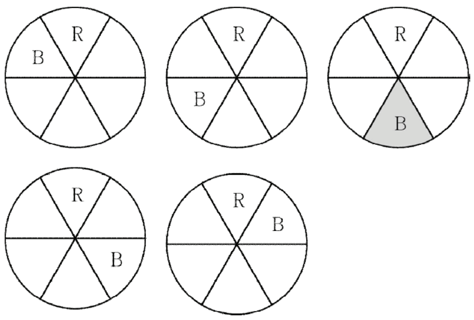
$_4P_4 = 24$
따라서 구하는 경우의 수는 24이다.

답 ③

[풀이2] +확률과 통계(확률)
주어진 색을 모두 사용하여 주어진 바람개비에 색칠하는 경우의 수는 원순열의 수에 의하여

$$\frac{_6P_6}{6} = \frac{6!}{6} = 5!$$

빨간색과 파란색을 각각 R, B라고 하자.



위의 그림처럼 빨간색과 파란색을 서로 맞은편의 날개에 칠할 확률은 $\frac{1}{5}$이다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$5! \times \frac{1}{5} = 24$$

답 ③

J004 | 답 ④

[풀이]
원순열의 수를 구하는 공식에 의하여
구하는 경우의 수는

$$\frac{_5P_5}{5} = \frac{5!}{5} = 4! = 24$$

답 ④

J005 | 답 ①

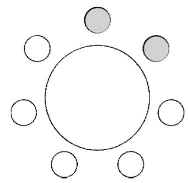
[풀이1]
1학년 학생 2명을 1명으로 생각하고, 2학년 학생 2명을 1명으로 생각하여 5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{5} = 4! = 24$$

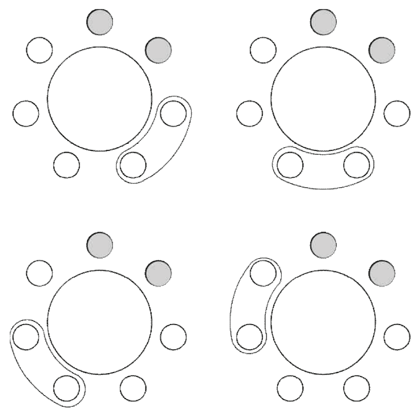
이 각각에 대하여 1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2! = 2$
이 각각에 대하여 2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2! = 2$
따라서 구하는 경우의 수는
$24 \times 2 \times 2 = 96$

답 ①

[풀이2]
아래 그림처럼 1학년 학생 2명이 앉을 자리를 선택하자.



이제 2학년 학생 2명이 앉을 자리를 선택하면 아래 그림처럼 4가지의 경우가 가능하다.

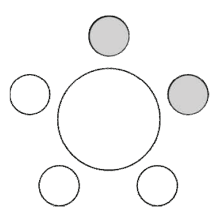


따라서 구하는 경우의 수는
$4 \times 2! \times 2! \times 3! = 96$
이때, $2!$은 1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수, $2!$은 2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수, $3!$은 3학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수이다.

답 ①

J006 | 답 ④

[풀이1]
아래 그림처럼 두 학생 A, B는 이웃한 두 자리에 앉아야 한다.



구하는 경우의 수는

$_6C_3 \times 2! \times 3! = 240$

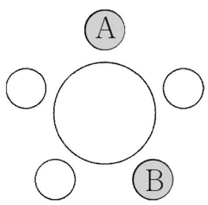
이때, $_6C_3$은 두 학생 A, B를 제외한 6명의 학생 중에서 3명을 택할 경우의 수이고, 2!은 두 학생 A, B가 앉을 자리를 결정하는 경우의 수이고, 3!은 나머지 세 학생이 앉을 자리를 결정하는 경우의 수이다.

답 ④

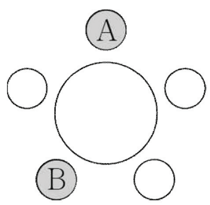
[풀이2]

여집합을 이용하여 문제를 해결하자.

우선 아래 그림처럼 두 학생 A, B가 이웃한 두 자리에 앉지 못할 경우의 수를 구하자.



[경우1]



[경우2]

경우의 수는

[경우1] $_6C_3 \times 3! = 120$

[경우2] $_6C_3 \times 3! = 120$

전체 경우의 수는

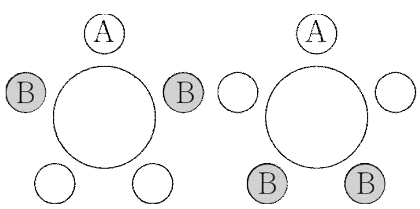
$_6C_3 \times 4! = 480$

따라서 구하는 경우의 수는

$480 - (120 + 120) = 240$

답 ④

[풀이3] 시험장



위의 그림에서 알 수 있듯이

두 학생 A, B가 서로 이웃할 확률과 그렇지 않을 확률은 각각

$\frac{1}{2}\left(=\frac{2}{4}\right)$, $\frac{1}{2}\left(=\frac{2}{4}\right)$

로 같다.

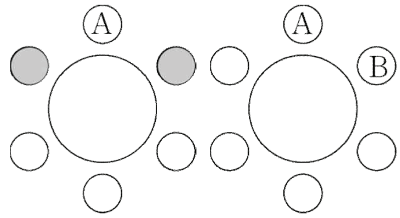
따라서 구하는 경우의 수는

$_6C_3 \times 4! \times \frac{1}{2} = 240$

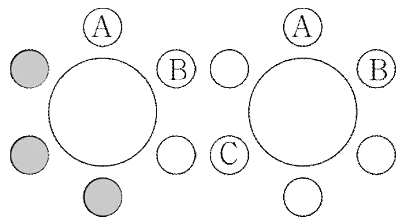
답 ④

J007 | 답 36

[풀이1]



A가 위의 그림처럼 앉았을 때, B는 두 개의 색칠된 자리 중 한 자리에 앉아야 한다. 이때, 경우의 수는 2이다. 예를 들어 위의 그림(오른쪽)처럼 앉았다고 하자.



C는 세 개의 색칠된 자리 중 한 자리에 앉아야 한다. 이때, 경우의 수는 3이다. 예를 들어 위의 그림(오른쪽)처럼 앉았다고 하자.

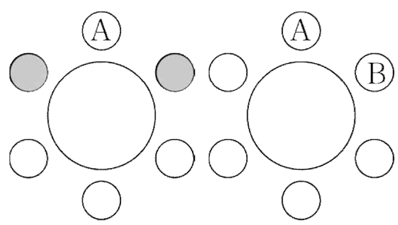
이제 남은 3명이 앉을 경우의 수는 3!이다.

따라서 구하는 경우의 수는

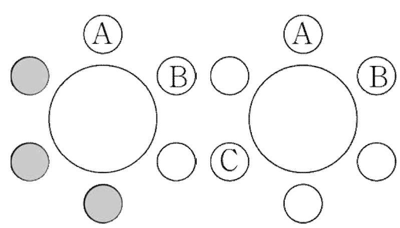
$2 \times 3 \times 3! = 36$

답 36

[풀이2]



A가 위의 그림처럼 앉았을 때, B는 두 개의 색칠된 자리 중 한 자리에 앉아야 한다. 이때, 확률은 $\frac{2}{5}$이다. 예를 들어 위의 그림(오른쪽)처럼 앉았다고 하자.



C는 세 개의 색칠된 자리 중 한 자리에 앉아야 한다. 이때, 확률은 $\frac{3}{4}$이다.

두 조건 (가), (나)를 모두 만족시킬 확률은

확률의 곱셈정리에 의하여

$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

이므로

구하는 경우의 수는

$5! \times \frac{3}{10} = 36$

답 36

J008 | 답 48

[풀이1]

$12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$이므로 이웃한 2개의 의자에 2와 6이 올 수 없으며, 3과 4가 올 수 없다.

여집합의 관점에서 문제를 해결하자.

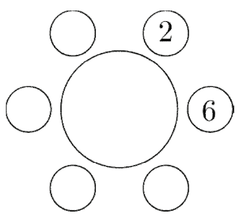
2, 6이 이웃한 경우를 A,

3, 4가 이웃한 경우를 B

라고 하면 구하는 경우의 수는

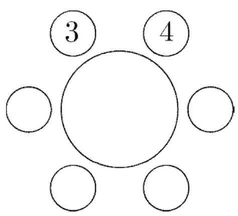
$n(A^C \cap B^C) = n(S) - n(A \cup B)$

이다. (단, S는 모든 경우)



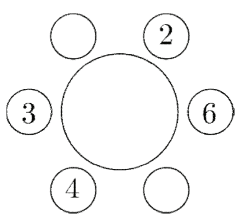
$n(A) = 2! \times 4! = 48$

이때, 2!은 2, 6 배열, 4!은 나머지 배열



$n(B) = 2! \times 4! = 48$

이때, 2!은 3, 4 배열, 4!은 나머지 배열



$n(A \cap B) = 2! \times 3! \times 2! = 24$

이때, 2!은 2, 6 배열, 3!은 1, (3, 4), 5 배열, 2!은 3, 4 배열

$n(A \cup B) = 48 + 48 - 24 = 72$

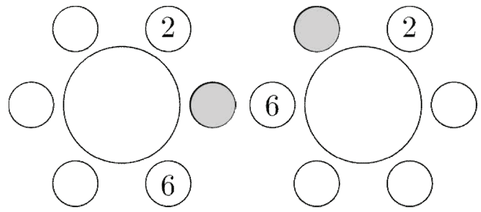
따라서 구하는 경우의 수는

$5! - 72 = 120 - 72 = 48$

답 48

[풀이2]

(1) 2, 6이 마주보지 않는 경우



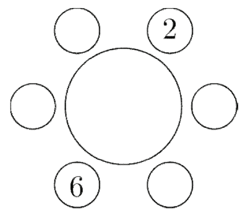
●에 3 또는 4가 오는 경우: $2 \times 3! = 12$

●에 3, 4가 오지 않는 경우: $2! \times 2! = 4$

경우의 수는

$2 \times (12 + 4) = 32$

(2) 2, 6이 마주보는 경우



경우의 수는

$2! \times 2 \times 2 \times 2! = 16$

따라서 구하는 경우의 수는

$32 + 16 = 48$

답 48

J009 | 답 22

[풀이]

a, b, c에서 중복을 허용하여 세 개를 택하여 만든 단어의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$

이때, a가 연속으로 나열되는 경우는

aaa, aab, aac, baa, caa

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$27 - 5 = 22$

답 22

J010 | 답 189

[풀이]

세 주사위 A, B, C를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수를 각

각 a, b, c라고 하자.
곱의 법칙에 의하여 아래 표의 각각의 경우의 수를 구하면

a	b	c	abc	경우의 수
짝수	짝수	짝수	짝수	3^3
짝수	짝수	홀수	짝수	3^3
짝수	홀수	짝수	짝수	3^3
홀수	짝수	짝수	짝수	3^3
짝수	홀수	홀수	짝수	3^3
홀수	짝수	홀수	짝수	3^3
홀수	홀수	짝수	짝수	3^3
홀수	홀수	홀수	홀수	3^3

a, b, c 중에서 적어도 하나가 짝수이면 세 수의 곱 abc는 짝수이다. 중복순열의 수에 의하여
a, b, c가 모두 홀수인 경우의 수는 ${}_3\Pi_3(=3^3)$이므로
구하는 경우의 수는 ${}_6\Pi_3-{}_3\Pi_3=6^3-3^3=189$이다.
답 189

[참고]
곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여 경우의 수를
$3^3+3^3+3^3+3^3+3^3+3^3+3^3=7\times3^3$
으로 구해도 좋다.
하지만 이 문제의 경우 여집합의 관점에서 문제를 해결하는 것이 낫다.

J011 | 답 ⑤

[풀이1] ★
• 네 자리의 자연수가 1을 포함하지 않는 경우
2, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_2\Pi_4$이다.
• 네 자리의 자연수가 2를 포함하지 않는 경우
1, 3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_2\Pi_4$이다.
• 네 자리의 자연수가 1, 2를 모두 포함하지 않는 경우
3을 중복 사용하여 네 자리의 자연수를 만들 경우의 수는 1이다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_3\Pi_4-({}_2\Pi_4+{}_2\Pi_4-1)=3^4-(2^4+2^4-1)=50$
답 ⑤

[풀이2] ★
3을 세 개 이상 사용하면 1, 2 중 적어도 하나는 포함되지 않으므로 3을 두 개 이하로 사용하거나 사용하지 않아야 한다.
• (1) 3을 두 개 사용하는 경우
1을 한 개 사용해야 한다.
1, 2, 3, 3을 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!}=12$이다.
• (2) 3을 한 개 사용하는 경우
1을 두 개 이하로 사용해야 한다.
(단, 1을 사용하지 않는 경우는 없다.)
1, 1, 2, 3을 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!}=12$이다.
1, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!}=12$이다.
• (3) 3을 사용하지 않는 경우
1을 세 개 이하로 사용해야 한다.
(단, 1을 사용하지 않는 경우는 없다.)
1, 1, 1, 2를 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{3!}=4$이다.
1, 1, 2, 2를 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!2!}=6$이다.
1, 2, 2, 2를 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{3!}=4$이다.
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$12+24+14=50$
답 ⑤

[풀이3]
3을 세 개 이상 사용하면 1, 2 중 적어도 하나는 포함되지 않으므로 3을 두 개 이하로 사용하거나 사용하지 않아야 한다.
• (1) 3을 두 개 사용하는 경우
${}_4C_2\times({}_2\Pi_2-2)=6\times2=12$
이때, ${}_4C_2$는 3을 나열하는 경우의 수이고, ${}_2\Pi_2-2$는 1, 2를 나열하는 경우의 수이다. 후자에서 2를 빼는 이유는 ${}_2\Pi_2$에 1111, 2222가 포함되기 때문이다.
• (2) 3을 한 개 사용하는 경우
${}_4C_1\times({}_2\Pi_3-2)=4\times6=24$
이때, ${}_4C_1$은 3을 나열하는 경우의 수이고, ${}_2\Pi_3-2$는 1, 2를 나열하는 경우의 수이다. 후자에서 2를 빼는 이유는 ${}_2\Pi_3$에 1111, 2222가 포함되기 때문이다.
• (3) 3을 사용하지 않는 경우
${}_2\Pi_4-2=14$

이때, $_2\Pi_4-2$는 1, 2를 나열하는 경우의 수이다. 2를 빼는 이유는 $_2\Pi_4$에 1111, 2222가 포함되기 때문이다.

(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는

$12+24+14=50$

답 ⑤

J012 | 답 ①

[풀이1]

주어진 전체집합의 어떤 원소라도 세 집합

A, B, $(A\cup B)^C$

중에서 오직 한 집합만의 원소라면

두 집합 A, B는 서로소이다.

구하는 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

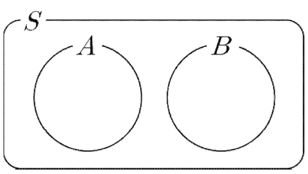
$_3\Pi_6=3^6=729$

답 ①

[풀이2]

두 집합 A, B가 서로소이므로

$A\cap B=\varnothing$



6 이하의 자연수 k에 대하여 k는

집합 A의 원소이거나,

집합 B의 원소이거나,

집합 $(A\cup B)^C$의 원소이다.

집합 A의 원소의 개수가 $n(0\le n\le 6)$일 때,

순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$_6C_n\,{}_2\Pi_{6-n}(={}_6C_n2^{6-n})$

이다. 이때, $_6C_n$은 집합 A의 개수이고, $_2\Pi_{6-n}$은 집합 B의 개수이다. (두 집합 A, B가 결정되면 집합 $(A\cup B)^C$는 자동적으로 결정된다.)

예를 들어 $n=2$일 때, 다음과 같은 경우가 가능하다.

	1	2	3	4	5	6	경우의 수
A	●	●	╳	╳	╳	╳	$_6C_2$
B	╳	╳	●	×	×	●	$_2\Pi_{6-n}$
$(A\cup B)^C$	╳	╳	×	●	●	×	

따라서 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$$\sum_{n=0}^{6}{}_6C_n\,{}_2\Pi_{6-n}=\sum_{n=0}^{6}{}_6C_n2^{6-n}$$

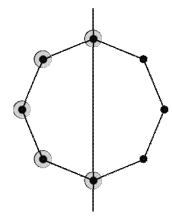
$={}_6C_02^6+{}_6C_12^5+{}_6C_22^4+\cdots+{}_6C_62^0$

$=(1+2)^6=3^6=729$

답 ①

J013 | 답 ②

[풀이]



5개의 꼭짓점 ◉에 올 숫자를 결정하면 나머지 3개의 꼭짓점에 올 숫자가 자동적으로 결정된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$_2\Pi_5=2^5=32$

답 ②

J014 | 답 ②

[풀이]

5개의 공을 3개의 상자에 넣는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$_3\Pi_5=3^5=243$

- (1) 3개의 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 각각 15, 0, 0인 경우

A	B	C
1, 2, 3, 4, 5	×	×
×	1, 2, 3, 4, 5	×
×	×	1, 2, 3, 4, 5

경우의 수는 3이다.

- (2) 3개의 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 각각 14, 1, 0인 경우

A	B	C
2, 3, 4, 5	1	×
2, 3, 4, 5	×	1
1	2, 3, 4, 5	×
×	2, 3, 4, 5	1
1	×	2, 3, 4, 5
×	1	2, 3, 4, 5

경우의 수는 6이다.

• (3) 3개의 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 각각 13, 2, 0인 경우

A	B	C
1, 3, 4, 5	2	×
1, 3, 4, 5	×	2
2	1, 3, 4, 5	×
×	1, 3, 4, 5	2
2	×	1, 3, 4, 5
×	2	1, 3, 4, 5

경우의 수는 6이다.

(1), (2), (3)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$3^5-(3+6+6)=228$

답 ②

J015 | 답 ①

[풀이1] ★

우선 A를 설치하자.

조건 (가)에 의하여 A를 설치하는 경우의 수는 5이다.

조건 (나)를 고려하지 않고 나머지 4곳에 B, C를 설치하는 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

${}_2\Pi_4=2^4=16$

16가지의 경우 중에서 B가 1곳에 설치되는 경우의 수는 4이고, B가 설치되지 않는 경우의 수는 1이다.

따라서 A가 설치되었을 때, 조건 (나)를 만족시키지 않도록 B, C를 설치하는 경우의 수는

$16-(4+1)=11$

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$5\times11=55$

답 ①

[풀이2] ★

우선 A를 설치하자.

조건 (가)에 의하여 A를 설치하는 경우의 수는 5이다.

조건 (나)에 의하여

• 2곳에 B를 설치하는 경우

남은 4곳 중에서 2곳에 B를 설치하고,

남은 2곳에 C를 설치하면 된다.

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$

• 3곳에 B를 설치하는 경우

남은 4곳 중에서 3곳에 B를 설치하고,

남은 1곳에 C를 설치하면 된다.

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{4!}{3!}=4$

• 4곳에 B를 설치하는 경우

남은 4곳 모두에 B를 설치하면 된다.

경우의 수는 1이다.

구하는 경우의 수는 합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여

$5\times(6+4+1)=55$

답 ①

[풀이3] ★

우선 A를 설치하자.

조건 (가)에 의하여 A를 설치하는 경우의 수는 5이다.

조건 (나)에 의하여

• 2곳에 B를 설치하는 경우

남은 4곳 중에서 2곳에 B를 설치하고,

남은 2곳에 C를 설치하면 된다.

경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_2\times{}_2C_2=6$

• 3곳에 B를 설치하는 경우

남은 4곳 중에서 3곳에 B를 설치하고,

남은 1곳에 C를 설치하면 된다.

경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_3\times1=4$

• 4곳에 B를 설치하는 경우

남은 4곳 모두에 B를 설치하면 된다.

경우의 수는 1이다.

구하는 경우의 수는 합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여

$5\times(6+4+1)=55$

답 ①

[참고]

B가 아닌 C가 설치되는 개수를 기준으로 문제를 해결할 수도 있다.

• 2곳에 C를 설치하는 경우

경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_2C_2=6$

• 1곳에 C를 설치하는 경우

경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_3C_3=4$

• C가 설치되지 않는 경우

경우의 수는 ${}_4C_0\times{}_4C_4=1$

구하는 경우의 수는 합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여

$5\times(6+4+1)=55$

J016 | 답 ①

[풀이]

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

${}_4\Pi_5 = 4^5 = 2^{10} = 1024$

답 ①

J017 | 답 ⑤

[풀이]

그릇 A에 담을 2개의 과일을 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_5C_2$

남은 3개의 과일을 남은 2개의 그릇 B, C에 담을 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

${}_2\Pi_3$

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

${}_5C_2 \times {}_2\Pi_3 = \dfrac{5\times 4}{2\times 1} \times 2^3 = 80$

답 ⑤

J018 | 답 ③

[풀이]

네 자리의 자연수가 5의 배수이므로 이 자연수의 일의 자리에는 5가 와야 한다.

○○○5

나머지 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

답 ③

J019 | 답 ②

[풀이1] ★

서로 다른 공 4개를 각각 ◐, ◑, ◓, ◒, 서로 다른 상자 4개를 각각 A, B, C, D라고 하자.

서로 다른 공 4개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

(전체 경우의 수) $= {}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$

넣은 공의 개수가 1인 상자가 없는 경우를 생각하자.

▸ (경우1) 4개+0개+0개+0개

A	B	C	D
◐◑ ◓◒	×	×	×

A	B	C	D
×	◐◑ ◓◒	×	×

⋮

4개의 공을 모두 넣을 상자를 선택하는 경우의 수는 4이다.

▸ (경우2) 2개+2개+0개+0개

A	B	C	D
◐◑	◓◒	×	×

A	B	C	D
◐◓	◑◒	×	×

A	B	C	D
◐◒	◑◓	×	×

⋮

A	B	C	D
◐◑	×	◓◒	×

⋮

2개, 2개씩의 공을 넣을 두 개의 상자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다. 예를 들어 두 개의 상자 A, B가 선택되었을 때, 상자 A에 2개의 공을 넣을 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$, 상자 B에 2개의 공을 넣을 경우의 수는 $1(={}_2C_2)$이다. (즉, 남은 2개의 공을 상자 B에 넣으면 된다.) 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_2 \times 1 = 36$이다.

합의 법칙에 의하여

(제외해야 하는 경우의 수) $= 4 + 36 = 40$

(1), (2)에서

(구하는 경우의 수) $= 256 - 40 = 216$

답 ②

[참고1] ★

(경우2)에서 2개, 2개씩의 공을 넣을 두 개의 상자를 선택하는 경우의 수를 다음과 같이 구해도 좋다.

0개의 공을 ◎, 2개의 공을 ◉라고 하자.

◎, ◎, ◉, ◉을 일렬로 나열하는 경우의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{4!}{2!2!}=6(={}_4C_2)$

[참고2] ★
(경우2)에서 $36(={}_4C_2\times{}_4C_2)$는 다음과 같이 구해도 좋다.
2개, 2개씩의 공을 넣을 두 개의 상자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다. 서로 다른 4개의 공을 2개, 2개씩 나누는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2\times\dfrac{1}{2!}$이다.
이때, ${}_4C_2$를 $2!$으로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다.
(◐◑) (◓◒)와 (◓◒) (◐◑)는 중복
(◐◓) (◑◒)와 (◑◒) (◐◓)는 중복
(◐◒) (◑◓)와 (◑◓) (◐◒)는 중복
⋮
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
${}_4C_2\times\left({}_4C_2\times\dfrac{1}{2!}\right)\times 2!=36$
이때, $2!$은 2개, 2개씩의 공을 선택된 두 상자에 넣는 경우의 수이다.

[풀이2] ★
서로 다른 공 4개를 각각 ◐, ◑, ◓, ◒, 서로 다른 상자 4개를 각각 A, B, C, D라고 하자.
넣은 공의 개수가 1인 상자가 있는 경우를 생각하자.
▸ (경우1) 1개+1개+1개+1개
예를 들어

A	B	C	D
◐	◑	◓	◒

순열의 수에 의하여 경우의 수는
${}_4P_4=4!=24$
▸ (경우2) 2개+1개+1개+0개
예를 들어

A	B	C	D
◐◑	◓	◒	×

2개의 공을 넣을 한 상자와 1개씩의 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_4C_1\times{}_3C_2(=12)$이다. 예를 들어 2개의 공을 넣을 상자로 A, 1개, 1개씩의 공을 넣을 두 상자로 B, C가 선택되었다고 하자. 세 상자 A, B, C에 넣을 공을 선택할 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1(=12)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$12\times12=144$
▸ (경우3) 3개+1개+0개+0개
예를 들어

A	B	C	D
◐◑ ◓	◒	×	×

3개의 공을 넣을 한 상자와 1개의 공을 넣을 한 상자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_4C_1\times{}_3C_1$ $(=12)$이다. 예를 들어 3개의 공을 넣을 상자로 A, 1개의 공을 넣을 상자로 B가 선택되었다고 하자. 두 상자 A, B에 넣을 공을 선택할 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_4C_3\times{}_1C_1(=4)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$12\times4=48$
(경우1), (경우2), (경우3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$24+144+48=216$
답 ②

[참고3] ★
(경우2)에서 2개, 1개, 1개씩의 공을 넣을 세 개의 상자를 선택하는 경우의 수를 다음과 같이 구해도 좋다.
0개의 공을 ◎, 1개의 공을 ◍, 2개의 공을 ◉라고 하자.
◎, ◍, ◍, ◉을 일렬로 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$\dfrac{4!}{2!}=12(={}_4C_1\times{}_3C_2)$

[참고4] ★
(경우2)의 경우의 수는 다음과 같이 구해도 좋다.
2개, 1개, 1개씩의 공을 넣을 세 개의 상자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3(=4)$이다. 서로 다른 4개의 공을 2개, 1개, 1개씩 나누는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\dfrac{1}{2!}(=6)$이다.
이때, ${}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1$을 $2!$으로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다.
(◐◑) (◓) (◒)와 (◐◑) (◒) (◓)는 중복
(◐◓) (◑) (◒)와 (◐◓) (◒) (◑)는 중복
(◐◒) (◑) (◓)와 (◐◒) (◓) (◑)는 중복
⋮
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
${}_4C_3\times\left({}_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\dfrac{1}{2!}\right)\times3!=144$
이때, $3!$은 2개, 1개, 1개씩의 공을 선택된 세 상자에 넣는 경우의 수이다.

[참고5] ★
(경우3)에서 3개, 1개씩의 공을 넣을 세 개의 상자를 선택하는 경우의 수를 다음과 같이 구해도 좋다.
0개의 공을 ◎, 1개의 공을 ⅠⅠ, 3개의 공을 ◈라고 하자.
◎, ◎, ⅠⅠ, ◈을 일렬로 나열하는 경우의 수는
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$\frac{4!}{2!}=12(={}_4C_1\times{}_3C_1)$

[참고6] ★
(경우3)의 경우의 수는 다음과 같이 구해도 좋다.
3개, 1개씩의 공을 넣을 두 개의 상자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2(=6)$이다. 서로 다른 4개의 공을 3개, 1개씩 나누는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3\times{}_1C_1$ $(=4)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
${}_4C_2\times({}_4C_3\times{}_1C_1)\times2!=48$
이때, 2!은 3개, 1개씩의 공을 선택된 두 상자에 넣는 경우의 수이다.

J020 | 답 33

[풀이1]
세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는
중복순열의 수에 의하여 ${}_3\Pi_4=3^4=81$이다.
• (1) a가 한 번 나오는 경우
a가 올 자리를 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_4C_1=4$이다. (아래)
a○○○, ○a○○, ○○a○, ○○○a
각각의 경우에 대하여 ○의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_2\Pi_3=2^3=8$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $4\times8=32$이다.
• (2) a가 나오지 않는 경우
○○○○
○의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_2\Pi_4=2^4=16$이다.
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$81-(32+16)=33$
답 33

[참고1]
같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 (1), (2)의 경우의 수를 구할 수도 있다.
• (1)
a, b, b, b: $\frac{4!}{3!}=4$
a, b, b, c: $\frac{4!}{2!}=12$
a, b, c, c: $\frac{4!}{2!}=12$
a, c, c, c: $\frac{4!}{3!}=4$
합의 법칙에 의하여 경우의 수는
$4+12+12+4=32$이다.
• (2)
b, b, b, b: 1
b, b, b, c: $\frac{4!}{3!}=4$
b, b, c, c: $\frac{4!}{2!2!}=6$
b, c, c, c: $\frac{4!}{3!}=4$
c, c, c, c: 1
합의 법칙에 의하여 경우의 수는
$1+4+6+4+1=16$이다.

[풀이2]
• (1) a가 네 번 나오는 경우
$aaaa$
경우의 수는 1이다.
• (2) a가 세 번 나오는 경우
a가 올 자리를 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_4C_3={}_4C_1=4$이다. (아래)
aaa○, aa○a, a○aa, ○aaa
각각의 경우에 대하여 ○의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 2이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $4\times2=8$이다.
• (3) a가 두 번 나오는 경우
a가 올 자리를 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_4C_2=6$이다. (아래)
aa○○, a○a○, a○○a,
○aa○, ○a○a, ○○aa
각각의 경우에 대하여 ○의 자리에 b 또는 c가 올 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_2\Pi_2=2^2=4$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $6\times4=24$이다.
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$1+8+24=33$

답 33

[참고2]
같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 (2), (3)의 경우의 수를 구할 수도 있다.

- (2)

$a,\ a,\ a,\ b:\ \dfrac{4!}{3!}=4$

$a,\ a,\ a,\ c:\ \dfrac{4!}{3!}=4$

합의 법칙에 의하여 경우의 수는 $4+4=8$이다.

- (3)

$a,\ a,\ b,\ b:\ \dfrac{4!}{2!2!}=6$

$a,\ a,\ b,\ c:\ \dfrac{4!}{2!}=12$

$a,\ a,\ c,\ c:\ \dfrac{4!}{2!2!}=6$

합의 법칙에 의하여 경우의 수는 $6+12+6=24$이다.

J021 | 답 ⑤

[풀이1]

- (1) $f(4)=4$인 경우

(가): $f(1)+f(2)+f(3)\geq 12$
(나): $f(1)\neq 4,\ f(2)\neq 4,\ f(3)\neq 4$
즉, $f(1),\ f(2),\ f(3)$이 가질 수 있는 값은 1, 2, 3 중의 하나이다.
그런데 $3+3+3=9<12$이므로 $f(4)\neq 4$이다.

- (2) $f(4)=3$인 경우

(가): $f(1)+f(2)+f(3)\geq 9$
(나): $f(1)\neq 3,\ f(2)\neq 3,\ f(3)\neq 3$
즉, $f(1),\ f(2),\ f(3)$이 가질 수 있는 값은 1, 2, 4 중의 하나이다.
$4+4+4=12\geq 9$ … (경우1)
$4+4+2=10\geq 9$ … (경우2)
$4+4+1=9\geq 9$ … (경우3)
각각의 경우에 대하여 함수 f의 개수는
(경우1): 1개
(경우2): 3개
(경우3): 3개

- (3) $f(4)=2$인 경우

(가): $f(1)+f(2)+f(3)\geq 6$
(나): $f(1)\neq 2,\ f(2)\neq 2,\ f(3)\neq 2$
즉, $f(1),\ f(2),\ f(3)$이 가질 수 있는 값은 1, 3, 4 중의 하나이다.
(가)의 부정을 생각하자.
(가)의 부정: $f(1)+f(2)+f(3)<6$
$1+1+1=3<6$ … (경우4)
$1+1+3=5<6$ … (경우5)
각각의 경우에 대하여 함수 f의 개수는
(경우4): 1개
(경우5): 3개
따라서 함수 f의 개수는
${}_3\Pi_3-(1+3)=3^3-4=23$

- (4) $f(4)=1$인 경우

(가): $f(1)+f(2)+f(3)\geq 3$
(나): $f(1)\neq 1,\ f(2)\neq 1,\ f(3)\neq 1$
즉, $f(1),\ f(2),\ f(3)$이 가질 수 있는 값은 2, 3, 4 중의 하나이다.
함수 f의 개수는
${}_3\Pi_3=27$
(1)~(4)에서 함수 f의 개수는
$0+7+23+27=57$

답 ⑤

[풀이2]
조건 (나)를 만족시키는 함수 f의 개수는
${}_4C_1\times{}_3\Pi_3=108$
조건 (가)의 부정은 다음과 같다.
'$f(1)+f(2)+f(3)<3f(4)$' … (*)
$f(4)=1$: $f(1)+f(2)+f(3)<3$
$2+2+2=6>3$이므로
(*)를 만족시키는 함수 f는 없다.
$f(4)=2$: $f(1)+f(2)+f(3)<6$
$3+1+1<6,\ 1+1+1<6$이므로
(*)를 만족시키는 함수 f의 개수는 $3+1=4$이다.
$f(4)=3$: $f(1)+f(2)+f(3)<9$
$4+4+4=12>9,\ 4+4+2=10>9,$
$4+4+1=9$이므로
(*)를 만족시키는 함수 f의 개수는
${}_3\Pi_3-(1+3+3)=20$이다.
$f(4)=4$: $f(1)+f(2)+f(3)<12$
$3+3+3<12$이므로
(*)를 만족시키는 함수 f의 개수는 ${}_3\Pi_3=27$이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$108-(4+20+27)=57$

답 ⑤

J022 | 답 ④

[풀이]

조건 (나), (다)에서

$f(3) \neq 1$, $f(4) \neq 6$

조건 (가)에서

$f(3)+f(4)$

$=2+3$ … (경우1)

$=3+2$ … (경우2)

$=4+1$ … (경우3)

$=5+5$ … (경우4)

$=6+4$ … (경우5)

조건 (나), (다)에서

(경우1): $f(1)<2$, $f(2)<2$, $3<f(5)$, $3<f(6)$

함수의 개수는 ${}_1\Pi_2 \times {}_3\Pi_2 = 1^2 \times 3^2 = 9$

(경우2): $f(1)<3$, $f(2)<3$, $2<f(5)$, $2<f(6)$

함수의 개수는 ${}_2\Pi_2 \times {}_4\Pi_2 = 2^2 \times 4^2 = 64$

(경우3): $f(1)<4$, $f(2)<4$, $1<f(5)$, $1<f(6)$

함수의 개수는 ${}_3\Pi_2 \times {}_5\Pi_2 = 3^2 \times 5^2 = 225$

(경우4): $f(1)<5$, $f(2)<5$, $5<f(5)$, $5<f(6)$

함수의 개수는 ${}_4\Pi_2 \times {}_1\Pi_2 = 4^2 \times 1^2 = 16$

(경우5): $f(1)<6$, $f(2)<6$, $4<f(5)$, $4<f(6)$

함수의 개수는 ${}_5\Pi_2 \times {}_2\Pi_2 = 5^2 \times 2^2 = 100$

따라서 함수 f의 개수는

$9+64+225+16+100=414$

답 ④

J023 | 답 ①

[풀이1]

조건 (가)에 의하여

$f(1) \geq 1$: $f(1)=1$, 2, 3, 4

$f(2) \geq \sqrt{2}$: $f(2)=2$, 3, 4

$f(3) \geq \sqrt{3}$: $f(3)=2$, 3, 4

$f(4) \geq 2$: $f(4)=2$, 3, 4

$f(5) \geq \sqrt{5}$: $f(5)=3$, 4

조건 (나)에 의하여 함수 f의 치역으로 가능한 집합은 다음의 네 가지 뿐이다.

$\{2, 3, 4\}$(…(경우1)), $\{1, 3, 4\}$(…(경우2)),

$\{1, 2, 4\}$(…(경우3)), $\{1, 2, 3\}$(…(경우4))

각 경우에 대한 함수 f의 개수는

• (경우1): $50+50=100$

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 2, 3, 4 중에서 하나에 대응되고, $f(5)$는 3, 4 중에서 하나에 대응된다.

$f(5)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 중에서 3에 대응되는 것의 개수는 0, 1, 2이다. 각각에 대하여 함수 f의 개수는

0개	${}_2\Pi_4 - 2 = 14$
1개	${}_4C_1({}_2\Pi_3 - 2) = 24$
2개	${}_4C_2 \times 2 = 12$

이고, 이를 모두 합하면 $14+24+12=50$이다.

$f(5)=4$인 경우

마찬가지의 방법으로 함수 f의 개수는 50이다.

• (경우2): ${}_2\Pi_4 - 2 = 2^4 - 2 = 14$

$f(1)=1$이고, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$는 3, 4 중에서 하나에 대응된다. 이때,

$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=3$,

$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=4$

인 경우는 제외한다.

• (경우3): ${}_2\Pi_3 - 1 = 2^3 - 1 = 7$

$f(1)=1$, $f(5)=4$이고, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 2, 4 중에서 하나에 대응된다. 이때,

$f(2)=f(3)=f(4)=2$

인 경우는 제외한다.

• (경우4): ${}_2\Pi_3 - 1 = 2^3 - 1 = 7$

$f(1)=1$, $f(5)=3$이고, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 2, 3 중에서 하나에 대응된다. 이때,

$f(2)=f(3)=f(4)=2$

인 경우는 제외한다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$100+14+7+7=128$

답 ①

[풀이2]

조건 (가)에 의하여

$f(1) \geq 1$: $f(1)=1$, 2, 3, 4

$f(2) \geq \sqrt{2}$: $f(2)=2$, 3, 4

$f(3) \geq \sqrt{3}$: $f(3)=2$, 3, 4

$f(4) \geq 2$: $f(4)=2$, 3, 4

$f(5) \geq \sqrt{5}$: $f(5)=3$, 4

조건 (가)와 조건 (나)의 부정을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하자.

조건 (나)의 부정은

'함수 f의 치역의 원소의 개수는 1 또는 2 또는 4이다.'

• (1) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 1인 경우

함수 f의 치역으로 가능한 집합은

$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$

각각의 치역에 대하여 함수 f의 개수는

$\{1\}$: 0
$\{2\}$: 0
$\{3\}$: 1
$\{4\}$: 1
- (2) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 2인 경우

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$
각각의 치역에 대하여 함수 f의 개수는
$\{1, 2\}$: 0
$\{1, 3\}$: 1
$(f(1)=1,\ f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=3)$
$\{1, 4\}$: 1
$(f(1)=1,\ f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=4)$
$\{2, 3\}$: ${}_2\Pi_4-1=15$
($f(5)=3$이다. $f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=3$인 경우는 제외)
$\{2, 4\}$: ${}_2\Pi_4-1=15$
($f(5)=4$이다. $f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=4$인 경우는 제외)
$\{3, 4\}$: ${}_2\Pi_5-2=30$
($f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=3$,
$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=4$
인 경우는 제외)
- (3) 함수 f의 치역의 원소의 개수가 4인 경우

$\{1, 2, 3, 4\}$: $12+12=24$
$f(1)=1$이고, $f(5)=3$ 또는 $f(5)=4$이다.
$f(5)=3$인 경우를 우선 생각하자.
$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 중에서 3에 대응되는 것의 개수는 0, 1이다. 각각에 대하여 함수 f의 개수는

0개	${}_2\Pi_3-2=6$
1개	${}_3C_1\times2=6$

이고, 이를 모두 합하면 $6+6=12$이다.
$f(5)=4$인 경우도 마찬가지의 방법으로 함수 f의 개수는 12이다.
(1), (2), (3)에서 함수 f의 개수는
$4\times3\times3\times3\times2$
$-(1+1+1+1+15+15+30+24)$
$=128$
답 ①

J024 | 답 600

[풀이1]
- (1) a끼리 이웃한 경우

문자열 aa를 하나의 문자 A로 간주하고 6개의 문자 A, b, b, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{6!}{2!}=360$이다.
- (2) b끼리 이웃한 경우

문자열 bb를 하나의 문자 B로 간주하고 6개의 문자 a, a, B, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{6!}{2!}=360$이다.
- (3) a끼리 이웃하고 b끼리 이웃한 경우

문자열 aa를 하나의 문자 A로 문자열 bb를 하나의 문자 B로 간주하고 5개의 문자 A, B, c, d, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $5!=120$이다.
(1), (2), (3)에서 구하는 경우의 수는
$360+360-120=600$
답 600

[풀이2]
▸ (경우1)
아래의 4개의 ○ 자리에 a, a를 나열할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2(=6)$이다.
○c○d○e○
예를 들어 다음과 같이 나열하였다고 하자.
○$ca$$d$○$ea$ 즉, $cadea$
아래의 6개의 ○ 자리에 b, b를 나열할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_6C_2(=15)$이다.
○c○a○d○e○a○
예를 들어 다음과 같이 나열하였다고 하자.
bc○abd○e○a○ 즉, $bcabdea$
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$6\times15\times3!=540$ …㉠
이때, $3!$은 c, d, e를 나열하는 경우의 수이다.
▸ (경우2)
이제 다음과 같은 경우를 생각하자.
아래의 4개의 ○ 자리에 aa를 나열할 경우의 수는 4이다.
○c○d○e○
예를 들어 다음과 같이 나열하였다고 하자.
○c○$daae$○ 즉, $cdaae$
아래의 5개의 ○ 자리에 b를 나열할 경우의 수는 5이다.
○c○d○$a\boxed{b}a$○e○ (←사각형 안에는 반드시 b가 들어가야 한다.)
예를 들어 다음과 같이 나열하였다고 하자.
○cbd○$a\boxed{b}a$○e○ 즉, $cbdabae$
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$4\times5\times3!=120$ …㉡

이때, $3!$은 c, d, e를 나열하는 경우의 수이다.
문제에서 주어진 7개의 문자를 일렬로 나열할 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{7!}{2!2!}=1260$

따라서 구하는 경우의 수는

$1260-(㉠+㉡)=600$

답 600

[풀이3]

'a끼리 또는 b끼리 서로 이웃한다.' 의 부정은 다음과 같다.
'a끼리 이웃하지 않고 b끼리 이웃하지 않는다.'
이제 네 개의 ○에 a끼리 이웃하지 않고 b끼리 이웃하지 않도록 a와 b를 나열하자.

○c○d○e○

- $abab$ 또는 $baba$: ${}_4C_1+{}_4C_1=8$

예를 들어 $c(abab)de$, $cde(baba)$, … 등이 가능하다.

- aba/b: ${}_4P_2=12$

예를 들어 $cd(aba)e(b)$, $c(b)d(aba)e$, … 등이 가능하다.

- bab/a: ${}_4P_2=12$

예를 들어 $(bab)cd(a)e$, $(a)cde(bab)$, … 등이 가능하다.

- ab/ab 또는 ab/ba 또는 ba/ab 또는 ba/ba:

${}_4C_2\times2!\times2!=24$

예를 들어 $c(ab)d(ab)e$, $(ba)c(ab)de$, $cd(ba)e(ba)$, … 등이 가능하다.

- $ab/a/b$ 또는 $ba/a/b$: ${}_4P_3\times2!=48$

예를 들어 $(ab)c(a)d(b)e$, $c(ba)d(b)e(a)$, … 등이 가능하다.

- $a/b/a/b$: ${}_4C_2=6$

예를 들어 $(a)c(b)d(a)e(b)$, $(b)c(b)d(a)e(a)$, … 등이 가능하다.

전체 경우의 수는

$\frac{7!}{2!2!}=1260$

따라서 구하는 경우의 수는

$1260-(8+12+12+24+48+6)\times3!=600$

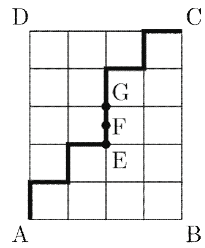
이때, $3!$은 c, d, e를 나열하는 경우의 수이다.

답 600

J025 | 답 36

[풀이]

갑과 을의 속력이 같으므로 갑과 을은 아래 그림처럼 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점에서 만난다. 이 교점을 F라고 하자. 그리고 두 교차로 E, G가 그림과 같다고 하자.



병의 이동경로는 다음과 같다.

B→E→F→G→D

병이 B에서 E까지 최단 거리로 이동할 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{4!}{2!2!}=6$

병이 E에서 G까지 최단 거리로 이동할 경우의 수는

1

병이 G에서 D까지 최단 거리로 이동할 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{4!}{2!2!}=6$

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6\times1\times6=36$

답 36

J026 | 답 90

[풀이1]

- (1) 십만 자리의 수가 4인 경우

4					

나머지 다섯 자리에 1, 2, 2, 5, 5를 배열할 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{5!}{2!2!}=30$

- (2) 십만 자리의 수가 5인 경우

5					

나머지 다섯 자리에 1, 2, 2, 4, 5를 배열할 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{5!}{2!}=60$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$30+60=90$

답 90

[풀이2] 시험장

주어진 6개의 수 중 3 보다 큰 수의 개수와 3 보다 작은 수의

개수가 같으므로 300000보다 큰 여섯 자리 자연수의 개수와 300000보다 작은 여섯 자리 자연수의 개수는 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{1}{2}\times\frac{6!}{2!2!}=90$

답 90

[참고]

300000 보다 작은 수는

1○○○○○: ○ 안에 2, 2, 4, 5, 5를 배열한다. (경우1)

2○○○○○: ○ 안에 1, 2, 4, 5, 5를 배열한다. (경우2)

300000 보다 큰 수는

4○○○○○: ○ 안에 1, 2, 2, 5, 5를 배열한다. (경우3)

5○○○○○: ○ 안에 1, 2, 2, 4, 5를 배열한다. (경우4)

(경우1), (경우3)의 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!}$ 으로 같고,

(경우2), (경우4)의 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}$ 으로 같으므로

300000 보다 작은 수의 개수와 300000 보다 큰 수의 개수는 같다.

J027 | 답 68

[풀이]

- (1) 보안카드의 8자리의 문자열에 '1'의 개수가 5인 경우

5개의 '1'과 3개의 '0'을 일렬로 배열하는 순열의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{8!}{5!3!}=56$

혹은 다음과 같이 조합의 수로 경우의 수를 구해도 좋다.

서로 다른 8개의 자리 중에서 '1'이 들어갈 5개의 자리를 택하는 조합의 수는

${}_8C_5=56$

- (2) 보안카드의 8자리의 문자열의 처음 4자리가 '0110'인 경우

나머지 4자리에 '0', '1'에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 배열하는 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

${}_2\Pi_4=2^4=16$

- (3) 보안카드의 8자리의 문자열이 (1), (2)를 동시에 만족하는 경우

나머지 4자리에 3개의 '1'과 1개의 '0'을 일렬로 배열하는 순열의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{4!}{3!}=4$

혹은 다음과 같이 조합의 수로 경우의 수를 구해도 좋다.

서로 다른 4개의 자리 중에서 '1'이 들어갈 3개의 자리를 택하는 조합의 수는

${}_4C_3=4$

(1), (2), (3)에서 서로 다른 보안카드의 개수는

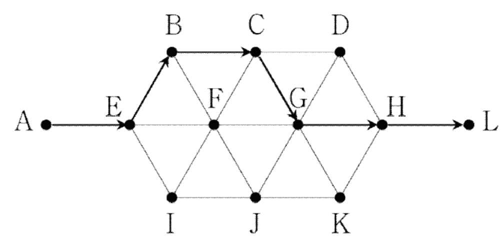
$56+16-4=68$

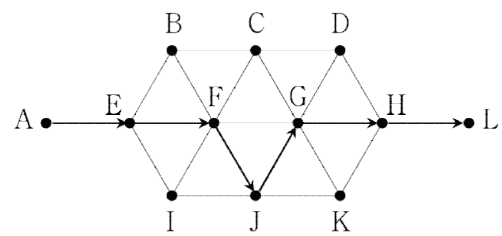
답 68

J028 | 답 12

[풀이]

예를 들어 아래 그림과 같이 이동하면 된다.





⋮

지점 E에서 지점 H까지 →의 방향으로 2번, ↗의 방향으로 1번, ↘의 방향으로 1번 이동해야 한다.

구하는 경우의 수는 →, →, ↗, ↘를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

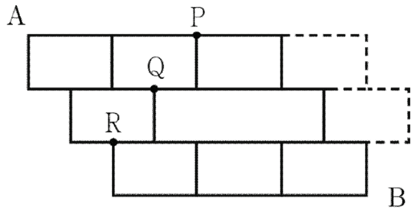
$\frac{4!}{2!}=12$

답 12

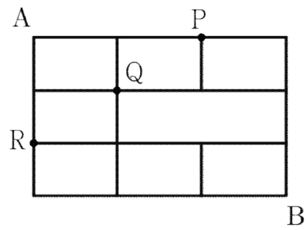
J029 | 답 ①

[풀이1]

세 교차로 P, Q, R이 아래 그림과 같다고 하자.



우리에게 익숙한 모양으로 바꾸면 다음과 같다.



같은 것이 있는 순열의 수와 합의 법칙, 곱의 법칙에 의하여

$A \to P \to B$: $1 \times 2 = 2$

$A \to Q \to B$: $2 \times \left(1 + \dfrac{3!}{2!}\right) = 8$

$A \to R \to B$: $1 \times \dfrac{4!}{3!} = 4$

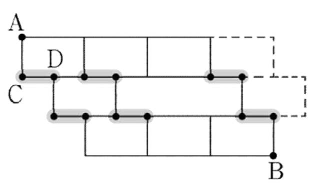
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$2 + 8 + 4 = 14$

답 ①

[참고]

지점 A에서 지점 B까지 도로를 따라 최단 거리로 가기 위해서는 항상 → 또는 ↓ 방향으로만 움직여야 한다. 따라서 아래 그림처럼 점선으로 표시된 도로는 지날 수 없다.

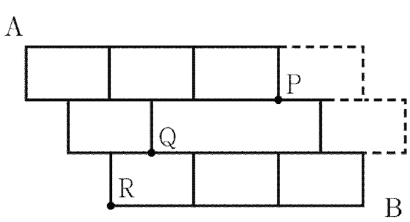


(단, C, D는 도로의 교차로이다.)

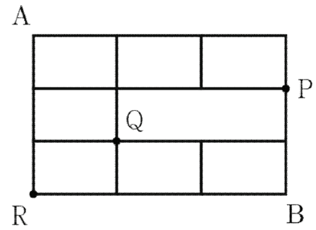
만약 지점 C를 지난다면 반드시 지점 D를 지나게 된다. 따라서 이 두 지점을 겹쳐서 그릴 수 있다. 나머지의 10개의 교차로도 동일한 이유로 두 지점씩 겹쳐서 그릴 수 있다.

[풀이2]

세 교차로 P, Q, R이 아래 그림과 같다고 하자.



우리에게 익숙한 모양으로 바꾸면 다음과 같다.



같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$A \to P \to B$: $\dfrac{4!}{3!} \times 1 = 4$

$A \to Q \to B$: $\dfrac{3!}{2!} \times \dfrac{3!}{2!} = 9$

$A \to R \to B$: $1 \times 1 = 1$

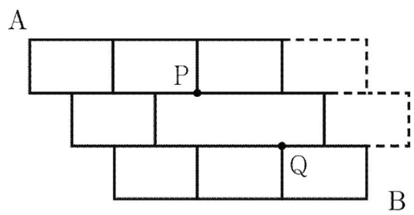
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$4 + 9 + 1 = 14$

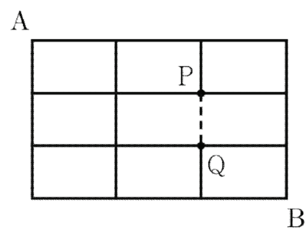
답 ①

[풀이3]

두 교차로 P, Q가 아래 그림과 같다고 하자.



우리에게 익숙한 모양으로 바꾸면 다음과 같다.



두 교차로 P와 Q가 연결되었을 때, 지점 A에서 지점 B까지 최단거리로 가는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{6!}{3!3!} = 20$

두 교차로 P와 Q가 연결되었을 때, 아래의 경로를 따라 최단거리로 가는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$A \to P \to Q \to B$: $\dfrac{3!}{2!} \times 1 \times 2 = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

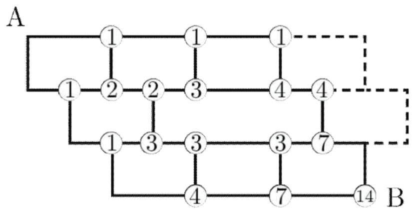
$20 - 6 = 14$

답 ①

[풀이4] 시험장

지점 A에서 각각의 교차로까지 도로를 따라 최단거리로 가는

경우의 수를 합의 법칙을 이용하여 구하면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 14이다.

답 ①

J030 | 답 34

[풀이]

• (1) 4분 음표(♩)를 4개 사용하는 경우

경우의 수는 1이다.

• (2) 4분 음표(♩)를 3개 사용하는 경우

8분 음표(♪)는 2개 사용해야 한다.

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{5!}{3!2!}=10$

• (3) 4분 음표(♩)를 2개 사용하는 경우

8분 음표(♪)는 4개 사용해야 한다.

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{6!}{2!4!}=15$

• (4) 4분 음표(♩)를 1개 사용하는 경우

8분 음표(♪)는 6개 사용해야 한다.

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{7!}{6!}=7$

• (5) 4분 음표(♩)를 사용하지 않는 경우

8분 음표(♪)는 8개 사용해야 한다.

경우의 수는 1이다.

(1)~(5)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$1+10+15+7+1=34$

답 34

[참고]

이 문제는 아래와 같은 문제이다.

'8개의 계단을 한 번에 1계단 혹은 2계단씩 오를 수 있다. 이 계단을 오르는 경우의 수를 구하시오.'

제1항과 제2항이 각각 1, 2인 피보나치수열을 쓰면

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ⋯

따라서 구하는 경우의 수는 34(제8항)이다.

J031 | 답 14

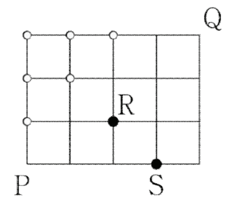
[풀이1]

주어진 문제를 최단거리의 개수를 구하는 문제로 치환하여 생각하자.

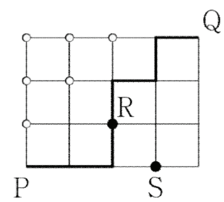
아래와 같은 도로망이 있다.

P 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구하자.

(단, '○' 표시가 된 교차로는 지날 수 없다.)



오른쪽(→)으로 한 칸 가는 것을 A가 이기는 것으로 위쪽(↑)으로 한 칸 가는 것을 B가 이기는 것으로 하자.



예를 들어 위와 같은 경로로 이동하는 것은

A, A, B, B, A, B, A

의 순서대로 이기는 것과 같다.

이는 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시킨다.

• (1) P→R→Q 의 경로로 가는 경우

같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에

의하여 경우의 수는

$1\times 2\times\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)=10$

• (2) P→S→Q 의 경로로 가는 경우

같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에

의하여 경우의 수는

$1\times\frac{4!}{3!}=4$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여

$10+4=14$

답 14

[참고]

P 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 갈 때, 반드시 R 지점 또는 S지점을 지나야 한다. 하지만 R 지점과 S지점을 모두 지날 수는 없다.(만약 이 두 지점을 모두 지난다면 최단 거리가 아니다.) 따라서 'P→R→Q 의 경로' 또는 'P→S→Q 의 경로' 만이 가능하다.

[풀이2]

A가 이길 경우에는 아래의 표에 ‘A’를 기록하고,
B가 이길 경우에는 아래의 표에 ‘B’를 기록하자.

1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일

• (1) A가 마지막으로 이긴 날이 ‘4일’인 경우

1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
A	A	A	A	B	B	B

경우의 수는 1이다.

• (2) A가 마지막으로 이긴 날이 ‘5일’인 경우

1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
A	A	A	B	A	B	B
A	A	B	A	A	B	B
A	B	A	A	A	B	B

• (3) A가 마지막으로 이긴 날이 ‘6일’인 경우

1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
A	B	A	B	A	A	B
A	B	A	A	B	A	B
A	A	B	B	A	A	B
A	A	B	A	B	A	B
A	A	A	B	B	A	B

• (4) A가 마지막으로 이긴 날이 ‘7일’인 경우

1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
A	A	A	B	B	B	A
A	A	B	A	B	B	A
A	A	B	B	A	B	A
A	B	A	A	B	B	A
A	B	A	B	A	B	A

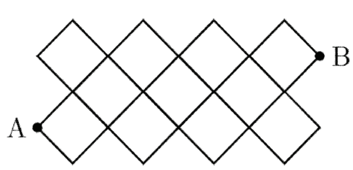
(1)~(4)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$1+3+5+5=14$

답 14

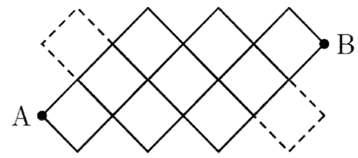
J032 | 답 40

[풀이1] ★

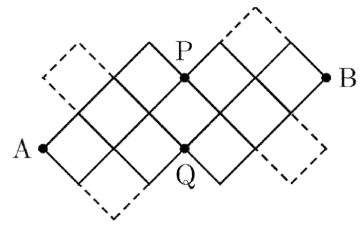
문제에서 주어진 산책로와 아래의 도로망은 연결 상태가 같다.



최단 거리로 움직이므로 지나지 않는 길을 제외하면 아래 그림과 같다.



2개의 교차로 P, Q는 각각 아래 그림과 같다고 하자.



• (1) 교차로 P를 지나는 경우

같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
경우의 수는 $\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)=20$이다.

• (2) 점 Q를 지나는 경우

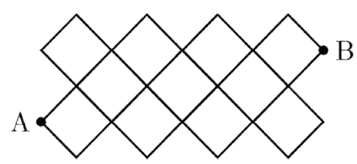
같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
경우의 수는 $\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)\times\frac{4!}{3!}=20$이다.

(1)과 (2)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$20+20=40$

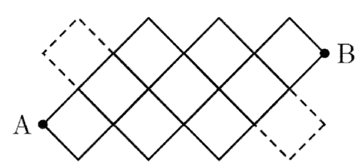
답 40

[풀이2] ★

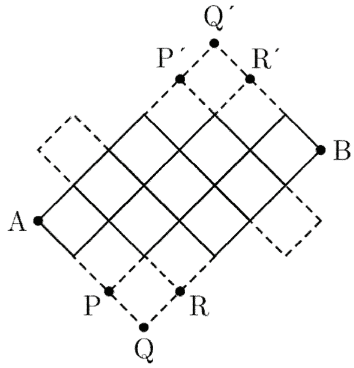
문제에서 주어진 산책로와 아래의 도로망은 연결 상태가 같다.



최단 거리로 움직이므로 지나지 않는 길을 제외하면 아래 그림과 같다.



6개의 교차로 P, Q, R, P′, Q′, R′은 각각 아래 그림과 같다고 하자.



3개의 교차로 P, Q, R을 지나는 경우를 각각 P, Q, R이라고 하자. 같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$n(P)=6$, $n(Q)=1$, $n(R)=4$,

$n(P\cap Q)=1$, $n(Q\cap R)=1$, $n(R\cap P)=2$,

$n(P\cap Q\cap R)=1$

이므로

$$n(P\cup Q\cup R)=n(P)+n(Q)+n(R)$$
$$-n(P\cap Q)-n(Q\cap R)$$
$$-n(R\cap P)+n(P\cap Q\cap R)=8$$

3개의 교차로 P′, Q′, R′을 지나는 경우를 각각 P', Q', R'이라고 하면 마찬가지의 방법으로

$n(P'\cup Q'\cup R')=8$

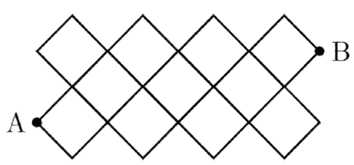
따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{5!3!}-2\times 8=40$$

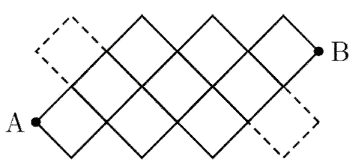
답 40

[풀이3] 시험장 ★

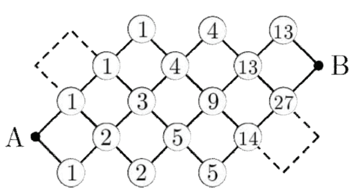
문제에서 주어진 산책로와 아래의 도로망은 연결 상태가 같다.



최단 거리로 움직이므로 지나지 않는 길을 제외하면 아래 그림과 같다.



A 지점에서 각각의 교차로까지 도로를 따라 최단거리로 가는 경우의 수를 합의 법칙을 이용하여 구하면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$13+27=40$

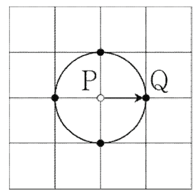
답 40

J033 | 답 19

[풀이1] ★

문제에서 주어진 '점프' 에 대한 정의를 평행이동의 관점에서 해석하면 다음과 같다.

- 선분 PQ의 길이가 1인 경우



(단, ∘는 출발한 점, •는 도착한 점)

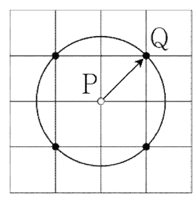
→ : x축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

← : x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.

↑: y축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

↓: y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.

- 선분 PQ의 길이가 $\sqrt{2}$인 경우



(단, ∘는 출발한 점, •는 도착한 점)

↗: x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

↘: x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.

↖: x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한다.

↙: x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.

점 A$(-2,\ 0)$을 x축의 방향으로 4만큼 평행이동시키면 점 B$(2,\ 0)$이다.

점 A에서 점 B까지 4번만 점프하여 이동하기 위해서는 반드시 → 또는 ↗ 또는 ↘ 의 방향으로 점프해야 한다.

점프 →, ↗, ↘을 각각 a번, b번, c번 한다고 하자.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$a+b+c=4$, $b=c$ $(a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0)$

(만약 $b\ne c$이면 점 A에서 4번만 점프하여 도착한 점의 y좌표는 0일 수 없다.)

연립하면

$a+2b=4$ $(a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0)$

풀면

$(a, b)=(4, 0)$ 또는 $(a, b)=(2, 1)$ 또는

$(a, b)=(0, 2)$

• (1) 순서쌍 (a, b, c)가 $(4, 0, 0)$인 경우

→, →, →, →을 나열하는 경우의 수는 1이다.

• (2) 순서쌍 (a, b, c)가 $(2, 1, 1)$인 경우

→, →, ↗, ↘을 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!}=12$이다.

• (3) 순서쌍 (a, b, c)가 $(0, 2, 2)$인 경우

↗, ↗, ↘, ↘을 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{4!}{2!2!}=6$이다.

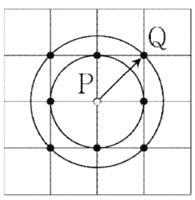
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$1+12+6=19$

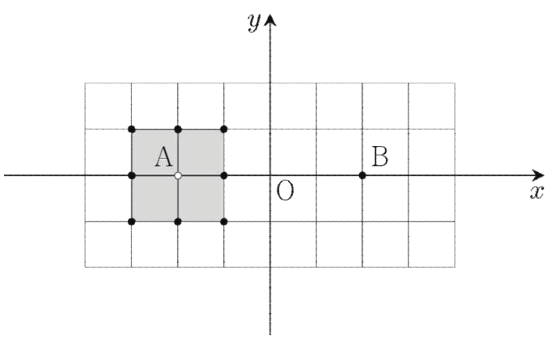
답 19

[풀이2]

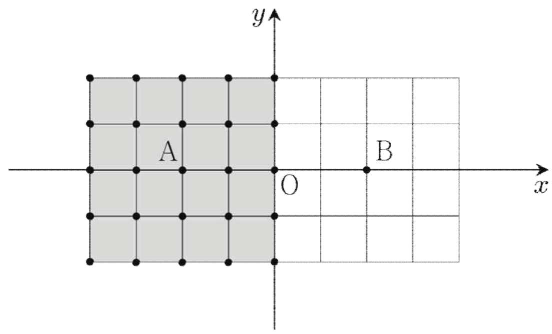
점 P에서 한 번의 '점프'로 이동할 수 있는 점 Q는 아래 그림과 같다. (총 8개의 점)



점 A에서 1번 '점프'할 때, 아래 그림처럼 8개의 점으로 이동할 수 있다.

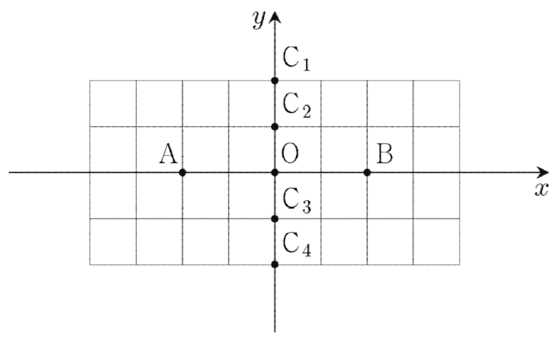


점 A에서 2번 '점프'할 때, 아래 그림처럼 25개의 점으로 이동할 수 있다.



점 A에서 4번 '점프'하여 점 B에 도착하려면 점 A에서 2번 '점프'하여 y축 위의 점에 도착해야 한다.

원점을 제외한 y축 위의 4개의 도착점을 각각 C_1, C_2, C_3, C_4라고 하자.



• (1) $A \to C_1 \to B$인 경우

점 A에서 2번 '점프'하여 점 C_1에 도착하는 방법은

(↗, ↗)

점 C_1에서 2번 '점프'하여 점 B에 도착하는 방법은

(↘, ↘)

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $1\times1=1$

• (2) $A \to C_2 \to B$인 경우

점 A에서 2번 '점프'하여 점 C_2에 도착하는 방법은

(↗, →) 또는 (→, ↗)

점 C_2에서 2번 '점프'하여 점 B에 도착하는 방법은

(→, ↘) 또는 (↘, →)

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $2\times2=4$

• (3) $A \to O \to B$인 경우

점 A에서 2번 '점프'하여 점 O에 도착하는 방법은

(→, →) 또는 (↗, ↘) 또는 (↘, ↗)

점 O에서 2번 '점프'하여 점 B에 도착하는 방법은

(→, →) 또는 (↗, ↘) 또는 (↘, ↗)

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $3\times3=9$

• (4) $A \to C_3 \to B$인 경우

(2)와 마찬가지의 방법으로 경우의 수를 구하면 4이다.

• (5) $A \to C_4 \to B$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수를 구하면 1이다.

(1)~(5)는 동시에 발생하지 않으므로

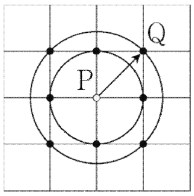
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$1+4+9+4+1=19$

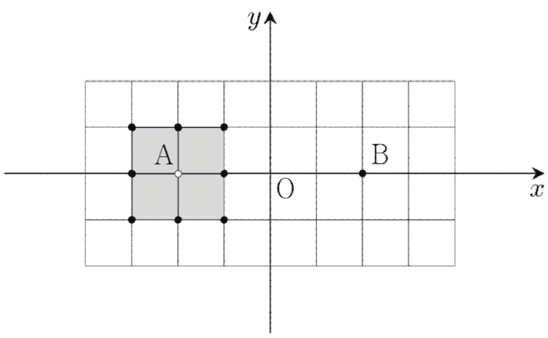
답 19

[풀이3]

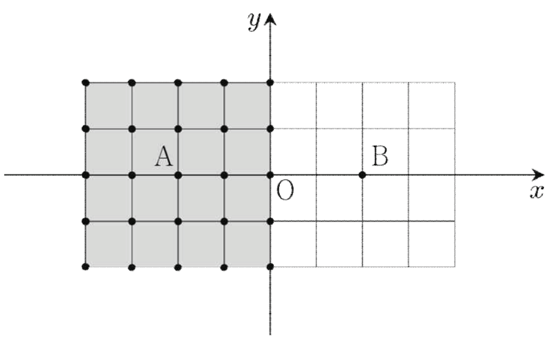
점 P에서 한 번의 '점프'로 이동할 수 있는 점 Q는 아래 그림과 같다. (총 8개의 점)



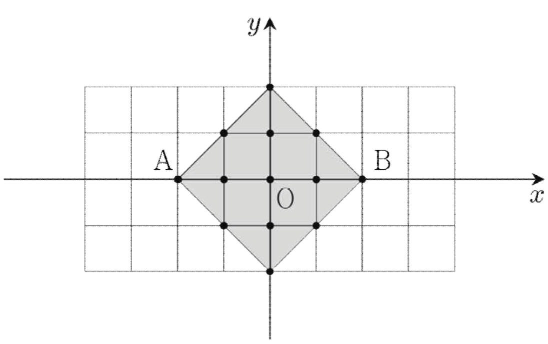
점 A에서 1번 '점프' 할 때, 아래 그림처럼 8개의 점으로 이동할 수 있다.



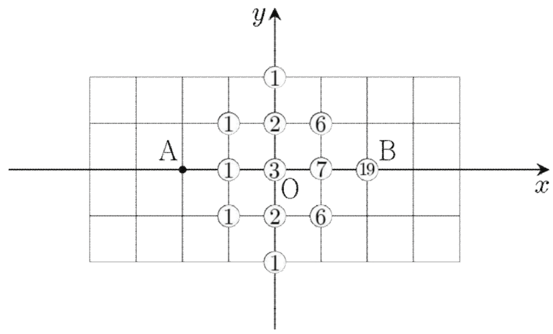
점 A에서 2번 '점프' 할 때, 아래 그림처럼 25개의 점으로 이동할 수 있다.



점 A에서 4번 '점프' 하여 점 B에 도착하려면 점 A에서 2번 '점프' 하여 y축 위의 점에 도착해야 한다. 점 A에서 점 B까지 4번만 '점프' 하여 이동할 때, 지날 수 있는 점은 아래 그림과 같다.



점 A에서 점 B까지 4번만 '점프' 하여 이동하는 경우의 수를 합의 법칙을 이용하여 구하면 다음과 같다.



답 19

J034 | 답 90

[풀이1] ★

'국어A'와 '국어B'를 같은 것으로 간주하고,
'영어A'와 '영어B'를 같은 것으로 간주하고,
'수학A'와 '수학B'를 같은 것으로 간주하자.

이 상태에서 6개의 과제를 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$

예를 들어 아래와 같이 6개의 과제가 나열되었다고 하자.

국어→영어→영어→수학→국어→수학

이제 앞에 오는 과목에 'A', 뒤에 오는 과목에 'B'를 붙이면 된다.

국어A→영어A→영어B→수학A→국어B→수학B

답 90

[풀이2] ★

우선 국어A, 국어B의 제출순서를 정할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_6C_2$이다.

예를 들어 아래와 같다고 하자.

국어A		국어B			

영어A, 영어B의 제출순서를 정할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다.

예를 들어 아래와 같다고 하자.

국어A	영어A	국어B		영어B	

수학A, 수학B의 제출순서를 정할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_2C_2$이다.

예를 들어 아래와 같다고 하자.

국어A	영어A	국어B	수학A	영어B	수학B

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2=15\times6\times1=90$

답 90

J035 | 답 ③

[풀이1]

이 회사원이 처리해야 할 업무를 각각 A, B, c, d, e, f라고 하자.

A, B를 포함한 4가지 업무를 택하는 경우의 수는

c, d, e, f에서 2가지 업무를 택하는 조합의 수 ${}_4C_2$와 같다.

예를 들어 A, B, c, f를 택하였다고 하자.

A와 B를 각각 ○, ○로 두자. (즉, 같은 것으로 간주한 것이다.) ○, ○, c, f를 나열하는 방법의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{4!}{2!}=12$

예를 들어

c, ○, f, ○은 c, A, f, B,

○, f, c, ○은 A, f, c, B

에 대응된다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_2\times\frac{4!}{2!}=72$이다.

답 ③

[풀이2]

이 회사원이 처리해야 할 업무를 각각 A, B, c, d, e, f라고 하자.

A, B를 포함한 4가지 업무를 택하는 경우의 수는

c, d, e, f에서 2가지 업무를 택하는 조합의 수 ${}_4C_2$와 같다.

예를 들어 A, B, c, f를 택하였다고 하자.

이제 네 업무 A, B, c, f의 처리 순서를 정하면 된다.

즉, 네 문자 A, B, c, f의 배열 순서를 정하면 된다.

주어진 조건에 의하여 A가 B의 왼쪽에 와야 한다.

A가 B의 왼쪽에 올 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다.

예를 들면 다음과 같은 경우가 가능하다.

B○A○

나머지 두 자리에 c, f를 배열할 경우의 수는

순열의 수에 의하여 $2!$이다. 예를 들어

BcAf 또는 BfAc

곱의 법칙에서 구하는 경우의 수는 ${}_4C_2\times{}_4C_2\times2!=72$이다.

답 ③

J036 | 답 ③

[풀이1]

A와 B를 모두 ◎로 두고(즉, 같은 것으로 간주하고), ◎, ◎, C, D, E를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!}$

이다. 예를 들어

◎, E, D, ◎, C는

A(50), E(50), D(100), B(150), C(200),

E, C, ◎, ◎, D는

E(50), C(50), A(100), B(150), D(200)

에 각각 대응된다.

그런데 A, B, D, E, C의 경우

A(50), B(50), D(100), E(150), C(200)

이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

이때, 경우의 수는 $3!$이다.

($\because$ ◎, ◎, $\underbrace{\text{C, D, E}}_{\text{경우의 수 : }3!}$에서 ◎을 고정시키고, 나머지 세 개의 문자를 일렬로 나열한다.)

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}-3!=54$

답 ③

[풀이2]

• (1) A가 '가' 또는 '나'에 발령을 받을 경우

B는 '다', '라', '마' 중에서 한 곳에 발령을 받으면 된다.

그리고 C, D, E는 남은 세 곳으로 발령을 받으면 된다.

경우의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$2\times3\times3!=36$

• (2) A가 '가'와 '나'에 발령을 받지 않을 경우

A, B는 각각

'다', '라' 또는 '다', '마' 또는 '라', '마'

에 발령을 받으면 된다.

그리고 C, D, E는 남은 세 곳으로 발령을 받으면 된다.

경우의 수는 조합의 수, 순열의 수, 곱의 법칙에 의하여

${}_3C_2\times3!=18$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$36+18=54$

답 ③

[풀이3] 시험장

A보다 B가 본사로부터 거리가 먼 지사의 지사장이 되는 경우

의 수를 p라고 하면 B보다 A가 본사로부터 거리가 먼 지사의 지사장이 되는 경우의 수는 p이다. 그리고 A와 B가 본사로부터 거리가 같은 지사의 지사장이 되는 경우의 수를 q라고 하면 다음의 등식이 성립한다.

$2p+q=$(전체 경우의 수)

q와 '전체 경우의 수'를 구하자.

$q=$(A와 B가 각각 '가, 나' 또는 '나, 가'에 지사장으로 발령받을 경우의 수)

$=2!\times3!=12$

이때, $2!$은 A와 B가 발령받을 경우의 수이고, $3!$은 C, D, E가 발령받을 경우의 수이다.

순열의 수에 의하여

(전체 경우의 수)

$=5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$p=\dfrac{120-12}{2}=54$

답 ③

J037 | 답 ①

[풀이1]

양 끝을 제외한 8개의 자리에 흰색 깃발 3개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 나열하면 된다.

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{8!}{3!5!}=56$

답 ①

[풀이2]

양 끝을 제외한 8개의 자리에 흰색 깃발 3개, 파란색 깃발 5개를 일렬로 나열하면 된다.

다시 말하면 양 끝을 제외한 8개의 자리 중에서 3개의 자리를 선택하여 흰색 깃발 3개를 나열하면 된다.

경우의 수는 조합의 수에 의하여

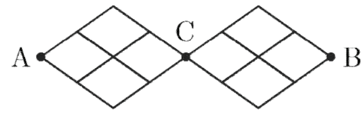
${}_8C_3=56$

답 ①

J038 | 답 ④

[풀이1]

C지점은 다음 그림과 같다고 하자.



A지점에서 C지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$이다.

C지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$이다.

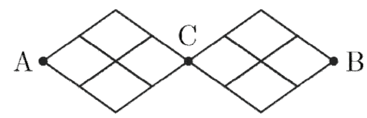
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6\times6=36$

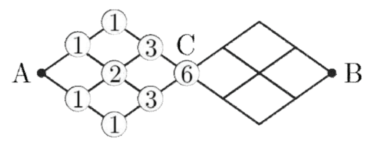
답 ④

[풀이2]

C지점은 다음 그림과 같다고 하자.



A지점에서 각각의 교차로까지 도로를 따라 최단거리로 가는 경우의 수를 합의 법칙을 이용하여 구하면 다음과 같다. (단, C지점까지만 생각하자.)



A지점에서 C지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 6이고, 마찬가지의 방법으로 C지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 6이다.

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

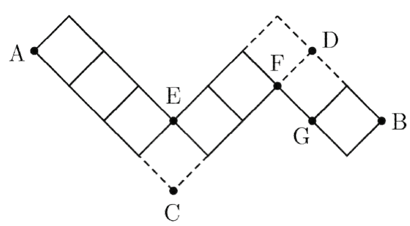
$6\times6=36$

답 ④

J039 | 답 ②

[풀이1]

E지점, F지점, G지점이 아래 그림과 같다고 하자.



C지점을 지나지 않으려면 E지점을 반드시 지나야 하고, D지점을 지나지 않으려면 F지점과 G지점을 반드시 지나야 한다.

A지점에서 E지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2022 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2022 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통 〉

• 공통 1 : 문제를 보자마자 $a^2 - b^2$이 떠올라야 함. 1번부터 '이 시험은 교과서/기출문제를 풀었던 기억으로 푼다.' 를 의도적으로 말하고 있음. 즉, '정해진 풀이를 따르지 않으면 망한다.' 를 노골적으로 표현.
• 공통 8 : 이차함수의 정적분 → 대칭축을 생각한다.
• 공통 13 : 그림을 그릴 수 없으니, 처음부터 끝까지 계산. 로그문제에서 a^b이 나오면 $\log a^b = b\log a$ 생각이 들어야.
• 공통 14 : x축에서 점 P를 움직이는게 우선.
• 공통 15 : 역대 평가원 기출 중에서 " 코사인법칙에 의하여 " 란 문구가 등장한 첫 번째 문제. 어떤 공식을 써야 하는지 알려 주었는데. 어려운 문제일리 없다. 읽는데 4점.
• 공통 21 : $2+2^2+2^3 < 2^4$과 같은 계산을 해보았는가? '기하급수적으로 빨라진다.' 의 의미를 아는가를 평가.
• 공통 22 : $f(1) = f(4)$에서 $f(x)$의 그래프의 개형이 바로 나와야 함. 삼차함수의 비율관계.

〈 확률과 통계 〉

• 확률과 통계 28 : 분할, 여사건 모두 가능. 이 문제 보다 경우 구분이 많은 함수 개수 세는 문제는 기출에 널려있음.
• 확률과 통계 29 : 적분 기호 쓰면 좀 더 편하긴 한데. $y = k$ 그리면 더 단순하게 해결 가능.
• 확률과 통계 30 : 답을 맞히기 상당히 어려운, 실수하기 딱 좋은 문제. 수형도 그냥 다 그리는 편이 나음.

〈 미적분 〉

• 미적분 28 : 평행이동/대칭성 & 기출을 풀었던 경험. 풀이 중간 과정에서 답을 바로 알 수 있음.
• 미적분 29 : 계산이 복잡하니. 극한의 근사적 계산으로 접근하면 실수 없이 빠르게 계산 가능.
• 미적분 30 : (나)의 항등식에 $x = 1,\ 2,\ 4$ 대입하여 점찍고, 확대해서 그리면 끝. 역함수의 정적분 계산 말고, 그림으로 해결.

〈 기하 〉

• 기하 26 : 동일하게 쌍곡선으로 수능에 출제된 적이 있음. 원 밖의 점에서 접선 2개 그으면 합동인 직각삼각형 2개 찾는다.
• 기하 28 : 빗변 주면, 직각삼각형 그리고, 기울기 없으니, 피타 쓰고, 포물선의 정의대로 선분 그으면 직각 안에 수선 그려지니 닮음 쓰고.
• 기하 29 : 문제에서 원 위의 점 주었으니. (나)는 직선(선분)일 수밖에. 이 유형의 문제 중에서도 중급 수준.
• 기하 30 : 평가원 기출 중, 구/직선 정사영 내려서 점의 이동 관찰하는 문제의 확장판. 풀다보면 이면각 보다는 정사영이 좀 더 편하긴 하지만. 이면각의 정의에 의한 풀이도 계산이 거의 없음. 기존 공도 기출과 비교하여 중급 수준.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정		
1991	실험평가(1차)	1990년 12월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월
1995	대학수학능력	1994년 11월
1996	대학수학능력	1995년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월
1998	대학수학능력	1997년 11월
6차 교육과정		
1999	대학수학능력	1998년 11월
2000	대학수학능력	1999년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월
2002	대학수학능력	2001년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월
7차 교육과정		
2005	예비시행	2003년 12월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월
2005	대학수학능력	2004년 11월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월
2006	대학수학능력	2005년 11월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월
2009	모의평가(9월)	2008년 9월
2009	대학수학능력	2008년 11월
2010	모의평가(6월)	2009년 6월
2010	모의평가(9월)	2009년 9월
2010	대학수학능력	2009년 11월
2011	모의평가(6월)	2010년 6월
2011	모의평가(9월)	2010년 9월
2011	대학수학능력	2010년 11월

학년도	시험	실시년도/월
2007개정 교육과정		
2012	모의평가(6월)	2011년 6월
2012	모의평가(9월)	2011년 9월
2012	대학수학능력	2011년 11월
2014	예비시행	2012년 5월
2013	모의평가(6월)	2012년 6월
2013	모의평가(9월)	2012년 9월
2013	대학수학능력	2012년 11월
2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2014	대학수학능력	2013년 11월
2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2015	대학수학능력	2014년 11월
2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2016	대학수학능력	2015년 11월
2009개정 교육과정		
2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2017	대학수학능력	2016년 11월
2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2018	대학수학능력	2017년 11월
2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2019	대학수학능력	2018년 11월
2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2020	대학수학능력	2019년 11월
2015개정 교육과정		
2021	예시문항	2020년 5월
2021	모의평가(6월)	2020년 6월
2021	모의평가(9월)	2020년 9월
2021	대학수학능력	2020년 11월
2022	모의평가(6월)	2021년 6월
2022	모의평가(9월)	2021년 9월
2022	대학수학능력	2021년 11월

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다. 그리고 모든 풀이를 보여준다는 의미에서 교육과정 외의 풀이도 수록하였으나, 이를 반드시 읽어야(공부해야) 하는 것은 아닙니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)
[풀이] (교육과정 외)
[참고] (교육과정 외)

목 차

미적분

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

G 수열의 극한

- 2015개정 교육과정

○ 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식은 수학 I 삼각함수 단원을 따름
○ 삼각형, 사각형, 원, 부채꼴의 기하학적 성질은 개정 중학교 수학 교과서를 따름
○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록
○ 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 포함
○ 라디안 표현이 포함된 문제 포함

G. 수열의 극한값의 계산

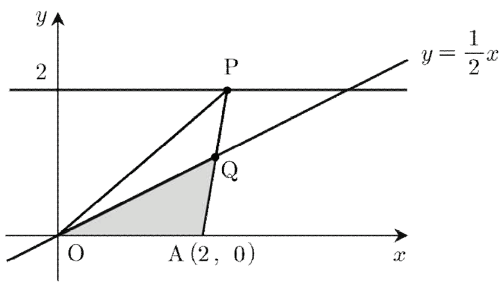
G001

○○○
(1995－인문예체능26/자연26)

좌표평면 위에 두 점 O$(0,\ 0)$, A$(2,\ 0)$과 직선 $y=2$ 위를 움직이는 점 P$(t,\ 2)$가 있다.

선분 AP와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점을 Q라 하자.

△QOA의 넓이가 △POA의 넓이의 $\frac{1}{3}$일 때 t의 값을 t_1, $\frac{1}{2}$일 때 t의 값을 t_2, $\cdots$, $\frac{n}{n+2}$일 때 t의 값을 t_n이라 하면 $\lim_{n\to\infty} t_n$의 값은? [2점]



① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

G002

○○○
(1997－인문예체능14/자연14)

모든 실수에 대하여 정의된 함수 $f(x)$는 $f(x)=x^2$ $(-1\le x\le 1)$과 $f(x+2)=f(x)$를 만족시킨다. 좌표평면 위에서 각 자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{1}{2n}x+\frac{1}{4n}$과 함수 $y=f(x)$의 그래프와의 교점의 개수를 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [2점]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

G003

○○○
(2000－인문21)

자연수 n에 대하여, 두 곡선

$$y=x^2-2,\ y=-x^2+\frac{2}{n^2}$$

로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

① $\frac{16}{3}$　② $\frac{14}{3}$　③ 4

④ $\frac{10}{3}$　⑤ $\frac{8}{3}$

G004

○○○
(2005(6)－나형9)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{2}\pi\right)$의 값은? [3점]

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ 1

G005

○○○
(2005(6)－나형15)

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$$
$$b_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a_1=b_1$일 때, $a_n=b_n$
ㄴ. $a_1=0,\ b_1=1$일 때, $a_{n+1}>a_n$
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=1$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G006

○○○
(2005(6)-가형14)

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x+1)=f(x)$를 만족시키고, 0과 1 사이에서 다음과 같이 정의된다.

$$f(x)=\begin{cases} x & \left(0 \le x \le \dfrac{1}{2}\right) \\ 1-x & \left(\dfrac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases}$$

〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f\left(f\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)=f\left(\dfrac{2}{3}\right)$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2}$

ㄷ. 수열 $\left\{f\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{2}\right)\right\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G007

○○
(2005(9)-나형3)

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 6인 등차수열이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

G008

○○
(2005-나형28)

이차함수 $f(x)=3x^2$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(n,\ f(n))$과 $\mathrm{Q}(n+1,\ f(n+1))$ 사이의 거리를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [4점]

① 9 ② 8 ③ 7
④ 6 ⑤ 5

G009

○ (2006(6)-나형3)

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

G010

○○ (2006(6)-나형6)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$S_n = 2n^2 - n$일 때, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{na_n}{S_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

G011

○ (2006(9)-나형19)

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+15n+13}-\sqrt{n^2-13n})$

의 값을 구하시오. [3점]

G012

○○ (2006-나형7)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n < a_n < n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

G013

○○ (2007(9)-나형21)

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}=5$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [4점]

G014

○○
(2008(6)−나형7)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1}=\frac{3}{4}$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

G015

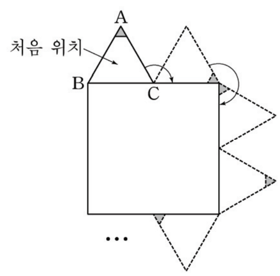
○○
(2008(6)−나형30)

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=4$, $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=28$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [4점]

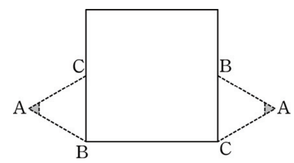
G016

○○○
(2008(6)−가형17/나형17)

한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변위에 놓이는 횟수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=1$일 때, [그림2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1=2$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}$의 값은? [4점]



[그림1]



[그림2]

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

G017

●●●
(2009(6)−나형29)

자연수 n에 대하여 집합 $\{k \mid 1 \le k \le 2n,\ k$는 자연수$\}$의 세 원소 a, b, $c(a<b<c)$가 등차수열을 이루는 집합 $\{a,\ b,\ c\}$의 개수를 T_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

G018

○○○
(2009(9)−나형29)

자연수 n에 대하여 이차함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

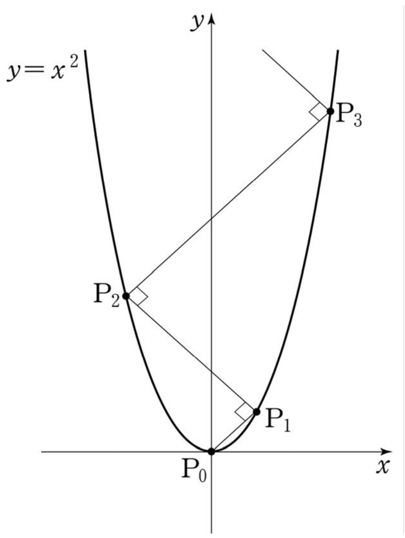
G019 ●●●

(2009-가형13/나형13)

자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$이다. (나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다. (단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

$l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n}$의 값은? [3점]



① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

G020 ○○

(2010(6)-나형5)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$의 값은? [3점]

(가) $20-\dfrac{1}{n}<a_n+b_n<20+\dfrac{1}{n}$ (나) $10-\dfrac{1}{n}<a_n-b_n<10+\dfrac{1}{n}$

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

G021 ○○

(2010(6)-나형7)

수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=\log\dfrac{n+1}{n}$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

G022

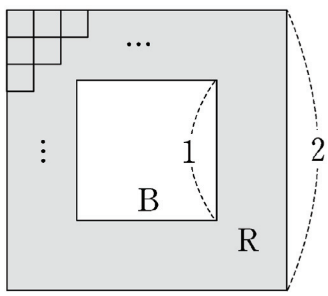
★★★
(2010-나형25)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여 있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자.

2 이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

(가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다.
(나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

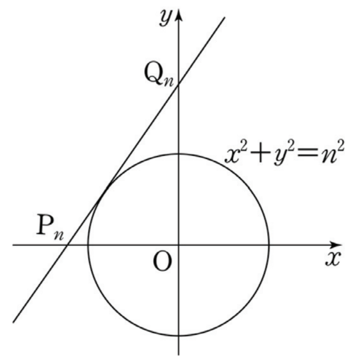
이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2 = 12$, $a_3 = 20$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}} = c$라 할 때, $100c$의 값을 구하시오. [4점]



G023

○○
(2011(9)-가형9/나형9)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. $l_n = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}$의 값은? [4점]



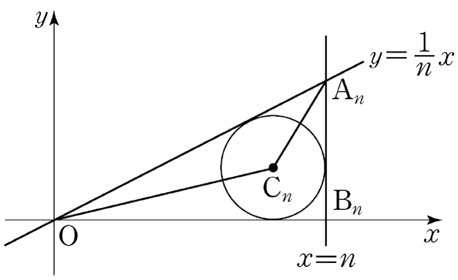
① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

G024

●●● (2011-나형14)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 $x=n$이 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 B_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OC}_n$의 넓이를 S_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

G025

○○ (2012(9)-가형25/나형25)

수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=2,\ \lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n=7$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$의 값을 구하시오. (단, $a_n\neq 0$) [3점]

G026

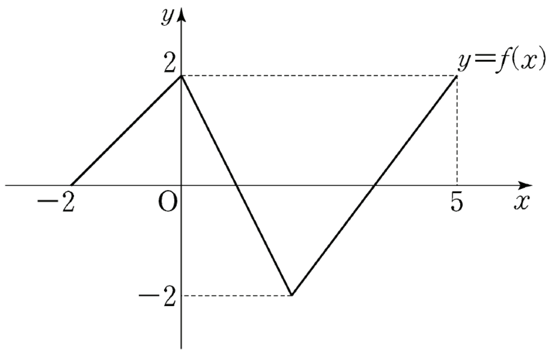
○○ (2013(6)-나형23)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+7}{3n+1}=4$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

G027

○○○
(2013(6)−나형20)

닫힌구간 $[-2,\ 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{n\to\infty}\dfrac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$을 만족시키는 상수 a의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

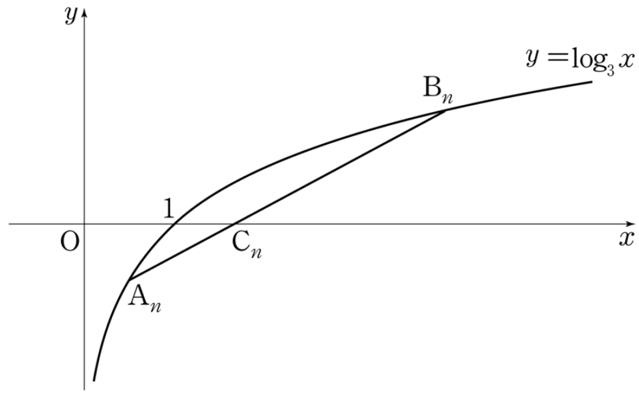
G028

○○○
(2013(9)−가형15/나형15)

2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\dfrac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n}=1 : 2$

점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n^2}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$
④ $\dfrac{5}{6}$ ⑤ 1

G029

○ (2014(6)−A형24)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n}$의 값을 구하시오. [3점]

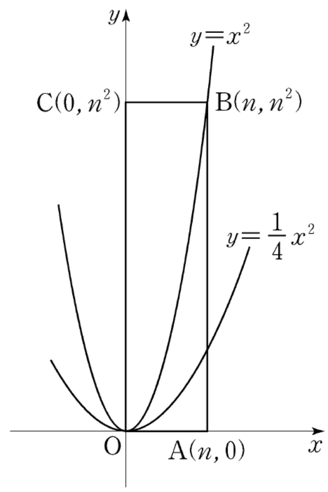
G030

●●● (2014(9)−A형14번형)

그림은 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$과 꼭짓점의 좌표가

O$(0,\ 0)$, A$(n,\ 0)$, B$(n,\ n^2)$, C$(0,\ n^2)$

인 직사각형 OABC를 나타낸 것이다. (단, n은 자연수이다.)



자연수 n에 대하여, x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 두 선분 BC, CO와 곡선 OB로 둘러싸인 도형의 경계 및 내부에 있는 모든 점의 개수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값은? [4점]

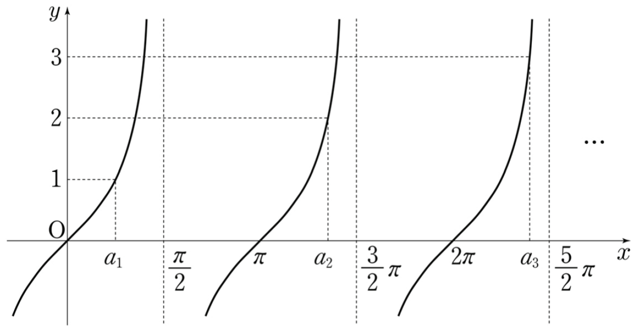
① $\frac{1}{2}$　② $\frac{7}{12}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{5}{6}$

▶ 위의 문제는 두 개의 문제로 구성된 세트 문항의 두 번째 문제이다. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$은 첫 번째 문제에서만 사용되는 조건이므로 위의 문제를 풀 때에는 무시해도 좋다.

G031

○○○
(2014-B형18)

자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=\tan x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [4점]



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$

④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$

G032

○○
(2015(9)-A형28)

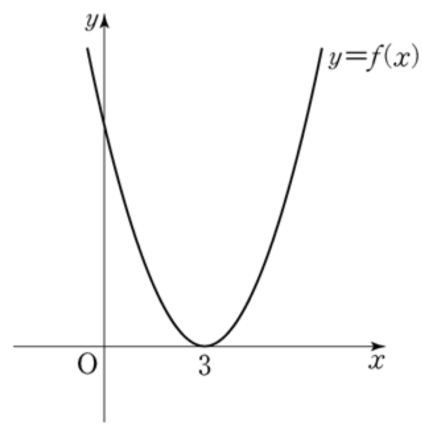
자연수 n에 대하여 점 $(3n,\ 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n이 있다.

원 O_n 위를 움직이는 점과 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리의 최댓값을 a_n, 최솟값을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값을 구하시오. [4점]

G033

○○○
(2016(6)-A형14)

함수 $f(x)$는 $f(x)=(x-3)^2$이다.



자연수 n에 대하여 방정식 $f(x)=n$의 두 근이 α, β일 때 $h(n)=|\alpha-\beta|$라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$$

의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

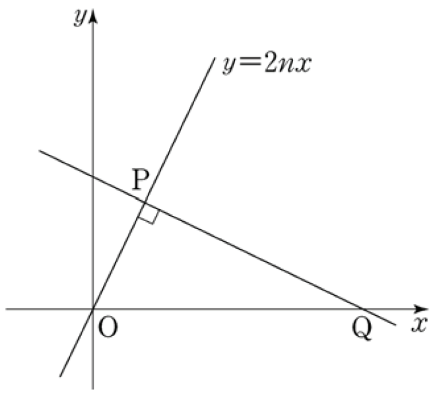
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

G034

○○

(2016(6)−B형10)

자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ 2n^2)$을 지나고 이 직선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 OQ의 길이를 l_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

G035

○○

(2016(9)−A형27)

양수 a와 실수 b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+4n}-bn)=\frac{1}{5}$$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

G036

○○

(2016(9)−B형24)

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2+2nx-4n=0$$

의 양의 실근을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

G037

○○
(2016-A형10)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 x축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 x축과 만나지 않는다.

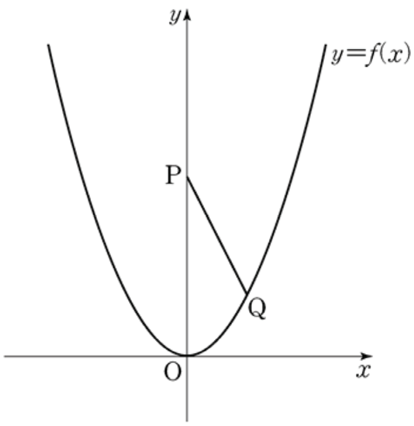
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

G038

○○
(2016-A형14)

자연수 n에 대하여 좌표가 $(0,\ 2n+1)$인 점을 P라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 1이고 제1사분면에 있는 점을 Q라 하자.



점 R$(0,\ 1)$에 대하여 삼각형 PRQ의 넓이를 S_n, 선분 PQ의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^2}{l_n}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 1
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

G039

○○○
(2020(9)-나형10)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

G040

○○
(2022-미적분23)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

G. 등비수열의 극한

G041

○○
(1999-인문7/자연7)

〈보기〉의 수열 $\{a_n\}$중 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$이 존재하는 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $a_n=n$
ㄴ. $a_n=\frac{1}{2^n}$
ㄷ. $a_n=(-1)^n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G042

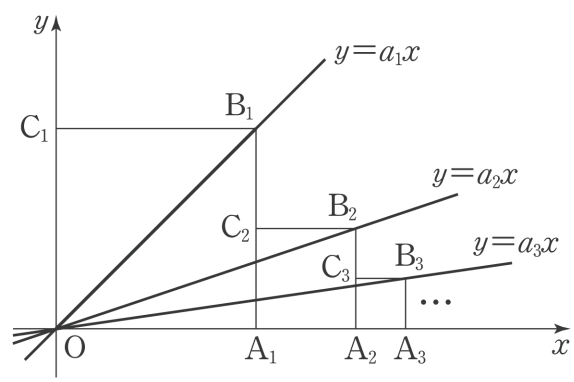
○○
(2005(9)-나형28)

그림과 같이 x축 위에

$\overline{\mathrm{OA_1}}=1$, $\overline{\mathrm{A_1A_2}}=\frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{A_2A_3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\cdots$,

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\cdots$

을 만족하는 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$, $\cdots$에 대하여, 제1사분면에 선분 $\mathrm{OA_1}$, $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{A_2A_3}$, $\cdots$을 한 변으로 하는 정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$, $\mathrm{A_1A_2B_2C_2}$, $\mathrm{A_2A_3B_3C_3}$, $\cdots$을 계속하여 만든다. 원점과 점 B_n을 지나는 직선의 방정식을 $y=a_nx$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}2^na_n$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

G043

○○ (2005-나형7)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$S_n = 2n + \frac{1}{2^n}$일 때, $\lim_{n \to \infty} a_n$의 값은? [3점]

① 2　② 1　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ 0

G044

○○ (2006(6)-나형26)

자연수 n에 대하여 다항식 $f(x) = 2^n x^2 + 3^n x + 1$을 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지를 각각 a_n, b_n이라 할 때,

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$의 값은? [3점]

① 0　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

G045

○○○ (2006(6)-가형10)

두 함수 $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, $g(x) = -x(x^2 - a^2)$

에 대하여 방정식 $f(x) - g(x) = 0$이 단 하나의 실근을 갖는 a의 최댓값은? [4점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

G046

○○○ (2007(6)−나형10)

자연수 n에 대하여 원점 O와 점 $(n, 0)$을 이은 선분을 밑변으로 하고, 높이가 h_n인 삼각형의 넓이를 a_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 등비수열일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \frac{1}{2}$이면 $h_n = \frac{1}{n}$이다.

ㄴ. $h_2 = \frac{1}{4}$이면 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.

ㄷ. $h_2 < \frac{1}{2}$이면 $\lim_{n\to\infty} nh_n = 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G047

○○○ (2007(6)−가형21)

두 함수 $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x^{2n+2}+1}{x^{2n}+2}$, $g(x) = \sin(k\pi x)$에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$가 실근을 갖지 않을 때, $60k$의 최댓값을 구하시오. [4점]

G048

○ (2007−나형20)

수열 $\left\{\left(\frac{2x-1}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하기 위한 정수 x의 개수를 k라 할 때, $10k$의 값을 구하시오. [3점]

G049

○○
(2008(9)-나형9)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$S_n = 2^n + 3^n$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

G050

○○
(2009(6)-나형8)

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 2^n)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q_n, R_n이라 하자. 원점 O와 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$에 대하여 사각형 $\mathrm{AOQ}_n\mathrm{P}_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{AP}_n\mathrm{R}_n$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{S_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 0

G051

○○○
(2009(6)-가형19)

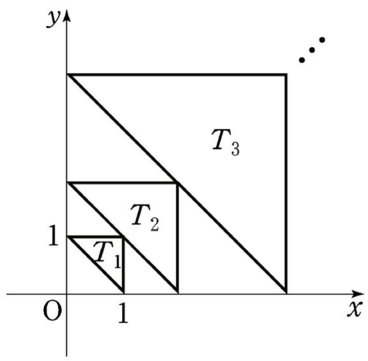
자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{ax^{n+b}+2x-1}{x^n+1}$ $(x>0)$이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+10b$의 값을 구하시오. [3점]

G052

○○○
(2009(9)−가형24/나형24)

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}_n(x_n,\ 0)$, $\mathrm{B}_n(0,\ x_n)$, $\mathrm{C}_n(x_n,\ x_n)$을 꼭짓점으로 하는 직각이등변 삼각형 T_n을 다음 조건에 따라 그린다.

(가) $x_1=1$이다.
(나) 변 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$의 중점이 C_n이다.
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$



삼각형 T_n의 넓이를 a_n, 삼각형 T_n의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n b_n}{a_n+2^n}$의 값을 구하시오. [4점]

G053

●●●
(2009−가형6)

함수 $f(x)=x^2-4x+a$와

함수 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2|x-b|^n+1}{|x-b|^n+1}$에 대하여

$h(x)=f(x)g(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

G054

○○ (2010(6)−나형28)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n a_n}{3^n+1}$이 0이 아닌 상수일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{9}{5}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

G055

○○○ (2010(6)−가형23)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1},\ h(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

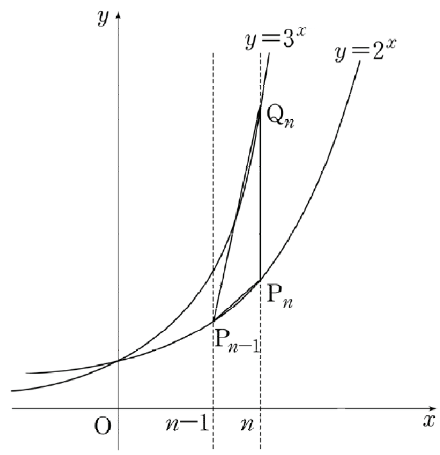
에 대하여 함수 $f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수일 때, $f(10)$의 값을 구하시오. [4점]

G056

○○ (2012(6)−가형20/나형20)

자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자.

삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$의 넓이를 S_n이라 하고, $T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}$의 값은? (단, 점 P_0의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.) [4점]



① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

G057

○○ (2012(6)−나형28)

자연수 n에 대하여 두 직선 $2x+y=4^n$, $x-2y=2^n$이 만나는 점의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=p$이다. $60p$의 값을 구하시오. [4점]

G058

○○ (2014(6)-A형10)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x \le 1) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1} & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

G059

○○ (2015(6)-A형8)

첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-7}{a_n}$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

G060

○○○ (2015-A형28)

자연수 k에 대하여

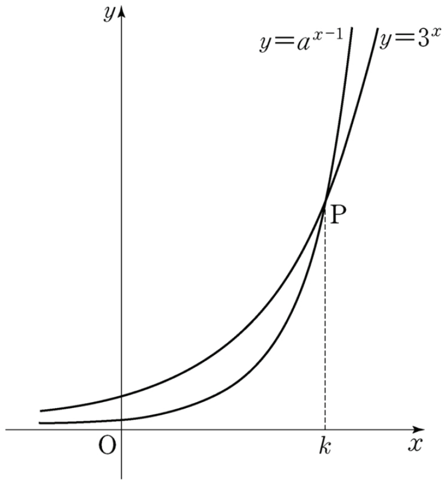
$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^{n}+1}$$

이라 할 때, $\sum\limits_{k=1}^{10}ka_k$의 값을 구하시오. [4점]

G061

○○○
(2015−B형13)

$a>3$인 상수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{x-1}$과 $y=3^x$이 점 P에서 만난다. 이때, 점 P의 x좌표는 k이다.



$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

G062

○○
(2016(6)−A형12/B형8)

공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=5$$

를 만족시킬 때, 첫째항 a_1의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

G063

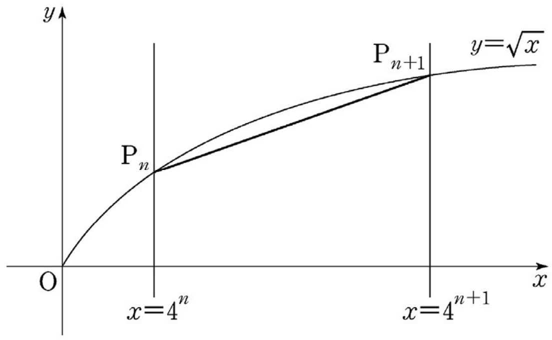
○○
(2016−B형25)

첫째항이 1이고 공비가 $r(r>1)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\frac{3}{4}$이다. r의 값을 구하시오. [3점]

G064

○○○
(2017-나형28)

자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 L_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하시오. [4점]



G065

○○
(2022(예시문항)-미적분24)

정수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n=\left(\frac{|k|}{3}-2\right)^n$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 k의 개수는? [3점]

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

G066

○○○
(2021(6)-가형7)

함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}$$

에 대하여 $f(k)=-\frac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k의 개수는? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

G 수열의 극한

1	⑤	2	③	3	⑤	4	①	5	③
6	⑤	7	②	8	④	9	①	10	②
11	14	12	②	13	25	14	③	15	12
16	①	17	②	18	①	19	②	20	③
21	①	22	50	23	④	24	③	25	35
26	12	27	②	28	①	29	15	30	③
31	④	32	4	33	②	34	④	35	110
36	2	37	⑤	38	⑤	39	④	40	⑤
41	④	42	③	43	①	44	④	45	②
46	⑤	47	10	48	40	49	④	50	①
51	21	52	12	53	③	54	③	55	90
56	③	57	30	58	②	59	③	60	33
61	③	62	②	63	4	64	16	65	③
66	②	67	③	68	①	69	23	70	④
71	③	72	16	73	19	74	①	75	⑤
76	4	77	②	78	①	79	①	80	54
81	①	82	③	83	①	84	②	85	⑤
86	16	87	③	88	12	89	40	90	③
91	⑤	92	④	93	⑤	94	16	95	③
96	32	97	19	98	①	99	16	100	①
101	⑤	102	③	103	②	104	④	105	⑤
106	②	107	②	108	②	109	37	110	①
111	②	112	9	113	①	114	③	115	6
116	13	117	②	118	④	119	⑤	120	③
121	④	122	⑤	123	②	124	⑤	125	⑤
126	④	127	②	128	③	129	②	130	②
131	④	132	②	133	②	134	②	135	③
136	④	137	②	138	②	139	②	140	②
141	③	142	④	143	③	144	①	145	③
146	①	147	④	148	①	149	③	150	②
151	⑤	152	③	153	③	154	①	155	③
156	②	157	②	158	②	159	④	160	②
161	①	162	⑤	163	⑤	164	①	165	③
166	③	167	③						

H 미분법

1	①	2	⑤	3	③	4	③	5	③
6	①	7	②	8	③	9	12	10	6
11	②	12	②	13	③	14	③	15	①
16	50	17	②	18	4	19	④	20	40
21	①	22	③	23	③	24	④	25	①
26	④	27	④	28	①	29	④	30	⑤
31	④	32	②	33	①	34	⑤	35	③
36	③	37	③	38	④	39	14	40	④
41	③	42	②	43	③	44	⑤	45	⑤
46	250	47	20	48	②	49	③	50	④
51	②	52	65	53	17	54	20	55	④
56	50	57	50	58	30	59	17	60	65
61	41	62	8	63	④	64	16	65	③
66	100	67	16	68	14	69	6	70	④
71	25	72	80	73	30	74	④	75	①
76	20	77	③	78	①	79	①	80	②
81	40	82	④	83	2	84	③	85	15
86	23	87	60	88	①	89	11	90	③
91	④	92	③	93	⑤	94	②	95	⑤
96	④	97	①	98	②	99	②	100	①
101	⑤	102	⑤	103	③	104	⑤	105	③
106	⑤	107	①	108	⑤	109	④	110	⑤
111	①	112	10	113	③	114	24	115	12
116	①	117	⑤	118	①	119	39	120	④
121	④	122	②	123	④	124	②	125	④
126	④	127	④	128	③	129	331	130	11
131	①	132	③	133	83	134	④	135	①
136	⑤	137	①	138	⑤	139	①	140	④
141	③	142	①	143	15	144	16	145	④
146	4	147	⑤	148	③	149	③	150	17
151	①	152	⑤	153	25	154	5	155	③
156	72	157	③	158	④	159	48	160	①
161	②	162	④	163	④	164	⑤	165	①
166	⑤	167	10	168	①	169	64	170	②
171	④	172	②	173	④	174	35	175	⑤
176	⑤	177	③	178	①	179	⑤	180	④
181	②	182	27	183	17	184	②	185	④
186	⑤	187	⑤	188	③	189	⑤	190	③
191	⑤	192	③	193	①	194	⑤	195	③
196	①	197	216	198	③	199	④	200	③

201	⑤	202	②	203	2	204	④	205	⑤
206	④	207	②	208	③	209	16	210	①
211	②	212	11	213	15	214	①	215	109
216	②	217	④	218	34	219	6	220	29
221	24	222	18	223	④	224	⑤	225	③
226	⑤	227	④	228	72	229	④	230	30
231	5	232	④	233	⑤	234	④	235	③
236	④	237	15	238	④	239	43	240	④
241	③	242	④	243	4	244	⑤	245	4
246	③								

I 적분법

1	④	2	⑤	3	93	4	②	5	②
6	③	7	128	8	①	9	⑤	10	③
11	⑤	12	④	13	②	14	②	15	②
16	④	17	④	18	9	19	17	20	127
21	④	22	83	23	④	24	16	25	②
26	④	27	21	28	②	29	②	30	12
31	12	32	②	33	①	34	115	35	②
36	②	37	⑤	38	⑤	39	④	40	④
41	⑤	42	①	43	②	44	③	45	16
46	②	47	②	48	⑤	49	①	50	⑤
51	⑤	52	12	53	14	54	②	55	⑤
56	③	57	②	58	①	59	19	60	①
61	242	62	①	63	③	64	③	65	⑤
66	27	67	⑤	68	100	69	④	70	①
71	④	72	③	73	③	74	②	75	③
76	96	77	①	78	③	79	①	80	①
81	③	82	②	83	①	84	④	85	45
86	①	87	③	88	⑤	89	②	90	⑤
91	143	92	④	93	③	94	②	95	②
96	②	97	78	98	15	99	②	100	⑤
101	①								

해설 목차

미적분

G 수열의 극한

1	⑤	2	③	3	⑤	4	①	5	③
6	⑤	7	②	8	④	9	①	10	②
11	14	12	②	13	25	14	③	15	12
16	①	17	②	18	①	19	②	20	③
21	①	22	50	23	④	24	③	25	35
26	12	27	②	28	①	29	15	30	③
31	④	32	4	33	②	34	④	35	110
36	2	37	⑤	38	⑤	39	④	40	⑤
41	④	42	③	43	①	44	④	45	②
46	⑤	47	10	48	40	49	④	50	①
51	21	52	12	53	③	54	③	55	90
56	③	57	30	58	②	59	③	60	33
61	③	62	②	63	4	64	16	65	③
66	②	67	③	68	①	69	23	70	④
71	③	72	16	73	19	74	①	75	⑤
76	4	77	②	78	①	79	①	80	54
81	①	82	③	83	①	84	②	85	⑤
86	16	87	③	88	12	89	40	90	③
91	⑤	92	④	93	⑤	94	16	95	③
96	32	97	19	98	①	99	16	100	①
101	⑤	102	③	103	②	104	④	105	⑤
106	②	107	②	108	②	109	37	110	①
111	②	112	9	113	①	114	③	115	6
116	13	117	②	118	④	119	⑤	120	③
121	④	122	⑤	123	②	124	⑤	125	⑤
126	④	127	②	128	③	129	②	130	②
131	④	132	②	133	②	134	②	135	③
136	④	137	②	138	②	139	②	140	②
141	③	142	④	143	③	144	①	145	③
146	①	147	④	148	①	149	③	150	②
151	⑤	152	③	153	③	154	①	155	③
156	②	157	②	158	②	159	④	160	②
161	①	162	⑤	163	⑤	164	①	165	③
166	③	167	③						

G001 | 답 ⑤

[풀이1]

직선 AP의 방정식은

$t=2$이면 $x=2$

$t\neq 2$이면 $y=\dfrac{2}{t-2}(x-2)$

두 직선 AP, $y=\dfrac{1}{2}x$의 방정식을 연립하여 점 Q의 좌표를 구하면

$t=2$이면 Q$(2,\ 1)$

$t=6$이면 점 Q는 존재하지 않는다. (∵ 두 직선이 서로 평행)

$t\neq 2$, $t\neq 6$이면 Q$\left(\dfrac{8}{6-t},\ \dfrac{4}{6-t}\right)$

($\triangle$POA의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times$(점 P의 y좌표)$=2$

($\triangle$QOA의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times$(점 Q의 y좌표)$=\dfrac{4}{6-t}$

주어진 조건에 의하여

$\dfrac{4}{6-t_n}:2=n:n+2$

정리하면

$t_n=\dfrac{4n-4}{n}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\dfrac{4}{n}\right)=4$

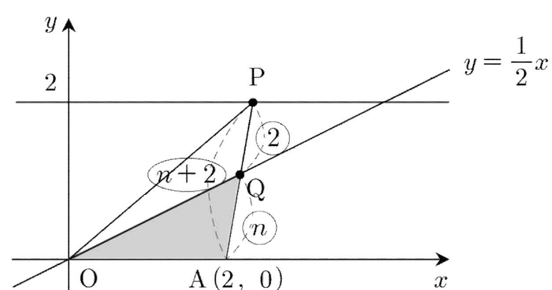
답 ⑤

[풀이2]

원점 O에서 직선 AP에 이르는 거리를 d라고 하면

($\triangle$POA의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times d$

($\triangle$QOA의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times d$



주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{AQ}}:\overline{\mathrm{AP}}=n:n+2$

점 Q는 선분 AP의 $n:2$ 내분점이다.

내분점의 공식에 의하여

Q$\left(\dfrac{nt_n+4}{n+2},\ \dfrac{2n}{n+2}\right)$

점 Q는 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$ 위의 점이므로

$\dfrac{2n}{n+2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{nt_n+4}{n+2}$

정리하면

$$t_n = \frac{4n-4}{n}$$

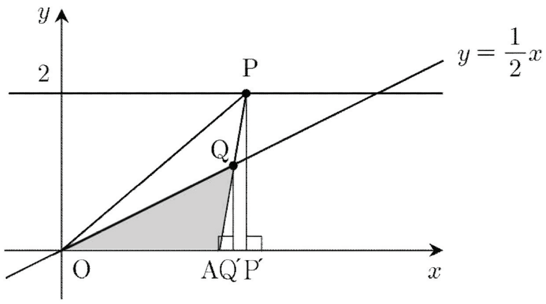
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{4}{n}\right) = 4$$

답 ⑤

[참고]

두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′라고 하자.



서로 닮은 두 직각삼각형 APP′, AQQ′에 대하여

$\overline{AP}:\overline{PP'}=\overline{AQ}:\overline{QQ'}$

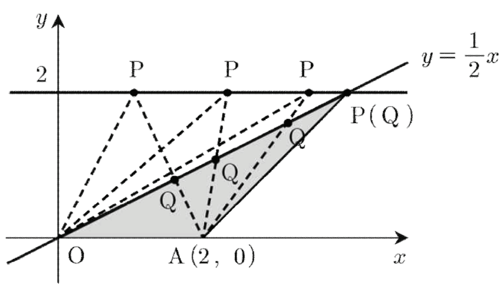
정리하면

$\overline{AP}:\overline{AQ}=$(점 P의 y좌표):(점 Q의 y좌표)$=n+2:n$

[풀이3] 시험장

$n\to\infty$일 때, $\dfrac{n}{n+2}\to 1$

두 삼각형 QOA, POA의 넓이는 하나의 실수에 수렴한다.



두 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$, $y=2$의 교점은 $(4,\ 2)$이다.

위의 그림에서 점 P(Q)가 점 $(4,\ 2)$에 한없이 가까이 다가가면 두 삼각형 QOA, POA의 넓이는 2에 수렴한다.

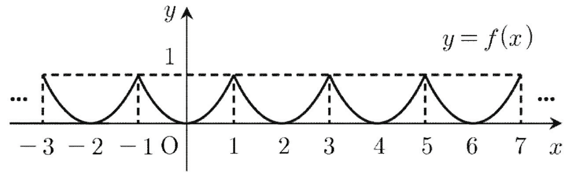
$$\therefore \lim_{n\to\infty} t_n = 4$$

답 ⑤

G002 | 답 ③

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는

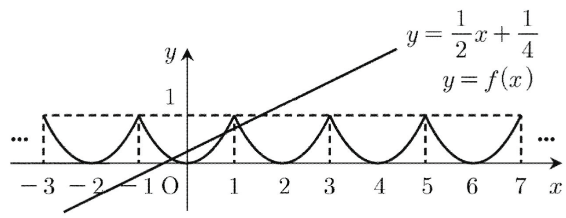


주어진 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2n}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

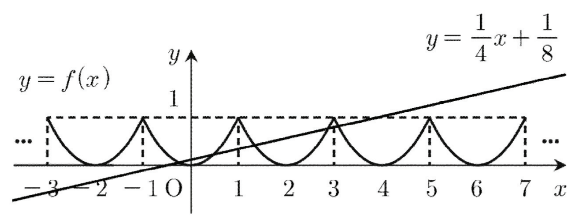
이 직선은 n의 값에 관계없이 항상 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$을 지난다.

$n=1$인 경우



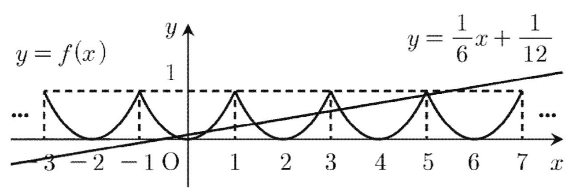
함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{1}{4n}$의 교점의 개수는 3이므로 $a_1=3$

$n=2$인 경우



함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{1}{4n}$의 교점의 개수는 5이므로 $a_2=5$

$n=3$인 경우



함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2n}x+\dfrac{1}{4n}$의 교점의 개수는 7이므로 $a_3=7$

⋮

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열이다.

일반항 a_n은

$$a_n=2n+1$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$$

답 ③

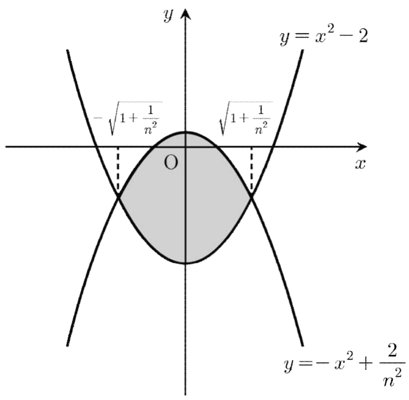
G003 | 답 ⑤

[풀이1]

우선 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하자.

두 곡선의 방정식을 연립하면

$x^2-2=-x^2+\dfrac{2}{n^2}$ 풀면 $x=\pm\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}$



두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 정적분의 공식에 의하여

$$S_n=\int_{-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}^{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\left|(x^2-2)-\left(-x^2+\frac{2}{n^2}\right)\right|dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\left(-2x^2+\frac{2}{n^2}+2\right)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+\left(2+\frac{2}{n^2}\right)x\right]_0^{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{8}{3}$$

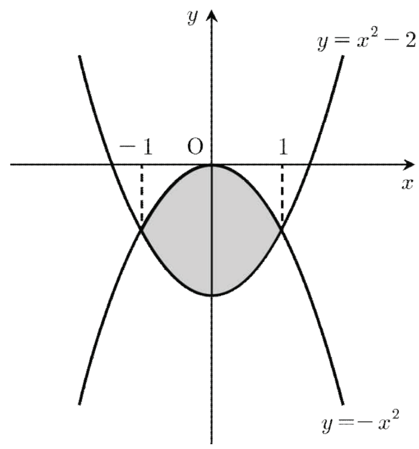
답 ⑤

[풀이2] 시험장

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}=0$이므로 $n\to\infty$일 때,

곡선 $y=-x^2+\dfrac{2}{n^2}$은 곡선 $y=-x^2$에 한없이 가까워진다.

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$(두 곡선 $y=x^2-2$와 $y=-x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이)



두 곡선 $y=x^2-2$와 $y=-x^2$의 교점의 x좌표를 구하자.

두 곡선의 방정식을 연립하면

$x^2-2=-x^2$에서 $x=\pm1$

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 정적분의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_{-1}^{1}\left|(x^2-2)-(-x^2)\right|dx$$

$$=2\int_0^1(-2x^2+2)dx=2\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1=\frac{8}{3}$$

답 ⑤

G004 | 답 ①

[풀이]

$a_n=\sin\dfrac{n}{2}\pi$로 두자.

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots$

모든 자연수 n에 대하여

$0\le S_n\le 1$

각 변을 n으로 나누면

$$0\le\frac{S_n}{n}\le\frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}0=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$이므로

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{2}\pi\right)=0$$

답 ①

G005 | 답 ③

[풀이1]

▸ ㄱ. (참)

$a_1 = b_1 = p$(p는 상수)로 두자.

문제에서 주어진 귀납적 정의에서

$a_2 = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}p + \frac{3}{2}$

$b_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}p + \frac{3}{2}$

즉, $a_2 = b_2$

$a_3 = -\frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}p + \frac{3}{4}$

$b_3 = -\frac{1}{2}a_2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}p + \frac{3}{4}$

즉, $a_3 = b_3$

⋮

마찬가지의 방법으로 4 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n = b_n$

▸ ㄴ. (거짓)

문제에서 주어진 귀납적 정의에서

$a_2 = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{3}{2} = 1$

$b_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$a_3 = -\frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

$b_3 = -\frac{1}{2}a_2 + \frac{3}{2} = 1$

⋮

그런데 $a_2 > a_3$이므로 모든 자연수 n에 대하여 항상

$a_{n+1} > a_n$이 성립하는 것은 아니다.

▸ ㄷ. (참)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$

(단, α, β는 상수)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}\right)$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} b_n + \frac{3}{2}$

$\alpha = -\frac{1}{2}\beta + \frac{3}{2}$ ⋯㉠

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}\right)$

$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{3}{2}$

$\beta = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}$ ⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\alpha = \beta = 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[풀이2]

거미줄을 이용하여 문제를 해결해보자.

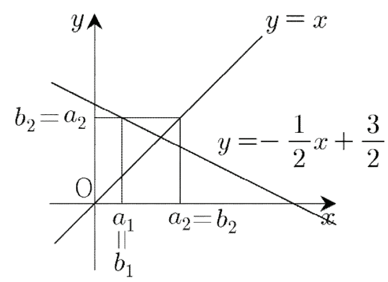
두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $y = x$를 이용하여

a_1, a_2, a_3, ⋯

b_1, b_2, b_3, ⋯

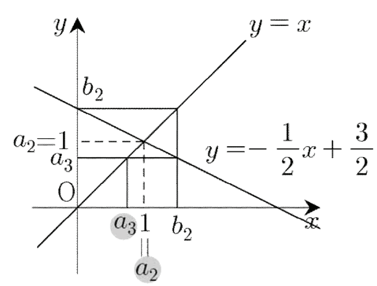
의 값을 수직선 위에 나타내자.

▸ ㄱ. (참)



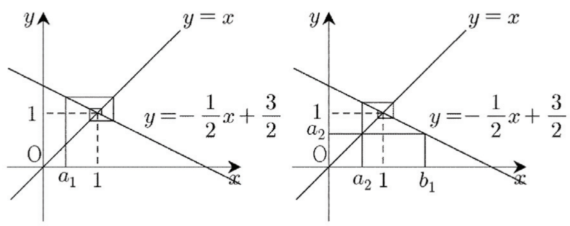
위의 그림처럼 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = b_n$임을 알 수 있다.

▸ ㄴ. (거짓)



위의 그림처럼 $a_3 < a_2$인 경우가 있으므로 주어진 부등식이 항상 성립하는 것은 아니다.

▸ ㄷ. (참)



위의 그림과 같이 a_1, b_1의 값이 주어졌을 때,

$n\to\infty$일 때, $a_n\to 1$임을 알 수 있다.

마찬가지의 방법으로

$n\to\infty$일 때, $b_n\to 1$이다.

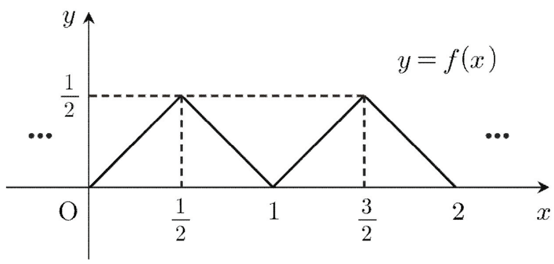
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

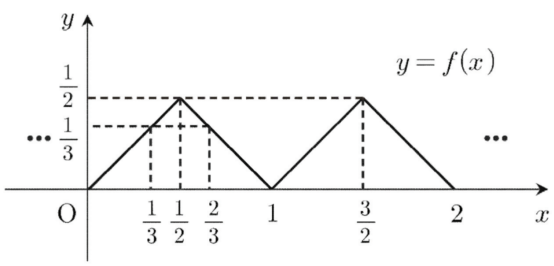
G006 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)



$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$

합성함수의 정의에 의하여

$f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

$\therefore\ f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)$

▸ ㄴ. (참)

$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$으로 두자.

$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\le 1$이므로

$f(a_n)=1-a_n$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

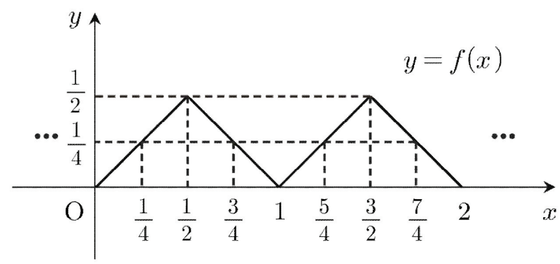
$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

▸ ㄷ. (참)

$b_n=\frac{1}{4}+\frac{n}{2}$으로 두자.



자연수 k에 대하여

$n=2k-1$이면

$f(b_n)=f\left(\frac{3}{4}+k-1\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$

$n=2k$이면

$f(b_n)=f\left(k+\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

모든 자연수 n에 대하여

$f(b_n)=\frac{1}{4}$

따라서 수열 $\left\{f\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)\right\}$은 $\frac{1}{4}$에 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

G007 | 답 ②

[풀이1]

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=6n-5$

n의 자리에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1}=6n+1$

수열 $\{b_n\}$의 일반항은

$b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{3}=4n-\frac{4}{3}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n-4}{18n-15}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12-\frac{4}{n}}{18-\frac{15}{n}}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

답 ②

[풀이2] 시험장

일반항 a_n은 최고차항의 계수가 $6(=$공차$)$인 일차식이므로

a_{n+1}은 최고차항의 계수가 $6(=$공차$)$인 일차식이다.

일반항 b_n은 최고차항의 계수가 $4\left(=\dfrac{6+6}{3}\right)$인 일차식이다.

$n\to\infty$일 때, $\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{4n+\cdots}{6n+\cdots}\to\dfrac{2}{3}$이다.

답 ②

[풀이3]

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=6n-5$

n의 자리에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+1}=6n+1$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{6n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{6-\frac{5}{n}}=\frac{6}{6}=1$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ②

G008 | 답 ④

[풀이1]

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$a_n=\overline{PQ}=\sqrt{1+9(2n+1)^2}$

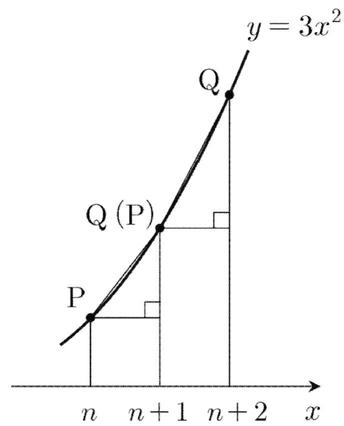
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+9(2n+1)^2}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}+9\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}=6$$

답 ④

[풀이2] 시험장



$n\to\infty$일 때,

두 점 P, Q의 x좌표의 차이는 1로 일정하지만

두 점 P, Q의 y좌표의 차이는 무한대로 발산하므로

$n\to\infty$일 때, $\overline{P_nQ_n}\approx f(n+1)-f(n)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)-f(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+3}{n}=6$$

답 ④

G009 | 답 ①

[풀이1]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

답 ①

[풀이2] 시험장

$n\to\infty$일 때,

$$\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}\approx\frac{2(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2})}{2n-(-2n)}\to 1$$

답 ①

G010 | 답 ②

[풀이1]

수열의 합과 일반항의 관계에서

$a_1=S_1=1$

$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-3\,(n\geq 2)$

일반항 a_n은

$a_n = 4n-3(n \geq 1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n}{2n^2-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{4}{2} = 2$$

답 ②

[풀이2] 시험장

함수 $y=2x^2-x(S_n)$의 도함수는 $y'=4x-1$이므로

일반항 a_n은 최고차항의 계수가 $4(=$공차$)$인 일차함수이다.

$n\to\infty$일 때, $\dfrac{na_n}{S_n} = \dfrac{4n^2+\cdots}{2n^2+\cdots} \to 2$

답 ②

[참고]

등차수열에서의 '이산과 연속의 관계' 에 대하여 알아보자.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

$S_n = pn^2+qn$ …㉠

수열의 합과 일반항의 관계에 의하여

$a_1 = S_1 = p+q$

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2pn-p+q \ (n \geq 2)$

그런데 $2p\times1-p+q=p+q$이므로

$a_n = \boxed{2p}n-p+q \ (n \geq 1)$ …㉡

이때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는 $2p$이다.

㉠에서 n의 자리에 x를 대입하면

$S(x) = px^2+qx$

함수 $S(x)$의 도함수는

$S'(x) = \boxed{2p}x+q$ …㉢

㉡, ㉢에서 일차항의 계수는 $2p$로 같다.

G011 | 답 14

[풀이1]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+15n+13}-\sqrt{n^2-13n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{28n+13}{\sqrt{n^2+15n+13}+\sqrt{n^2-13n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{28+\frac{13}{n}}{\sqrt{1+\frac{15}{n}+\frac{13}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{13}{n}}} = \frac{28}{1+1} = 14$$

답 14

[풀이2] 시험장

$n\to\infty$일 때,

$\sqrt{n^2+15n+13}-\sqrt{n^2-13n}$

$\approx \dfrac{15n-(-13n)}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} \to 14$

답 14

G012 | 답 ②

[풀이1]

주어진 부등식에서

$1 < a_1 < 2$

$2 < a_2 < 3$

$3 < a_3 < 4$

$\vdots$

$n < a_n < n+1$

자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$\frac{n^2+n}{2} < a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n < \frac{n^2+3n}{2}$$

각 변이 모두 양수이므로

$$\frac{2}{n^2+3n} < \frac{1}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n} < \frac{2}{n^2+n}$$

각 변에 양수 n^2을 곱하면

$$\frac{2n^2}{n^2+3n} < \frac{n^2}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n} < \frac{2n^2}{n^2+n}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{3}{n}} = 2$$

수열의 극한에 대한 대소 관계에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = 2$$

답 ②

[풀이2] 시험장

어차피 '수렴하는 수열의 극한의 대소 관계' 로 문제를 해결

해야 하므로 $a_n = n$으로 두고 극한값을 구하자.

(또는 $a_n = n+1$로 두어도 좋다.)

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

답 ②

G013 | 답 25

[풀이1]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{2n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}\sqrt{k + \frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = \sqrt{k} = 5$$

$\therefore \ k = 25$

답 25

[풀이2] 시험장

$n \to \infty$일 때,

$$\frac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}$$

$$\approx \frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n})}{n(1-(-1))}$$

$$= \frac{2\sqrt{k}}{2} = 5$$

$\therefore \ k = 25$

답 25

G014 | 답 ③

[풀이1]

문제에서 수열 $\{a_n\}$이 수렴한다는 조건을 주었으므로

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$(단, α는 상수)로 두자.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2a_n - 3}{a_n + 1} = \frac{2\lim\limits_{n \to \infty} a_n - 3}{\lim\limits_{n \to \infty} a_n + 1} = \frac{2\alpha - 3}{\alpha + 1} = \frac{3}{4}$$

α에 대한 분수식을 정리하면

$\therefore \ \alpha = 3$

답 ③

[풀이2]

$b_n = \dfrac{2a_n - 3}{a_n + 1}$으로 두면

$a_n = \dfrac{b_n + 3}{2 - b_n}$이고 $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \dfrac{3}{4}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{b_n + 3}{2 - b_n} = \frac{\frac{3}{4} + 3}{2 - \frac{3}{4}} = 3$$

답 ③

G015 | 답 12

[풀이1]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + a_5$

$= -d - d + (a_1 + 4d) = 4 + 2d = 28$

풀면

$d = 12$

일반항 a_n은

$a_n = a_1 + (n-1)d = 12n - 8$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{12n - 8}{n} = 12$$

답 12

[풀이2]

등차중항의 정의에 의하여

$2a_3 = a_1 + a_5 = a_2 + a_4$

이므로, 문제에서 주어진 등식은

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 2a_3 - 2a_3 + a_3 = a_3 = 28$

즉, $a_3 = 28$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$$d = \frac{a_3 - a_1}{3 - 1} = \frac{28 - 4}{2} = 12$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n-8}{n}=12$$

답 12

[풀이3] 시험장

$a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)=28$

$4+2d=28$, $d=12$

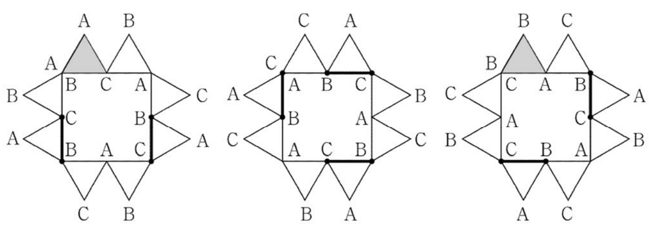
$n\to\infty$일 때, $\dfrac{a_n}{n}\approx\dfrac{dn}{n}\to 12$

답 12

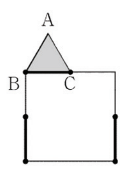
G016 | 답 ①

※ 수열의 귀납적 정의에서는 일반항을 유도하지 않지만
등차수열, 등비수열, (발견적 추론으로) 규칙이 명확한
수열의 경우 수열의 귀납적 정의에서 일반항을
유도하는 것이 가능합니다.

[풀이]



[1회전] [2회전] [3회전]



[4회전]

위의 그림처럼 정삼각형 ABC는 4회전 째에 다시 처음 상태가 된다.

$a_1=2$

$a_4=a_1+8=10$

$a_7=a_4+8=18$

$\vdots$

일반항 a_{3n-2}는

$a_{3n-2}=8n-6(n\geq 1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{6}{n}\right)=8$$

답 ①

G017 | 답 ②

[풀이1]

▸ (1) $n=2$인 경우

주어진 집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.

공차가 1인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$ ← 2개

따라서 $T_2=2$

▸ (2) $n=3$인 경우

주어진 집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이다.

공차가 1인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 4,\ 5)$, $(4,\ 5,\ 6)$ ← 4개

공차가 2인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 3,\ 5)$, $(2,\ 4,\ 6)$ ← 2개

따라서 $T_3=4+2=6$

▸ (3) $n=4$인 경우

주어진 집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이다.

공차가 1인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 4,\ 5)$, $(4,\ 5,\ 6)$,
$(5,\ 6,\ 7)$, $(6,\ 7,\ 8)$ ← 6개

공차가 2인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 3,\ 5)$, $(2,\ 4,\ 6)$, $(3,\ 5,\ 7)$, $(4,\ 6,\ 8)$ ← 4개

공차가 3인 경우의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$(1,\ 4,\ 7)$, $(2,\ 5,\ 8)$ ← 2개

따라서 $T_4=6+4+2=12$

$\vdots$

2 이상의 자연수 n에 대하여

$T_n=2(n-1)+2(n-2)+\cdots+2\times 1$

$=n(n-1)$($\because$ 등차수열의 합의 공식)

그런데 $T_1=0$이므로 일반항 T_n은

$T_n=n^2-n(n\geq 1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

답 ②

[풀이2]

공차에 따른 집합을 모두 쓰면 다음과 같다.

공차 1: $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$, $\cdots$,
$\{\boxed{2n-2},\ 2n-1,\ 2n\}$ $(2n-2$개$)$

공차 2: $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 4,\ 6\}$, $\cdots$,
$\{\boxed{2n-4},\ 2n-2,\ 2n\}$ $(2n-4$개$)$

공차 3: $\{1,\ 4,\ 7\}$, $\{2,\ 5,\ 8\}$, $\cdots$,
$\{\boxed{2n-6},\ 2n-3,\ 2n\}$ $(2n-6$개$)$

⋮

공차 $n-1$: $\{1,\ n,\ 2n-1\}$,

$\{\boxed{2},\ n+1,\ 2n\}$ $(2$개$)$

상자 $\boxed{}$ 안에 들어간 수만을 다시 쓰면

$2n-2,\ 2n-4,\ 2n-6,\ \cdots,\ 2(=2n-2(n-1))$

위의 수열은 첫째항이 $2n-2$이고, 공차가 -2인 등차수열이다.

$$T_n=\frac{(2n-2)+2}{2}\times(n-1)=n^2-n$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

답 ②

[풀이3] +확률과 통계(조합)

등차중항의 정의에 의하여

$b=\dfrac{a+c}{2}$ 즉, $2b=a+c$

a와 c의 값이 결정되면 b의 값이 결정된다.

$a+c$는 짝수이므로

a와 c가 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.

a와 c가 모두 홀수일 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_n\mathrm{C}_2$이고, a와 c가 모두 짝수일 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_n\mathrm{C}_2$이다. ($2n$ 이하의 자연수 중에서 홀수와 짝수의 개수는 각각 n이다.)

합의 법칙에 의하여

$T_n={}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_2=n(n-1)$(단, $n\geq 2$)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

답 ②

G018 | 답 ①

[풀이1]

자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x^2-\frac{2k}{n}x+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x^2-\frac{2x}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=nx^2-(n+1)x+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$$=n\left(x-\frac{n+1}{2n}\right)^2+\frac{n^2-1}{12n}$$

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{n+1}{2n}$일 때 최솟값을 갖는다.

일반항 a_n은

$$a_n=\frac{n^2-1}{12n}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{12n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{12}$$

답 ①

[풀이2]

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=2\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)=2nx-n-1$$

$f'(x)=0$이면 $x=\dfrac{n+1}{2n}$

$x=\dfrac{n+1}{2n}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{n+1}{2n}$에서 극솟값(최솟값)을 갖는다.

$$a_n=f\left(\frac{n+1}{2n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1-2k}{2n}\right)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)^2-4(n+1)k+4k^2}{4n^2}$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4n}-\frac{n+1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4n}-\frac{(n+1)^2}{2n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

답 ①

[참고] +확률과 통계(이산확률변수) (선택)

n개의 수

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots,\ \frac{n}{n}\qquad\cdots(*)$$

의 평균을 $x\left(=\dfrac{n+1}{2n}\right)$라고 할 때,

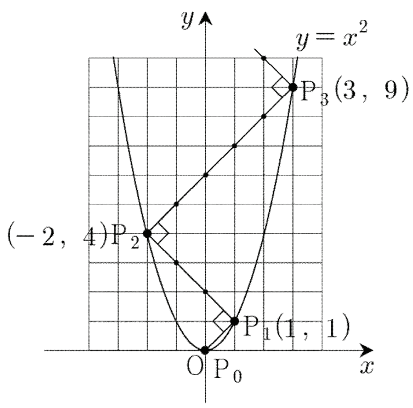
$$\frac{f(x)}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\frac{1}{n}$$

은 (*)의 분산이다.

G019 | 답 ②

[풀이1] 시험장

아래 그림과 같이 격자를 그리자.



위의 그림에서 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$의 좌표를 구하면

$(1,\ 1)$, $(-2,\ 4)$, $(3,\ 9)$, $\cdots$

이다. 이제 다음과 같이 추론할 수 있다.

'점 P_n의 x좌표는 $(-1)^{n-1}n$이다.'

선분 P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, $\cdots$의 길이는

$\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $\cdots$ (등차수열)

수열 $\{l_n\}$의 일반항은

$l_n=(2n-1)\sqrt{2}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=2\sqrt{2}$$

답 ②

[풀이2]

조건 (가), (나)를 이용하여 점 P_2, P_3, $\cdots$의 좌표를 구하자.

- 우선 점 P_2의 좌표를 구하자.

직선 P_0P_1의 기울기는 1이므로

점 P_1을 지나고 직선 P_0P_1에 수직인 직선의 방정식은

P_1P_2: $y-1=-(x-1)$ 즉, $y=-x+2$

직선 P_1P_2의 방정식과 곡선 $y=x^2$을 연립하면

$x^2=-x+2$ 즉, $(x+2)(x-1)=0$

풀면 $x=1$ 또는 $x=-2$

점 P_2의 좌표는 $P_2(-2,\ 4)$이다.

- 점 P_3의 좌표를 구하자.

직선 P_1P_2의 기울기는 -1이므로

점 P_2를 지나고 직선 P_1P_2에 수직인 직선의 방정식은

P_2P_3: $y-4=x+2$ 즉, $y=x+6$

직선 P_2P_3의 방정식과 곡선 $y=x^2$을 연립하면

$x^2=x+6$ 즉, $(x+2)(x-3)=0$

풀면 $x=-2$ 또는 $x=3$

점 P_3의 좌표는 $P_3(3,\ 9)$이다.

$\vdots$

점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$의 좌표는 각각

$P_1(1,\ 1)$, $P_2(-2,\ 4)$, $P_3(3,\ 9)$, $\cdots$

발견적 추론에 의하여

점 P_n의 x좌표와 y좌표는 각각

$(-1)^{n+1}n$, n^2

즉, $P_n((-1)^{n+1}n,\ n^2)$,

$P_{n-1}((-1)^n(n-1),\ (n-1)^2)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$l_n=\sqrt{((-1)^n)^2(-n-n+1)^2+(2n-1)^2}$

$=\sqrt{2(2n-1)^2}=\sqrt{2}(2n-1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2\sqrt{2}$$

답 ②

※ 수열의 귀납적 정의에서는 일반항을 유도하지 않지만 등차수열, 등비수열, (발견적 추론으로) 규칙이 명확한 수열의 경우 수열의 귀납적 정의에서 일반항을 유도하는 것이 가능합니다.

[풀이3]

점 P_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라고 하자.

조건 (가)에서

$x_0=0$, $x_1=1$

직선 $P_{n-1}P_n$의 기울기는

$$\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\frac{x_n^2-x_{n-1}^2}{x_n-x_{n-1}}$$

$$=\frac{(x_n+x_{n-1})(x_n-x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$$

$=x_n+x_{n-1}$

점 P_n을 지나고 직선 $P_{n-1}P_n$에 수직인 직선의 방정식은

$$y-x_n^2=-\frac{1}{x_n+x_{n-1}}(x-x_n)$$

이 직선의 방정식과 함수 $y=x^2$의 방정식을 연립하면

$$x^2-x_n^2=-\frac{1}{x_n+x_{n-1}}(x-x_n)$$

정리하면

$$(x-x_n)\left(x+x_n+\frac{1}{x_n+x_{n-1}}\right)=0$$

$x=x_n$ 또는 $x+x_n=-\dfrac{1}{x_n+x_{n-1}}$

조건 (나)에서

두 점 P_n와 P_{n+1}의 x좌표가 다르므로 $x\neq x_n$이다.

$$x_{n+1}=-\frac{1}{x_n+x_{n-1}}-x_n$$

수열 $\{x_n\}$의 귀납적 정의는

$x_0=0,\ x_1=1,\ x_{n+2}=-\dfrac{1}{x_{n+1}+x_n}-x_{n+1}$

수열 $\{x_n\}$을 나열하면

$0,\ 1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ -6,\ \cdots$

일반항 x_n은

$x_n=(-1)^{n+1}n\,(n\ge 0)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$l_n=\sqrt{(x_n-x_{n-1})^2+(x_n^2-x_{n-1}^2)^2}=\sqrt{2}\,(2n-1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=2\sqrt{2}$

답 ②

G020 | 답 ③

[풀이1]

조건 (가), (나)에서 주어진 두 부등식에서

$5-\dfrac{1}{n}<b_n<5+\dfrac{1}{n}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{1}{n}\right)=5$

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=5$

답 ③

[풀이2]

조건 (가)에서

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(20-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(20+\dfrac{1}{n}\right)=20$이므로

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=20 \qquad \cdots㉠$

조건 (나)에서

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(10-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(10+\dfrac{1}{n}\right)=10$이므로

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=10 \qquad \cdots㉡$

㉠, ㉡에서 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n-(a_n-b_n)}{2}=\dfrac{20-10}{2}=5$

답 ③

[풀이3] 시험장

세 수열

$\{b_n\},\ \{a_n+b_n\},\ \{a_n-b_n\}$

이 모두 수렴하므로 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

두 수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$이 수렴하는 값을 각각 $\alpha,\ \beta$라고 하면

(가) $\Rightarrow\ \alpha+\beta=20$

(나) $\Rightarrow\ \alpha-\beta=10$

$\alpha=15,\ \beta=5$

답 ③

G021 | 답 ①

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$a_1+a_2+\cdots+a_n$

$=\log\dfrac{2}{1}+\log\dfrac{3}{2}+\cdots+\log\dfrac{n+1}{n}$

$=\log\left(\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\cdots\times\dfrac{n+1}{n}\right)$

$=\log(n+1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{10^{\log(n+1)}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\ (\because a^{\log_a b}=b)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=1$

답 ①

[참고]

로그의 성질에 의하여

$10^{a_n}=\dfrac{n+1}{n}$

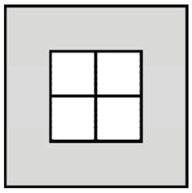
지수법칙에 의하여

$10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}=10^{a_1}\times10^{a_2}\times\cdots\times10^{a_n}$

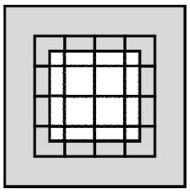
$=\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\cdots\times\dfrac{n+1}{n}=n+1$

G022 | 답 50

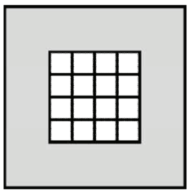
[풀이1]



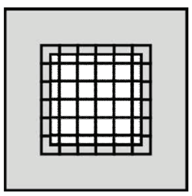
위의 그림에서 $a_2=4(2^2-1^2)$



위의 그림에서 $a_3=4(3^2-2^2)$

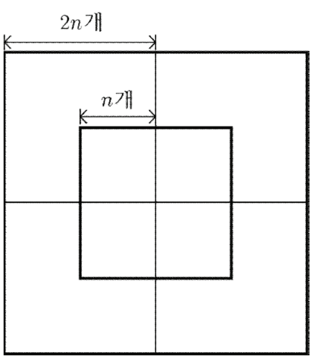


위의 그림에서 $a_4=4(4^2-2^2)$



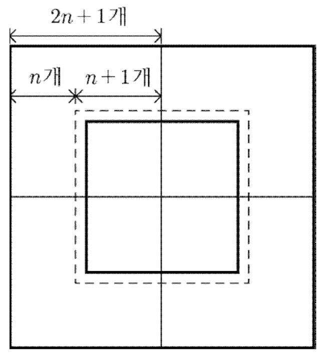
위의 그림에서 $a_5=4(5^2-3^2)$

⋮



모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n}=4\{(2n)^2-n^2\}=12n^2$



모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n+1}=4\{(2n+1)^2-(n+1)^2\}=12n^2+8n$

이므로

$a_{2n+1}-a_{2n}=8n(n\geq 1)$

$a_{2n}-a_{2n-1}=16n-4(n\geq 2)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{16n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{16-\frac{4}{n}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 100c=50$

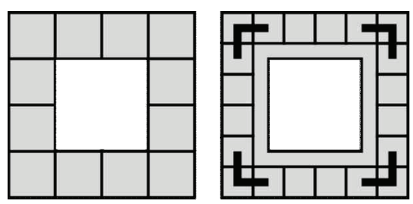
답 50

[풀이2]

수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$을 각각

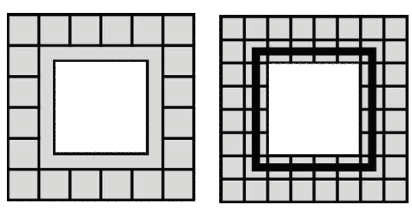
$b_n=a_{2n+1}-a_{2n}(n\geq 1)$

$c_n=a_{2n}-a_{2n-1}(n\geq 2)$



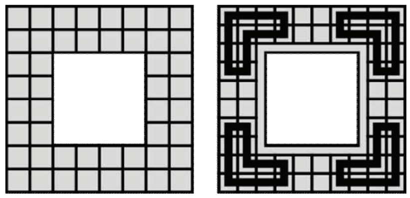
(단, 굵은 선이 그려진 정사각형의 개수는 왼쪽 그림의 작은 정사각형의 개수와 같다.)

위의 그림에서 $b_1=4\times 2$



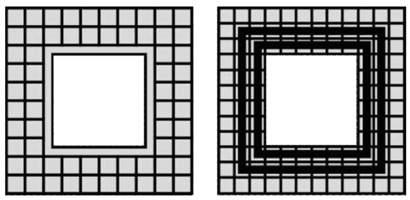
(단, 굵은 선이 그려진 정사각형의 개수는 왼쪽 그림의 작은 정사각형의 개수와 같다.)

위의 그림에서 $c_2=4\times 7$



(단, 굵은 선이 그려진 정사각형의 개수는 왼쪽 그림의 작은 정사각형의 개수와 같다.)

위의 그림에서 $b_2 = 4 \times 4$



(단, 굵은 선이 그려진 정사각형의 개수는 왼쪽 그림의 작은 정사각형의 개수와 같다.)

위의 그림에서 $c_3 = 4 \times 11$

⋮

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 8이고 공차가 8인 등차수열이다.

일반항 b_n은

$b_n = 8n (n \geq 1)$

수열 $\{c_n\}$은 제2항이 28이고 공차가 16인 등차수열이다.

일반항 c_n은

$c_n = 16n - 4 (n \geq 2)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$c = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{c_n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{8n}{16n - 4} = \lim_{n \to \infty} \frac{8}{16 - \frac{4}{n}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \ 100c = 50$

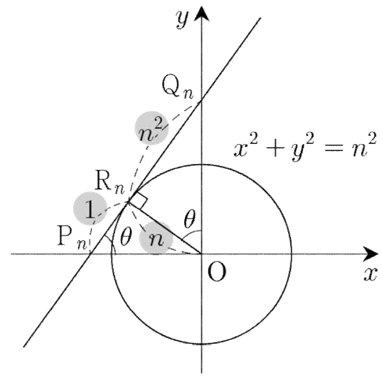
답 50

G023 | 답 ④

[풀이1] 시험장

접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\tan\theta = n = $(기울기)



서로 닮음인 두 직각삼각형

OR_nP_n, Q_nR_nO에서

삼각비의 정의에 의하여

$\overline{OR_n} = n$, $\overline{Q_nR_n} = n^2$

$l_n = n^2 + 1$

$$\therefore \ \lim_{n \to \infty} \frac{l_n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

답 ④

[풀이2]

접선의 방정식은

$y = nx + n\sqrt{n^2+1}$

두 점 P_n, Q_n의 좌표는 각각

$P_n(-\sqrt{n^2+1}, \ 0)$, $Q_n(0, \ n\sqrt{n^2+1})$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$l_n = n^2 + 1$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \ \lim_{n \to \infty} \frac{l_n}{2n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2+1}{2n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

답 ④

[참고1]

주어진 원에 접하는 기울기가 n인 접선의 방정식을

$nx - y + a = 0 (a > 0)$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\frac{a}{\sqrt{n^2+1}} = n$ 즉, $a = n\sqrt{n^2+1}$

[참고2]

직선 $y = nx + a$의 방정식과 주어진 원의 방정식을 연립하면

$x^2 + (nx + a)^2 = n^2$

정리하면

$(1 + n^2)x^2 + 2anx + a^2 - n^2 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D/4=(an)^2-(1+n^2)(a^2-n^2)=n^4+n^2-a^2=0$

풀면

$a=n\sqrt{n^2+1}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

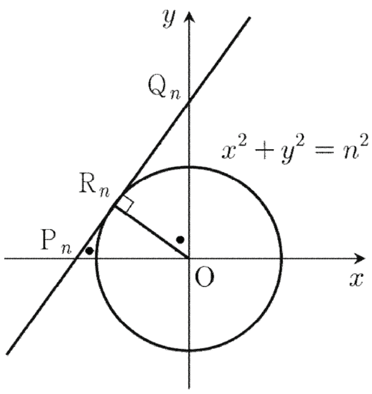
$y=nx+n\sqrt{n^2+1}$

[풀이3]

점 O에서 직선 P_nQ_n에 내린 수선의 발을 R_n이라고 하자.

원의 정의에 의하여

$\overline{OR_n}=n$ …㉠



직선 P_nQ_n의 기울기가 n이므로

$\dfrac{\overline{OQ_n}}{\overline{P_nO}}=n$

서로 닮은 두 삼각형 P_nOQ_n, OR_nQ_n에 대하여

$\dfrac{\overline{OQ_n}}{\overline{P_nO}}=n=\dfrac{\overline{R_nQ_n}}{\overline{OR_n}}$ …㉡

㉠과 ㉡에 의하여

$\overline{R_nQ_n}=n^2$

서로 닮은 두 삼각형 P_nOQ_n, P_nR_nO에 대하여

$\dfrac{\overline{OQ_n}}{\overline{P_nO}}=n=\dfrac{\overline{R_nO}}{\overline{P_nR_n}}$ …㉢

㉠과 ㉢에 의하여

$\overline{P_nR_n}=1$

일반항 l_n은

$l_n=\overline{P_nR_n}+\overline{R_nQ_n}=n^2+1$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$

답 ④

[참고3]

서로 닮은 두 직각삼각형 P_nR_nO, OR_nQ_n에 대하여

$\dfrac{\overline{R_nO}}{\overline{P_nR_n}}=\dfrac{\overline{R_nQ_n}}{\overline{OR_n}}$

등비수열의 정의에 의하여 세 선분

$\overline{P_nR_n}$, $\overline{OR_n}$, $\overline{R_nQ_n}$

의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$\overline{P_nR_n}=a_n$, $\overline{R_nQ_n}=b_n$으로 두면

$a_n+b_n=l_n$, $a_nb_n=n^2$($\because$ 등비중항의 정의)

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

a_n, b_n은 이차방정식

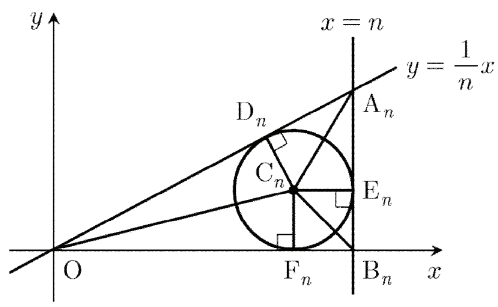
$t^2-l_nt+n^2=0$

의 두 실근이다.

G024 | 답 ③

[풀이1] ★

점 C_n에서 세 선분 OA_n, A_nB_n, B_nO에 내린 수선의 발을 각각 D_n, E_n, F_n이라고 하자.



삼각형 OA_nB_n에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

원의 정의와 정사각형의 정의에 의하여

$\overline{E_nB_n}=\overline{B_nF_n}=r_n$

두 직각삼각형 C_nOF_n, C_nOD_n은 서로 RHS합동이므로

$\overline{OD_n}=\overline{OF_n}=\overline{OB_n}-\overline{F_nB_n}=n-r_n$

두 직각삼각형 $C_nA_nE_n$, $C_nA_nD_n$은 서로 RHS합동이므로

$\overline{A_nD_n}=\overline{A_nE_n}=\overline{A_nB_n}-\overline{E_nB_n}=1-r_n$

$\overline{OA_n}=\overline{OD_n}+\overline{D_nA_n}=n+1-2r_n$ …㉠

직각삼각형 OA_nB_n에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{OA_n}=\sqrt{n^2+1}$ …㉡

㉠과 ㉡에서

$n+1-2r_n=\sqrt{n^2+1}$

정리하면

$r_n=\dfrac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{2}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}_n}\times r_n=\frac{\sqrt{n^2+1}\,(n+1-\sqrt{n^2+1}\,)}{4}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}\,(n+1-\sqrt{n^2+1}\,)}{4n}$$

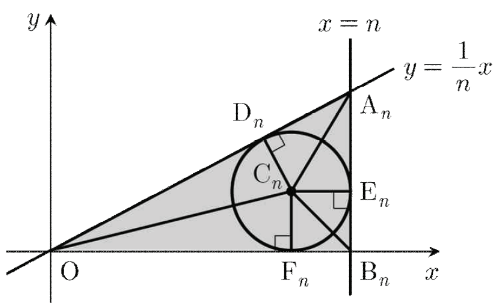
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2(n+1+\sqrt{n^2+1}\,)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2(1+1)}=\frac{1}{4}$$

답 ③

[풀이2] ★

점 C_n에서 세 선분 OA_n, $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$, $\mathrm{B}_n\mathrm{O}$에 내린 수선의 발을 각각 D_n, E_n, F_n이라고 하자.



삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.

$$(\triangle\,\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}_n}\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\frac{n}{2}$$

직각삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{OA}_n}=\sqrt{n^2+1}$$

$$(\triangle\,\mathrm{A}_n\mathrm{OC}_n\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{O}}\times\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}=\frac{r_n\sqrt{1+n^2}}{2}$$

$$(\triangle\,\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{O}\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}_n}\times\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{F}_n}=\frac{r_n n}{2}$$

$$(\triangle\,\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n}=\frac{r_n}{2}$$

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$의 넓이는 세 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OC}_n$, $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{O}$, $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$ 각각의 넓이의 합과 같다.

$$\frac{n}{2}=\frac{(n+1+\sqrt{n^2+1}\,)r_n}{2}$$

정리하면

$$r_n=\frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S_n=\frac{n\sqrt{n^2+1}}{2(n+1+\sqrt{n^2+1}\,)}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2(n+1+\sqrt{n^2+1}\,)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2(1+1)}=\frac{1}{4}$$

답 ③

[풀이3] 교육과정 외 (부등식의 영역)

점 C_n의 좌표를 $\mathrm{C}_n(x_n,\ y_n)$으로 두면 내접원의 반지름의 길이는 y_n이다. 왜냐하면 중심이 제1사분면에 있는 내접원이 x축에 접하기 때문이다.

점 C_n은 직선 $y=\frac{1}{n}x$의 아래쪽에 놓여 있으므로

부등식의 영역에 의하여

$$y_n<\frac{1}{n}x_n \text{ 즉, } x_n-ny_n>0$$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

(점 C_n에서 직선 $x-ny=0$까지의 거리)

$$=\frac{|x_n-ny_n|}{\sqrt{1^2+(-n)^2}}=\frac{x_n-ny_n}{\sqrt{1+n^2}}=y_n$$

=(내접원의 반지름의 길이)

정리하면

$$x_n-(n+\sqrt{1+n^2}\,)y_n=0 \qquad \cdots ㉠$$

점 C_n에서 직선 $x=n$까지의 거리는 $n-x_n$이므로

$$n-x_n=y_n \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$x_n=\frac{n^2+n\sqrt{1+n^2}}{1+n+\sqrt{1+n^2}},\ y_n=\frac{n}{1+n+\sqrt{1+n^2}}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}_n}\times y_n=\frac{n\sqrt{1+n^2}}{2(1+n+\sqrt{1+n^2}\,)}$$

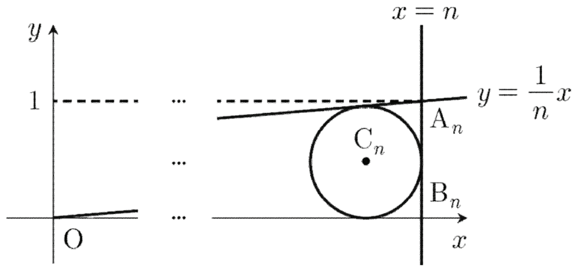
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2(n+1+\sqrt{n^2+1}\,)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2(1+1)}=\frac{1}{4}$$

답 ③

[풀이4] 시험장



두 직선 $x=n$, $y=\frac{1}{n}x$의 방정식을 연립하면

$x=n$, $y=1$

점 A_n의 좌표는 $A_n(n,\ 1)$이다.

두 직선 $x=n$, $y=1$과 x축에 동시에 접하는 원을 C라고 하자.

(단, 원 C의 x좌표는 n보다 작다.)

$n\to\infty\,(x\to\infty)$일 때, 점 A_n을 지나는 직선 $y=\frac{1}{n}x$의 기울기는 0에 수렴하므로 직선 $y=\frac{1}{n}x$은 직선 $y=1$에 한없이 가까워진다. 이때, 원 C_n의 지름의 길이는 원 C의 지름의 길이에 수렴한다.

내접원의 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\frac{1}{2}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{OA_n}\times r_n}{2n}$$

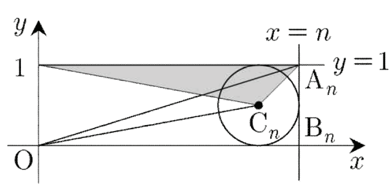
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}\times r_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2}\times r_n$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

답 ③

[참고] 시험장

위의 '기하학적인 풀이'를 좀 더 간략히 하면 다음과 같다.



$n\to\infty$일 때, 점 $(n,\ 1)$을 지나는 직선 $y=\frac{1}{n}x$는 직선 $y=1$에 한없이 가까워지므로 삼각형 A_nOC_n의 넓이는 위의 그림에서 어둡게 색칠한 삼각형의 넓이에 수렴한다.

$n\to\infty$일 때,

$$(\triangle A_nOC_n\text{의 넓이})\div n\approx\frac{\frac{1}{2}\times n\times\frac{1}{2}}{n}\to\frac{1}{4}$$

G025

|답 35

[풀이1]

$c_n=(n+1)a_n$으로 두면

$a_n=\frac{c_n}{n+1}$이고, $\lim_{n\to\infty}c_n=2$

$d_n=(n^2+1)b_n$으로 두면

$b_n=\frac{d_n}{n^2+1}$이고, $\lim_{n\to\infty}d_n=7$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+11n+1}{n^2+1}\times\frac{d_n}{c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{11}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\times\frac{d_n}{c_n}=10\times\frac{7}{2}=35$$

답 35

[풀이2]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a_n}\times\frac{(n^2+1)b_n}{1}\times\frac{(10n+1)(n+1)}{n^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\times7\times10=35$$

답 35

[풀이3] 시험장

$n\to\infty$일 때, $a_n\approx\frac{2}{n}$, $b_n\approx\frac{7}{n^2}$이므로

$$\frac{(10n+1)b_n}{a_n}\approx\frac{7n(10n+1)}{2n^2}\to35$$

답 35

G026

|답 12

[풀이1]

$a>0$이라고 가정하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+7}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b+\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\infty$$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

$a<0$이라고 가정하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+7}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b+\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}}=-\infty$$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

따라서 $a=0$

$a=0$을 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+7}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{b}{3}=4$$

에서 $b=12$이다.

$\therefore\ a+b=12$

답 12

[풀이2] 시험장

$n\to\infty$일 때,

$$\frac{an^2+bn+7}{0\cdot n^2+3n+1}\to 4$$

이므로

$a=0,\ b=3\cdot 4=12$

$\therefore\ a+b=12$

답 12

G027 | 답 ②

[풀이]

$nf(a)\geq 1$이라고 가정하자.

$|nf(a)-1|=nf(a)-1$

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2n+3}=0\neq 1$$

문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

따라서 $nf(a)<1$이다.

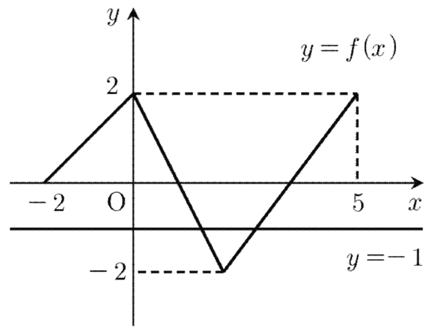
$|nf(a)-1|=1-nf(a)$

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2nf(a)}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-2f(a)}{2+\frac{3}{n}}$$

$=-f(a)=1$ 즉, $f(a)=-1$



함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$은 교점의 개수는 2이다.

따라서 방정식 $f(a)=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

답 ②

G028 | 답 ①

[풀이]

점 A_n의 좌표는 $\mathrm{A}_n\left(\frac{1}{n},\ \log_3\frac{1}{n}\right)$

점 C_n의 좌표는 $\mathrm{C}_n(x_n,\ 0)$

점 B_n의 좌표를 $\mathrm{B}_n(b_n,\ \log_3 b_n)$

조건 (나)에서

C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 $1:2$로 내분하는 점이다.

내분점의 공식에 의하여

$$x_n=\frac{b_n+\frac{2}{n}}{3},\quad 0=\frac{\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}}{3}$$

이 두 식을 연립하면

$$b_n=n^2,\ x_n=\frac{2}{3n}+\frac{n^2}{3}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

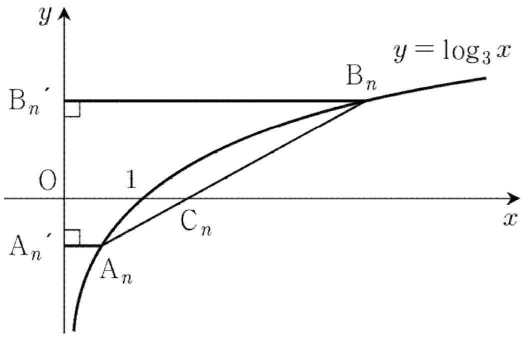
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3n^3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

답 ①

[참고1] ★

점 B_n의 좌표를 다음과 같이 구할 수도 있다.

두 점 A_n, B_n에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A}_n{}'$, $\mathrm{B}_n{}'$이라고 하자.



도형의 닮음에 의하여

$\overline{A_nC_n} : \overline{C_nB_n} = 1 : 2 = \overline{A_n{'}O} : \overline{OB_n{'}}$

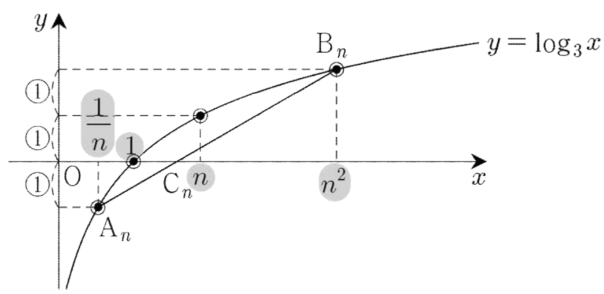
이므로

(점 B_n의 y좌표)$= -2\times$(점 A_n의 y좌표)

점 B_n의 좌표는 $B_n(n^2,\ \log_3 n^2)$이다.

[참고2]

다음과 같이 b_n, x_n의 일반항을 빠르게 유도할 수 있다.



위의 그림에서 ◉으로 표시된 네 개의 점의 y좌표는 크기 순서대로 등차수열을 이루므로 이 네 점의 x좌표는 크기 순서대로 공비가 n인 등비수열을 이룬다. 이 등비수열을 쓰면

$\frac{1}{n}(A_n),\ 1,\ n,\ n^2(B_n)$

이므로 $b_n = n^2$

내분점의 공식에 의하여

$$x_n = \frac{1\times n^2 + 2\times \frac{1}{n}}{1+2} = \frac{n^2}{3} + \frac{2}{3n}$$

G029 | 답 15

[풀이1]

주어진 부등식의 각 변에 양수 $\frac{5}{n^2+2n}$를 곱하면

$$\frac{15n^2+10n}{n^2+2n} < \frac{5a_n}{n^2+2n} < \frac{15n^2+15n}{n^2+2n}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+10n}{n^2+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{15+\frac{10}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 15$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+15n}{n^2+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{15+\frac{15}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 15$$

수열의 극한값에 대한 대소 관계에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{n^2+2n} = 15$$

답 15

[풀이2] 시험장

어차피 '수렴하는 수열의 극한에 대한 대소 관계(즉, 샌드위치 법칙)' 을 사용하여 문제를 해결해야 하므로

$a_n = 3n^2 + 3n$ (또는 $a_n = 3n^2 + 2n$)

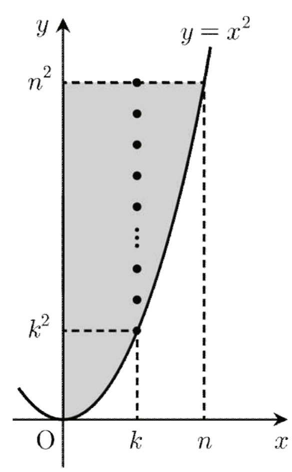
으로 두자.

$n\to\infty$일 때, $\frac{5a_n}{n^2+2n} = \frac{15n^2+15n}{n^2+2n} \to 15$

답 15

G030 | 답 ③

[풀이1]



문제에서 주어진 영역에 속하는 점 중에서 직선 $x = k$ 위의 점의 개수는

$n^2 - k^2 + 1$

(단, k는 n 이하의 음이 아닌 정수)

자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(n^2 - k^2 + 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(n^2+1) - \sum_{k=1}^{n}k^2$$

$(\because \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{0} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = 0 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2)$

$= (n^2+1)(n+1) - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \dfrac{4n^3+3n^2+5n+6}{6}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{5}{6n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right) = \dfrac{2}{3}$

답 ③

[참고]

다음과 같이 계산할 수도 있다.

$a_n = \sum_{k=0}^{n} (n^2 - k^2 + 1)$

$= \sum_{k=0}^{0} (n^2-k^2+1) + \sum_{k=1}^{n} (n^2-k^2+1)$

$= n^2+1+\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)$

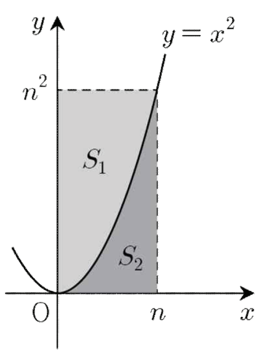
$= n^2+1+\sum_{k=1}^{n}(n^2+1) - \sum_{k=1}^{n} k^2$

$= n^2+1+n(n^2+1) - \sum_{k=1}^{n} k^2$

$= (n^2+1)(n+1) - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \dfrac{4n^3+3n^2+5n+6}{6}$)

[풀이2] 시험장 ★



곡선 $y=x^2$과 직선 $y=n^2$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1,

곡선 $y=x^2$과 직선 $x=n$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라고 하자.

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여 아래의 비례식이 성립함을 알 수 있다.

$S_1 : S_2 = 2:1$

$n \to \infty$일 때,

$n^3 =$ (□OABC의 넓이) $\approx$ (□OABC의 내부 또는 경계의 격자점의 개수),

$a_n =$ (곡선 $y=x^2$과 직선 $y=n^2$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 내부 또는 경계의 격자점의 개수)

$\approx$ (곡선 $y=x^2$과 직선 $y=n^2$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이)

이므로

$n \to \infty$일 때, $\dfrac{a_n}{n^3} \approx \dfrac{S_1}{S_1+S_2} = \dfrac{2}{3}$

답 ③

G031 | 답 ④

[풀이]

$a_1 = \dfrac{\pi}{4}$

$a_1 + \pi < a_2 < \dfrac{3}{2}\pi$

$a_2 + \pi < a_3 < \dfrac{5}{2}\pi$

$\vdots$

$a_{n-1} + \pi < a_n < \dfrac{2n-1}{2}\pi$

(단, $n \ge 2$)

위의 부등식을 변변히 모두 더하면

$(n-1)\pi + \dfrac{\pi}{4} < a_n$

2 이상의 자연수 n에 대하여

$(n-1)\pi + \dfrac{\pi}{4} < a_n < \dfrac{2n-1}{2}\pi$

각 변을 n으로 나누면

$\dfrac{4n-3}{4n}\pi < \dfrac{a_n}{n} < \dfrac{2n-1}{2n}\pi$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{4n-3}{4n}\pi = \pi$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{2n}\pi = \pi$

수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \pi$

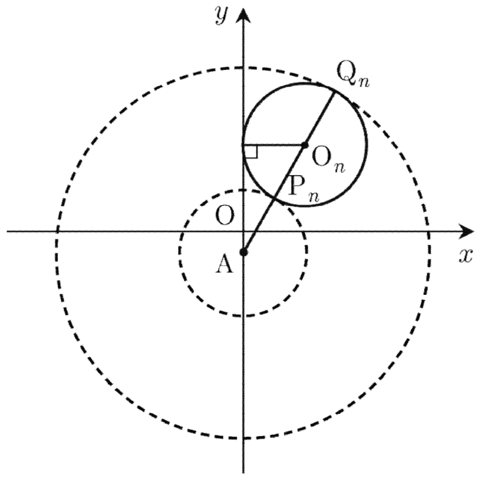
답 ④

G032 | 답 4

[풀이1]

점 $(0,\ -1)$을 A라고 하자.

직선 AO_n이 원 O_n과 만나는 두 점 중에서 점 A에 가까운 점을 P_n, 먼 점을 Q_n이라고 하자.



원 O_n의 반지름의 길이가 $3n$이므로

$a_n = \overline{\mathrm{AO}_n} + \overline{\mathrm{O}_n\mathrm{Q}_n} = \sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}+3n$

$b_n = \overline{\mathrm{AO}_n} - \overline{\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n} = \sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}-3n$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}+3n}{\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}-3n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+8n+1}+3n}{\sqrt{25n^2+8n+1}-3n}$$

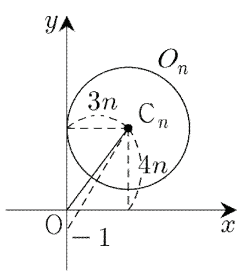
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}-3} = \frac{5+3}{5-3} = 4$$

답 4

[풀이2] 시험장

이 문제를 기하학적인 관점에서 해결해 보자.

원 O_n의 중심을 C_n이라고 하자.



$n\to\infty$일 때,

$a_n \approx \overline{\mathrm{OC}_n} + 3n = 5n + 3n = 8n$

$b_n \approx \overline{\mathrm{OC}_n} - 3n = 5n - 3n = 2n$

이므로

$n\to\infty$일 때,

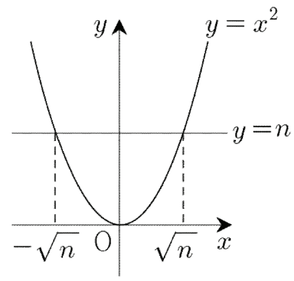
$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{8}{2} = 4$

답 4

G033 | 답 ②

[풀이1] 시험장

문제에서 주어진 모든 도형(곡선, 직선)과 점을 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동하자.



방정식 $x^2=n$을 풀면

$x = \pm\sqrt{n}$ 이므로 $h(n) = 2\sqrt{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{2}{2} = 1$$

답 ②

[풀이2]

주어진 방정식은

$x^2-6x+9-n=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=9-n$

곱셈공식에 의하여

$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta = 4n$

이므로

$|\alpha-\beta| = 2\sqrt{n}$

함수 $h(n)$의 방정식은

$h(n) = 2\sqrt{n}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{2}{1+1} = 1$$

답 ②

G034 | 답 ④

[풀이1]

직선 PQ의 방정식은

$y=-\frac{1}{2n}(x-n)+2n^2$

$y=0$을 대입하여 정리하면

$x=4n^3+n$

점 Q의 좌표는 Q$(4n^3+n,\ 0)$이므로

$l_n=4n^3+n$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

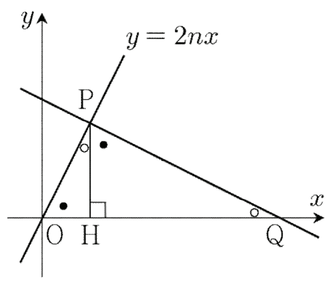
$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n^2}\right)=4$

답 ④

[풀이2] ★

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

이때, 점 H의 좌표는 H$(n,\ 0)$이다.



서로 닮은 두 직각삼각형 OHP, PHQ에 대하여

$\overline{OH}:\overline{PH}=\overline{PH}:\overline{HQ}$ 즉, $\overline{PH}^2=\overline{OH}\times\overline{HQ}$

등비중항의 정의에 의하여

세 선분 OH, PH, HQ의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

두 선분 OH, PH의 길이는 각각 n, $2n^2$이므로 선분 HQ의 길이는 $4n^3$이다.

$l_n=\overline{OQ}=\overline{OH}+\overline{HQ}=n+4n^3$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n^2}\right)=4$

답 ④

G035 | 답 110

[풀이1]

주어진 등식의 좌변을 변형하면

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+4n}-bn)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+4}{\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b}=\frac{1}{5}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\{(a-b^2)n+4\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+4}{\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b}\times\left(\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n+4}{\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b}\times\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a+\frac{4}{n}}+b\right)$

$=\frac{1}{5}\times(\sqrt{a}+b)$ $\cdots$ ㉠

$\lim_{n\to\infty}\{(a-b^2)n+4\}$가 수렴하기 위해서는

$a-b^2=0$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

(좌변)$=4=\frac{1}{5}\times(\sqrt{b^2}+b)=$(우변)

즉, $4=\frac{1}{5}\times(|b|+b)$ $\cdots$ ㉡

$b\le 0$인 경우

㉡의 좌변과 우변이 각각 4, 0이므로 등식 ㉡은 성립하지 않는다.

$b>0$인 경우

㉡은 $4=\frac{2}{5}b$ 풀면

$b=10$이므로 $a=b^2=100$

$\therefore\ a+b=110$

답 110

[참고]

$n\to\infty$일 때, $\sqrt{an^2+4n}-bn$이 발산하지 않으려면

$\sqrt{an^2+4n}\approx bn$ 즉, $\sqrt{a}\,n\approx bn$이어야 한다.

($\because$ $n\to\infty$일 때, $\sqrt{an^2+4n}\approx\sqrt{an^2}=\sqrt{a}\,n$)

$\therefore\ \sqrt{a}=b$

[풀이2] 시험장

$n\to\infty$일 때,

$\sqrt{an^2+4n}-bn\approx\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2}+bn}$

$=\frac{0\cdot n^2+4n}{\sqrt{a}\,n+bn}=\frac{4}{\sqrt{a}+b}\to\frac{1}{5}$

이므로

$a-b^2=0$, $\sqrt{a}+b=20$

$a=100$, $b=10$

$\therefore\ a+b=110$

답 110

G036 | 답 2

[풀이1]

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=-n\pm\sqrt{n^2+4n}$

모든 자연수 n에 대하여

$-n-\sqrt{n^2+4n}<0$이므로

$a_n=-n+\sqrt{n^2+4n}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+1}=\dfrac{4}{2}=2$

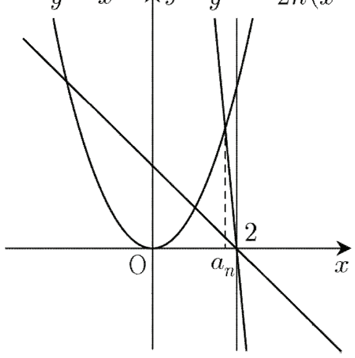
답 2

[풀이2] 시험장

문제에서 주어진 이차방정식을 변형하면

$x^2=-2n(x-2)$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=-2n(x-2)$의 두 교점 중에서 x좌표가 양수인 점의 x좌표는 a_n이다.



위의 그림에서 $n\to\infty$일 때, 직선 $y=-2n(x-2)$은 직선 $x=2$에 한없이 가까워지므로 $a_n\to2$임을 알 수 있다.

답 2

G037 | 답 ⑤

[풀이]

▸ 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$이 x축과 만나므로

이차방정식

$x^2-(n+1)x+a_n=0$ $\cdots$ ㉠

은 실근을 가져야 한다.

(㉠의 판별식)$=(n+1)^2-4a_n\geq0$

정리하면

$a_n\leq\dfrac{(n+1)^2}{4}$

▸ 곡선 $y=x^2-nx+a_n$이 x축과 만나지 않으므로

이차방정식

$x^2-nx+a_n=0$ $\cdots$ ㉡

은 허근을 가져야 한다.

(㉡의 판별식)$=n^2-4a_n<0$

정리하면

$a_n>\dfrac{n^2}{4}$

모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{n^2}{4}<a_n\leq\dfrac{(n+1)^2}{4}$

양변을 $n^2(>0)$으로 나누면

$\dfrac{1}{4}<\dfrac{a_n}{n^2}\leq\dfrac{(n+1)^2}{4n^2}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=\dfrac{1}{4}$

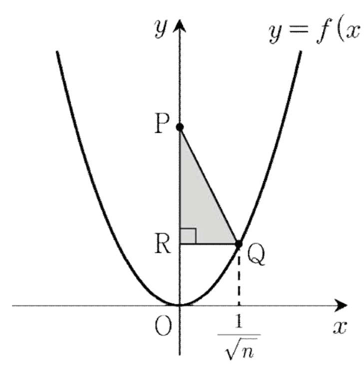
답 ⑤

G038 | 답 ⑤

[풀이1]

방정식 $f(x)=1$(단, $x>0$)을 풀면

$x=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ 1\right)$이다.



직선 RQ가 x축에 평행하므로

$\overline{PR} \perp \overline{RQ}$

$\triangle PRQ$는 $\angle PRQ = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S_n = \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{RQ} = \sqrt{n}$$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$l_n = \overline{PQ} = \sqrt{\frac{1}{n} + 4n^2}$$

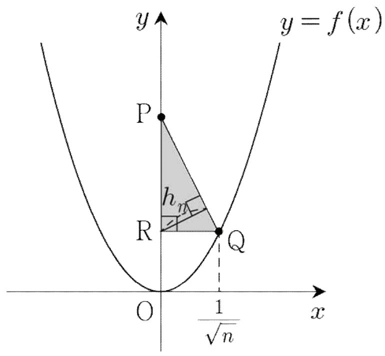
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^2}{l_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n} + 4n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^3} + 4}} = \frac{1}{2}$$

답 ⑤

[풀이2]

점 R과 직선 PQ 사이의 거리를 h_n이라고 하자.



삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S_n = \frac{l_n h_n}{2}$$

$n \to \infty$ 일 때, $h_n \approx \overline{RQ} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 이므로

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^2}{l_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n h_n}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times 2n \times \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

G039 | 답 ④

[풀이1]

문제에서 주어진 부등식의 각 변은 모두 양수(+)이므로

$$9n^2 + 4 < na_n < (3n+2)^2$$

각 변을 n^2으로 나누면

$$\frac{9n^2+4}{n^2} < \frac{a_n}{n} < \frac{(3n+2)^2}{n^2}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+4}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(9 + \frac{4}{n^2}\right) = 9 + 0 = 9$이고,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+12n+4}{n^2}$$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(9 + \frac{12}{n} + \frac{4}{n^2}\right) = 9 + 0 + 0 = 9$이므로

수렴하는 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 9$$

답 ④

[참고] 시험장

다음과 같은 빠른 계산도 가능하다.

$n \to \infty$ 일 때, $9n^2 + 4 \approx 9n^2$이므로

$$\frac{9n^2+4}{n^2} \approx \frac{9n^2}{n^2} \to 9$$

$n \to \infty$ 일 때, $(3n+2)^2 \approx (3n)^2 \approx 9n^2$이므로

$$\frac{(3n+2)^2}{n^2} \approx \frac{9n^2}{n^2} \to 9$$

[풀이2]

문제에서 주어진 부등식의 각 변을 n으로 나누어 정리하면

$$\sqrt{9 + \frac{4}{n^2}} < \sqrt{\frac{a_n}{n}} < 3 + \frac{2}{n}$$

$n \to \infty$ 일 때,

$\sqrt{9 + \dfrac{4}{n^2}} \to 3$이고 $3 + \dfrac{2}{n} \to 3$이므로

수렴하는 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}} = 3$$

여기서 $b_n = \sqrt{\dfrac{a_n}{n}}$ 으로 두면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 3$이므로

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} b_n^2 = 3^2 = 9$$

답 ④

G040 | 답 ⑤

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n}{n^2-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} = 5$$

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2022 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2022 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통 〉

- 공통 1 : 문제를 보자마자 a^2-b^2이 떠올라야 함. 1번부터 '이 시험은 교과서/기출문제를 풀었던 기억으로 푼다.' 를 의도적으로 말하고 있음. 즉, '정해진 풀이를 따르지 않으면 망한다.' 를 노골적으로 표현.
- 공통 8 : 이차함수의 정적분 → 대칭축을 생각한다.
- 공통 13 : 그림을 그릴 수 없으니, 처음부터 끝까지 계산. 로그문제에서 a^b이 나오면 $\log a^b = b\log a$ 생각이 들어야.
- 공통 14 : x축에서 점 P를 움직이는게 우선.
- 공통 15 : 역대 평가원 기출 중에서 " 코사인법칙에 의하여 " 란 문구가 등장한 첫 번째 문제. 어떤 공식을 써야 하는지 알려 주었는데. 어려운 문제일리 없다. 읽는데 4점.
- 공통 21 : $2+2^2+2^3<2^4$과 같은 계산을 해보았는가? '기하급수적으로 빨라진다.' 의 의미를 아는가를 평가.
- 공통 22 : $f(1)=f(4)$에서 $f(x)$의 그래프의 개형이 바로 나와야 함. 삼차함수의 비율관계.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 28 : 분할, 여사건 모두 가능. 이 문제 보다 경우 구분이 많은 함수 개수 세는 문제는 기출에 널려있음.
- 확률과 통계 29 : 적분 기호 쓰면 좀 더 편하긴 한데. $y=k$ 그리면 더 단순하게 해결 가능.
- 확률과 통계 30 : 답을 맞히기 상당히 어려운, 실수하기 딱 좋은 문제. 수형도 그냥 다 그리는 편이 나음.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 : 평행이동/대칭성 & 기출을 풀었던 경험. 풀이 중간 과정에서 답을 바로 알 수 있음.
- 미적분 29 : 계산이 복잡하니. 극한의 근사적 계산으로 접근하면 실수 없이 빠르게 계산 가능.
- 미적분 30 : (나)의 항등식에 $x=1,\ 2,\ 4$ 대입하여 점찍고, 확대해서 그리면 끝. 역함수의 정적분 계산 말고, 그림으로 해결.

〈 기하 〉

- 기하 26 : 동일하게 쌍곡선으로 수능에 출제된 적이 있음. 원 밖의 점에서 접선 2개 그으면 합동인 직각삼각형 2개 찾는다.
- 기하 28 : 빗변 주면, 직각삼각형 그리고. 기울기 없으니, 피타 쓰고. 포물선의 정의대로 선분 그으면 직각 안에 수선 그려지니 닮음 쓰고.
- 기하 29 : 문제에서 원 위의 점 주었으니. (나)는 직선(선분)일 수밖에. 이 유형의 문제 중에서도 중급 수준.
- 기하 30 : 평가원 기출 중, 구/직선 정사영 내려서 점의 이동 관찰하는 문제의 확장판. 풀다보면 이면각 보다는 정사영이 좀 더 편하긴 하지만. 이면각의 정의에 의한 풀이도 계산이 거의 없음. 기존 공도 기출과 비교하여 중급 수준.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정		
1991	실험평가(1차)	1990년 12월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월
1995	대학수학능력	1994년 11월
1996	대학수학능력	1995년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월
1998	대학수학능력	1997년 11월
6차 교육과정		
1999	대학수학능력	1998년 11월
2000	대학수학능력	1999년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월
2002	대학수학능력	2001년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월
7차 교육과정		
2005	예비시행	2003년 12월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월
2005	대학수학능력	2004년 11월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월
2006	대학수학능력	2005년 11월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월
2009	모의평가(9월)	2008년 9월
2009	대학수학능력	2008년 11월
2010	모의평가(6월)	2009년 6월
2010	모의평가(9월)	2009년 9월
2010	대학수학능력	2009년 11월
2011	모의평가(6월)	2010년 6월
2011	모의평가(9월)	2010년 9월
2011	대학수학능력	2010년 11월

학년도	시험	실시년도/월
2007개정 교육과정		
2012	모의평가(6월)	2011년 6월
2012	모의평가(9월)	2011년 9월
2012	대학수학능력	2011년 11월
2014	예비시행	2012년 5월
2013	모의평가(6월)	2012년 6월
2013	모의평가(9월)	2012년 9월
2013	대학수학능력	2012년 11월
2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2014	대학수학능력	2013년 11월
2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2015	대학수학능력	2014년 11월
2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2016	대학수학능력	2015년 11월
2009개정 교육과정		
2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2017	대학수학능력	2016년 11월
2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2018	대학수학능력	2017년 11월
2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2019	대학수학능력	2018년 11월
2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2020	대학수학능력	2019년 11월
2015개정 교육과정		
2021	예시문항	2020년 5월
2021	모의평가(6월)	2020년 6월
2021	모의평가(9월)	2020년 9월
2021	대학수학능력	2020년 11월
2022	모의평가(6월)	2021년 6월
2022	모의평가(9월)	2021년 9월
2022	대학수학능력	2021년 11월

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다. 그리고 모든 풀이를 보여준다는 의미에서 교육과정 외의 풀이도 수록하였으나, 이를 반드시 읽어야(공부해야) 하는 것은 아닙니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)
[풀이] (교육과정 외)
[참고] (교육과정 외)

목 차

기하

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

M 이차곡선

- 2015개정 교육과정

◆ 수학 I (공통과목)에서 라디안을 배우므로 라디안으로 출제된 기출은 변형하지 않았습니다.

○ 해설에서 '이차곡선의 접선의 방정식(기울기가 m으로 주어진)에 대한 공식' 을 사용

○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록

○ 육십분법 도입

○ 기울기가 주어진 접선의 공식 귀환

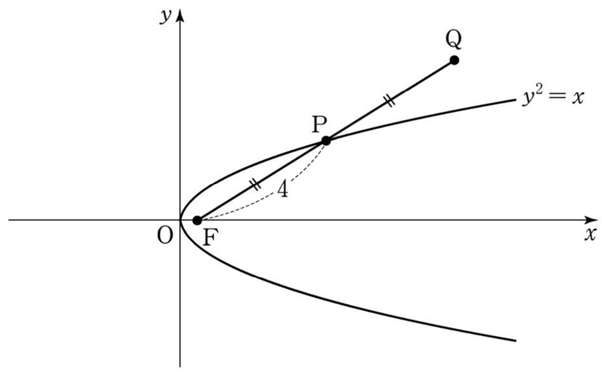
○ 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 출제 가능

M. 포물선

M001

○○
(2007-가형5)

초점이 F인 포물선 $y^2 = x$ 위에 $\overline{\mathrm{FP}} = 4$인 점 P가 있다. 그림과 같이 선분 FP의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{PQ}}$가 되도록 점 Q를 잡을 때, 점 Q의 x좌표는? [3점]



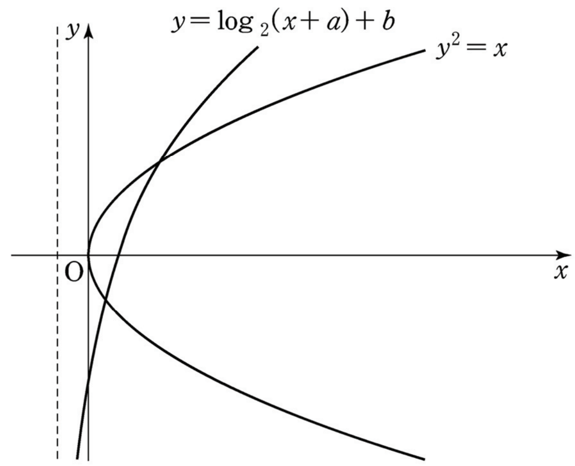
① $\frac{29}{4}$ ② 7 ③ $\frac{27}{4}$

④ $\frac{13}{2}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

M002

○○
(2008-가형5)

로그함수 $y = \log_2(x+a)+b$의 그래프가 포물선 $y^2 = x$의 초점을 지나고, 이 로그함수의 그래프의 점근선이 포물선 $y^2 = x$의 준선과 일치할 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{9}{4}$

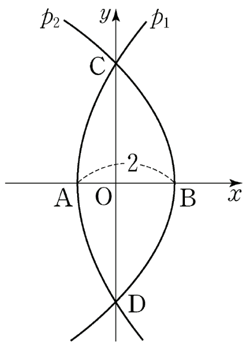
④ $\frac{21}{8}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

M003

(2011－가형14)

그림과 같이 좌표평면에서 x축 위의 두 점 A, B에 대하여 꼭짓점이 A인 포물선 p_1과 꼭짓점이 B인 포물선 p_2가 다음 조건을 만족시킨다. 이 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

(가) p_1의 초점은 B이고, p_2의 초점은 원점 O이다. (나) p_1과 p_2는 y축 위의 두 점 C, D에서 만난다. (다) $\overline{\mathrm{AB}}=2$

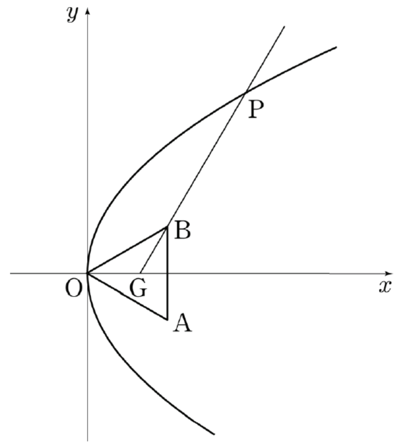


① $4(\sqrt{2}-1)$ ② $3(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{5}+1$

M004

(2012(6)－가형29)

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가 x축 위에 있다. 꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 선분 GP의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다) [4점]



M005

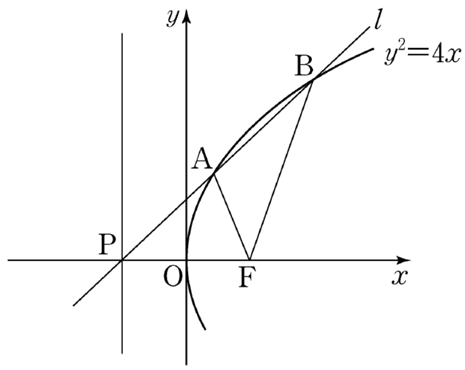
○○ (2014(예비)−B형27)

포물선 $y^2=4px(p>0)$의 초점을 F, 포물선의 준선이 x축과 만나는 점을 A라 하자. 포물선 위의 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=7$이고 $\overline{\mathrm{BF}}=5$가 되도록 하는 p의 값이 a 또는 b일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$이다.) [4점]

M006

●●● (2013(6)−가형20)

포물선 $y^2=4x$의 초점을 F, 준선이 x축과 만나는 점을 P, 점 P를 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{FA}}:\overline{\mathrm{FB}}=1:2$일 때, 직선 l의 기울기는? [4점]



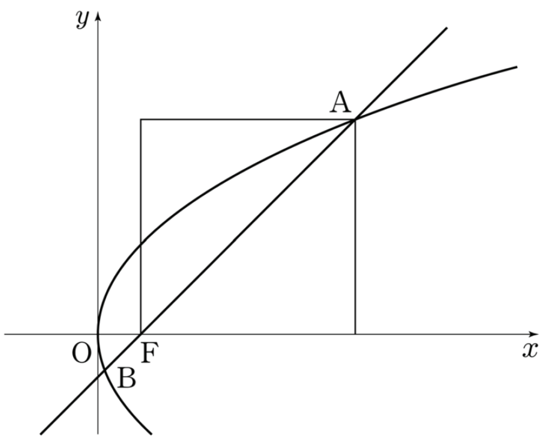
① $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\dfrac{4}{5}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

M007

○○
(2013(9)−가형26)

그림과 같이 좌표평면에서 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F인 포물선과 점 F를 지나고 기울기가 1인 직선이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AF를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이가 2일 때, 선분 AB의 길이는 $a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) [4점]



M008

○○○
(2013−가형18)

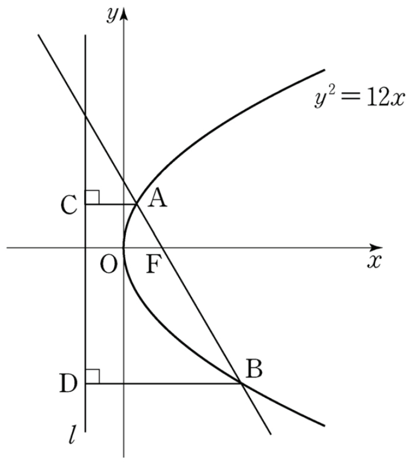
자연수 n에 대하여 포물선 $y^2=\dfrac{x}{n}$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=1$이고 $\overline{\mathrm{FQ}}=a_n$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은? [4점]

① 210　② 205　③ 200
④ 195　⑤ 190

M009

○○
(2015-B형10)

그림과 같이 포물선 $y^2=12x$의 초점 F를 지나는 직선과 포물선이 만나는 두 점 A, B에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}=4$일 때, 선분 BD의 길이는? [3점]



① 12 ② $\frac{25}{2}$ ③ 13

④ $\frac{27}{2}$ ⑤ 14

M010

○○
(2017(9)-가형25)

좌표평면에서 초점이 F인 포물선 $x^2=4y$ 위의 점 A가 $\overline{AF}=10$을 만족시킨다. 점 B$(0,\ -1)$에 대하여 $\overline{AB}=a$일 때, a^2의 값을 구하시오. [3점]

M011

○
(2019(9)-가형5)

초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P$(a,\ b)$에 대하여 $\overline{PF}=4$일 때, $a+b$의 값은? (단, $b>0$) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

M012

○○
(2019-가형6)

초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=9$일 때, 점 P의 x좌표는? [3점]

① 6　② $\frac{13}{2}$　③ 7　④ $\frac{15}{2}$　⑤ 8

M013

○○
(2020(6)-가형8)

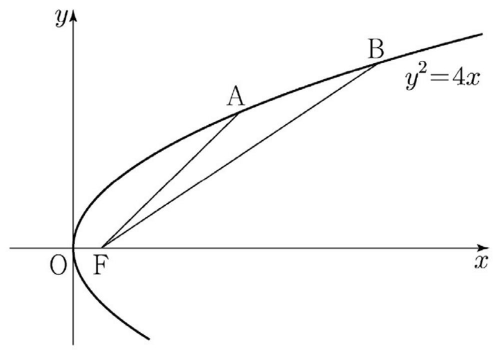
포물선 $y^2-4y-ax+4=0$의 초점의 좌표가 $(3,\ b)$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

M014

○○○
(2020(9)-가형27)

초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다. 두 점 A, B의 x좌표는 1보다 큰 자연수이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표가 6일 때, $\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{BF}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



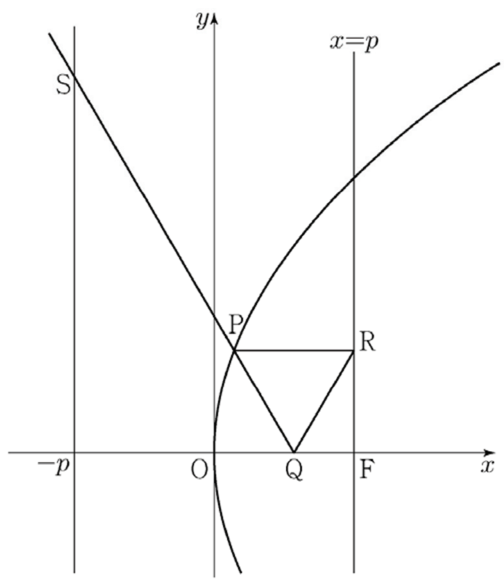
M015

○○○
(2022(예시문항)-기하29)

그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 $F(p,\ 0)(p>0)$인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 P, x축 위의 점 Q, 직선 $x=p$ 위의 점 R에 대하여 삼각형 PQR는 정삼각형이고 직선 PR는 x축과 평행하다.

직선 PQ가 점 $S(-p,\ \sqrt{21})$을 지날 때,

$\overline{QF}=\dfrac{a+b\sqrt{7}}{6}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



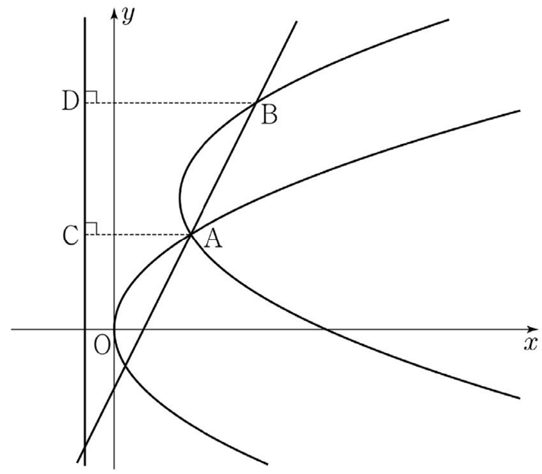
M016

●●●
(2022(6)-기하29)

포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때,

직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때,

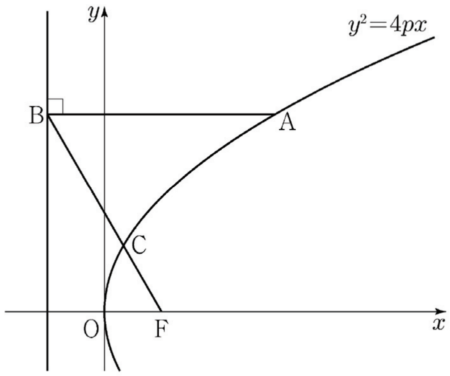
$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



M017

○○○
(2022(9)-기하26)

초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 선분 BF와 포물선이 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BF}$이고 $\overline{BC}+3\overline{CF}=6$일 때, 양수 p의 값은? [3점]



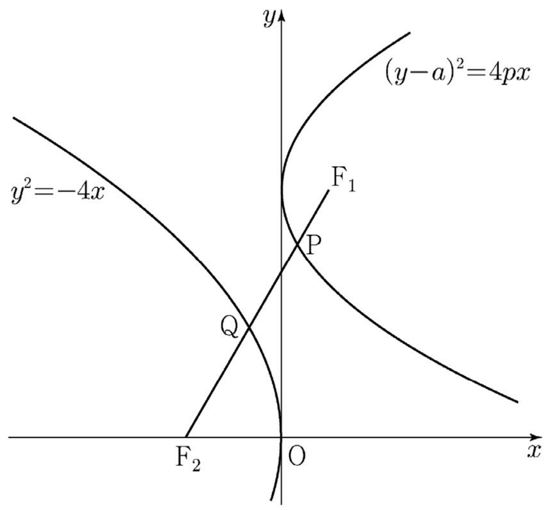
① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{9}{10}$

④ $\frac{10}{11}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

M018

★★★
(2022-기하28)

두 양수 a, p에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 F_1이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 F_2라 하자. 선분 F_1F_2가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{F_1F_2}=3$, $\overline{PQ}=1$이다. a^2+p^2의 값은? [4점]



① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$

④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

M. 타원

M019

○○
(2000−자연20)

이차곡선 $x^2-4x+9y^2-5=0$과 중심이 $(2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 a인 원이 서로 다른 네 점에서 만날 때, a의 범위는? [3점]

① $0<a\le 2$ ② $1<a<3$ ③ $2\le a<4$
④ $0<a<4$ ⑤ $a\ge 2$

M020

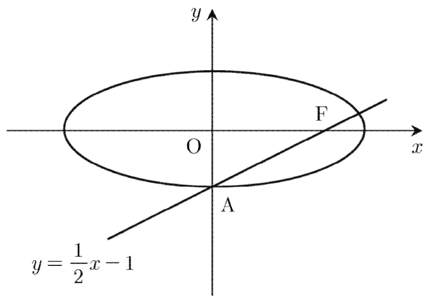
○○
(2003(9)−자연26)

타원 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$의 두 초점을 F와 F$'$이라 하고, 이 타원과 원 $(x+8)^2+y^2=9$와의 교점 중 하나를 P라 하자. 이때, 두 선분 PF와 PF$'$의 길이의 곱 $\overline{\mathrm{PF}}\cdot\overline{\mathrm{PF'}}$을 구하시오. [2점]

M021

○○
(2003−자연5)

그림과 같이 원점을 중심으로 하는 타원의 한 초점을 F라 하고, 이 타원이 y축과 만나는 한 점을 A라고 하자. 직선 AF의 방정식이 $y=\dfrac{1}{2}x-1$일 때, 이 타원의 장축의 길이는? [2점]



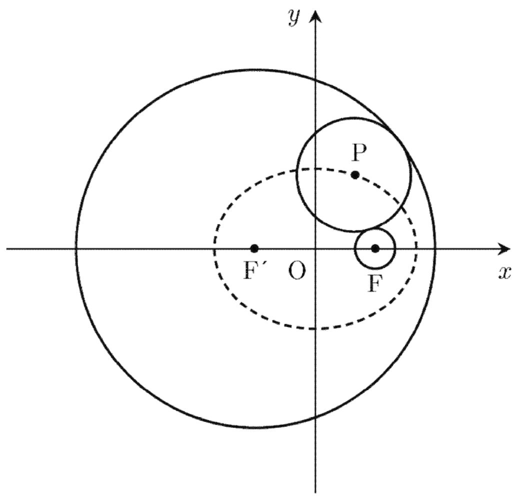
① $4\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{7}$ ③ 5
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

M022

○○
(2004(6)-자연29)

그림과 같이 중심이 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원과 중심이 $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 9인 원이 있다. 큰 원에 내접하고 작은 원에 외접하는 원의 중심 P는 F와 F′을 두 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위를 움직인다.

이때, a^2+b^2의 값을 구하시오. [3점]



M023

○○
(2004-자연19)

두 타원이 점 F를 한 초점으로 공유하고 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 두 타원의 장축의 길이가 각각 16, 24이고, 두 타원의 나머지 초점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$라 할 때,

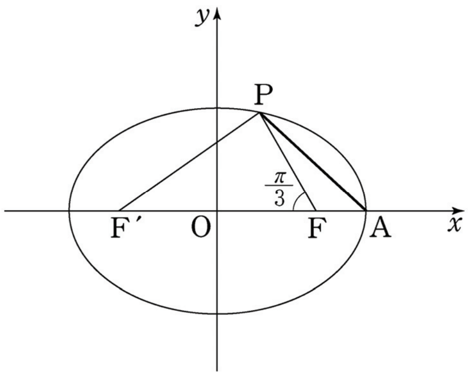
$|\overline{\mathrm{PF_1}}-\overline{\mathrm{PF_2}}|+|\overline{\mathrm{QF_1}}-\overline{\mathrm{QF_2}}|$의 값은? [3점]

① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

M024

○○○
(2005-가형22)

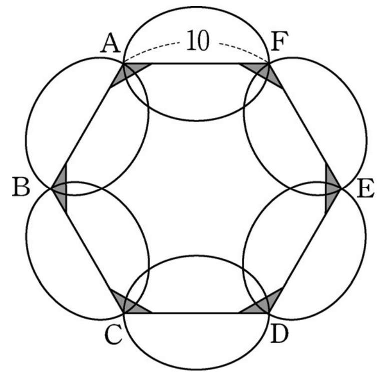
타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점을 F와 F$'$이라 하고, 초점 F에 가장 가까운 꼭짓점을 A라 하자. 이 타원 위의 한 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PFF'}=\frac{\pi}{3}$일 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2$의 값을 구하시오. [4점]



M025

○○○
(2006-가형7)

오른쪽 그림은 한 변의 길이가 10인 정육각형 ABCDEF의 각 변을 장축으로 하고, 단축의 길이가 같은 타원 6개를 그린 것이다. 그림과 같이 정육각형의 꼭짓점과 이웃하는 두 타원의 초점으로 이루어진 삼각형 6개의 넓이의 합이 $6\sqrt{3}$일 때, 타원의 단축의 길이는? [3점]

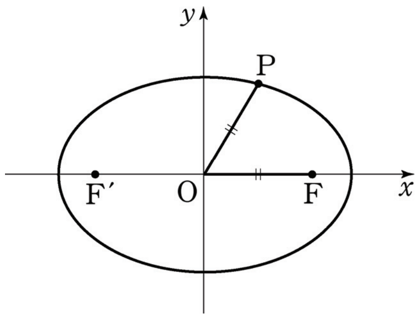


① $4\sqrt{2}$　② 6　③ $4\sqrt{3}$
④ 8　⑤ $6\sqrt{2}$

M026

○○
(2007(9)−가형22)

타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF}}$를 만족시킬 때, $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



M027

○
(2008(9)−가형20)

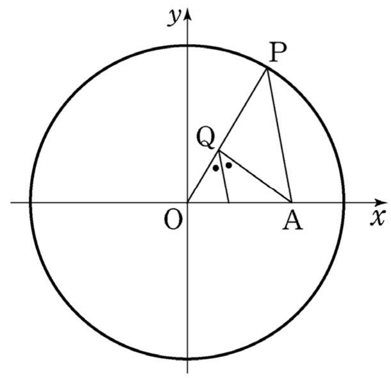
타원 $x^2+9y^2=9$의 두 초점 사이의 거리를 d라 할 때, d^2의 값을 구하시오. [3점]

M028

○○○
(2009(9)−가형8)

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=36$ 위를 움직이는 점 P$(a,\ b)$와 점 A$(4,\ 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 Q 전체의 집합을 X라 하자. (단, $b\neq 0$)

(가) 점 Q는 선분 OP 위에 있다. (나) 점 Q를 지나고 직선 AP에 평행한 직선이 ∠OQA를 이등분한다.



집합의 포함관계로 옳은 것은? [4점]

① $X\subset\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{5}=1\right\}$

② $X\subset\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{5}=1\right\}$

③ $X\subset\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{y^2}{5}=1\right\}$

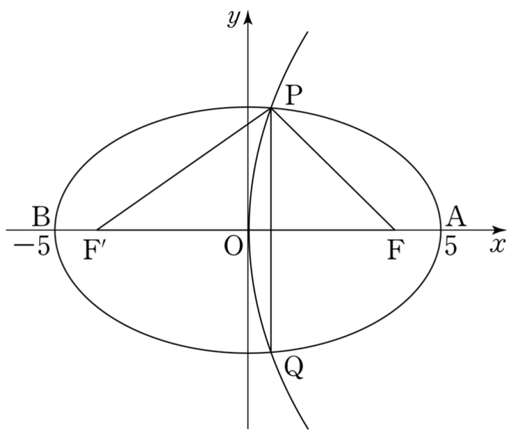
④ $X\subset\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1\right\}$

⑤ $X\subset\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1\right\}$

M029

○○○
(2011(9)-가형20)

좌표평면에서 두 점 A$(5,\ 0)$, B$(-5,\ 0)$에 대하여 장축이 선분 AB인 타원의 두 초점을 F, F$'$이라 하자. 초점이 F이고 꼭짓점이 원점인 포물선이 타원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{10}$일 때, 두 선분 PF와 PF$'$의 길이의 곱 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]



M030

○○
(2012(9)-가형13)

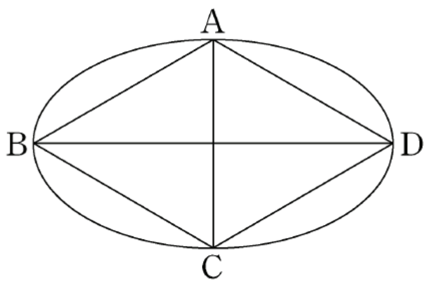
두 초점이 F, F$'$이고, 장축의 길이가 10, 단축의 길이가 6인 타원이 있다. 중심이 F이고 점 F$'$을 지나는 원과 이 타원의 두 교점 중 한 점을 P라 하자. 삼각형 PFF$'$의 넓이는? [3점]

① $2\sqrt{10}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{6}$
④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{70}$

M031

○○ (2012－가형11)

한 변의 길이가 10인 마름모 ABCD에 대하여 대각선 BD를 장축으로 하고, 대각선 AC를 단축으로 하는 타원의 두 초점 사이의 거리가 $10\sqrt{2}$ 이다. 마름모 ABCD의 넓이는? [3점]

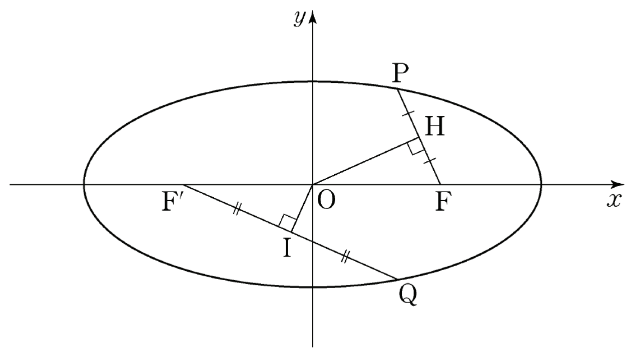


① $55\sqrt{3}$ ② $65\sqrt{2}$ ③ $50\sqrt{3}$
④ $45\sqrt{3}$ ⑤ $45\sqrt{2}$

M032

●●● (2013(6)－가형27)

두 점 F$(5,\ 0)$, F$'(-5,\ 0)$을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 원점 O에서 선분 PF와 선분 QF$'$에 내린 수선의 발을 각각 H와 I라 하자. 점 H와 점 I가 각각 선분 PF와 선분 QF$'$의 중점이고, $\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{OI}}=10$일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{OH}}\neq\overline{\mathrm{OI}}$) [4점]

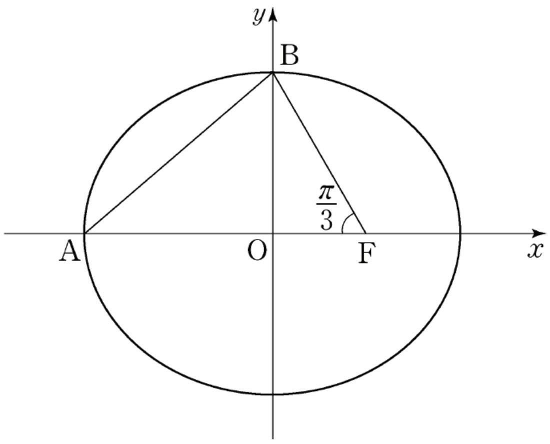


M033

○○
(2014(9)−B형9)

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$, 이 타원이 x축과 만나는 점 중에서 x좌표가 음수인 점을 A, y축과 만나는 점 중에서 y좌표가 양수인 점을 B라 하자.

$\angle \mathrm{AFB}=\dfrac{\pi}{3}$이고 삼각형 AFB의 넓이는 $6\sqrt{3}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

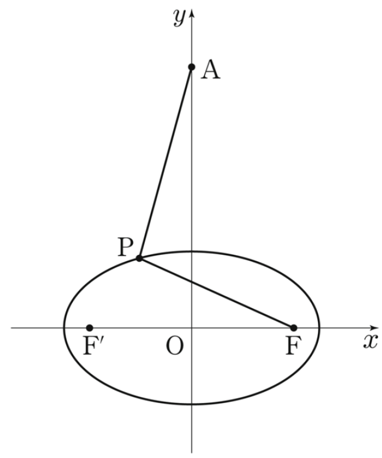


① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

M034

○○○
(2014−B형27)

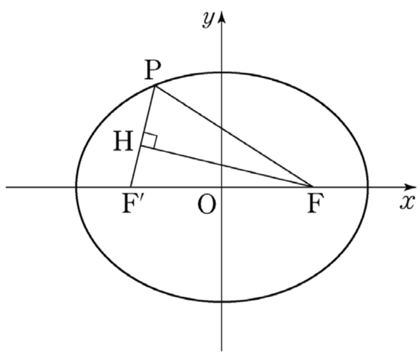
그림과 같이 y축 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ a)$와 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{FP}}$의 최솟값이 1일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]



M035

○○ (2015(6)−B형17)

그림과 같이 두 초점 F, F$'$이 x축 위에 있는 타원 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{a}=1$ 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{FP}}=9$를 만족시킨다. 점 F에서 선분 PF$'$에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{\mathrm{FH}}=6\sqrt{2}$일 때, 상수 a의 값은? [4점]

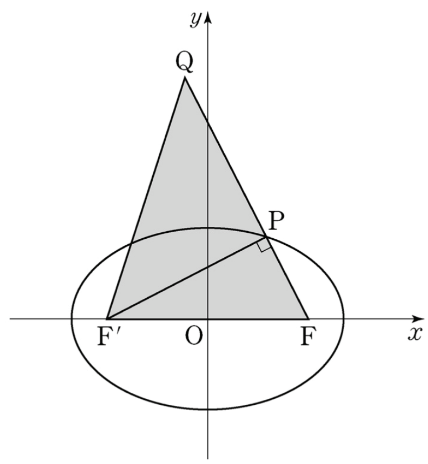


① 29　② 30　③ 31　④ 32　⑤ 33

M036

○○ (2015−B형27)

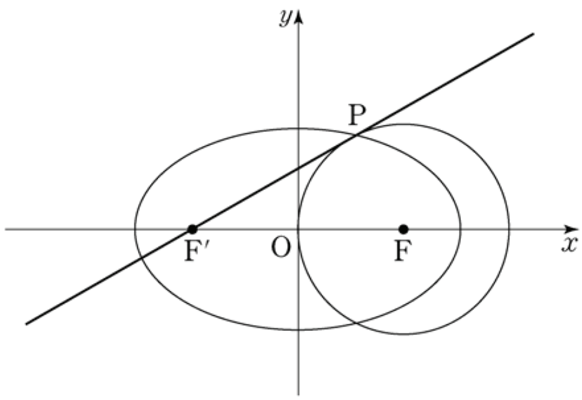
타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F$'$이라 하자. 이 타원 위의 점 P를 $\angle \mathrm{FPF'}=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 제1사분면에서 잡고, 선분 FP의 연장선 위에 y좌표가 양수인 점 Q를 $\overline{\mathrm{FQ}}=6$이 되도록 잡는다. 삼각형 QF$'$F의 넓이를 구하시오. [4점]



M037

○○
(2016(6)−B형12)

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 4인 타원이 있다. 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 c인 원이 타원과 점 P에서 만난다. 점 P에서 원에 접하는 직선이 점 F′을 지날 때, c의 값은? [3점]



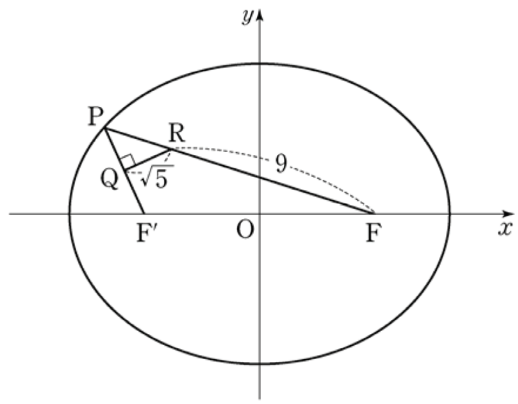
① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}-1$
④ $2\sqrt{3}-2$ ⑤ $\sqrt{14}-\sqrt{5}$

M038

●●●
(2016−B형26)

그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 위에 있고 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF′의 중점을 Q, 선분 PF를 $1:3$으로 내분하는 점을 R라 하자.

$\angle \mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{RF}}=9$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 양수이다.) [4점]



M039
○ (2017(6)−가형26)

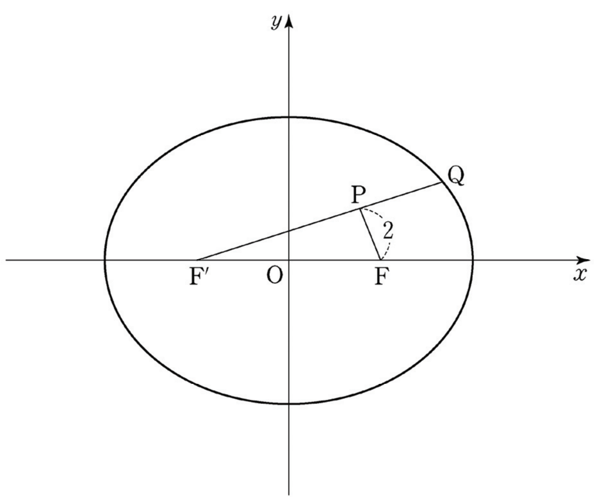
타원 $4x^2+9y^2-18y-27=0$의 한 초점의 좌표가 $(p,\ q)$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. [4점]

M040
○○ (2017(9)−가형27)

그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$의 두 초점은 F, F′이고, 제1사분면에 있는 두 점 P, Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{PF}}=2$
(나) 점 Q는 직선 PF′과 타원의 교점이다.

삼각형 PFQ의 둘레의 길이와 삼각형 PF′F의 둘레의 길이의 합을 구하시오. [4점]

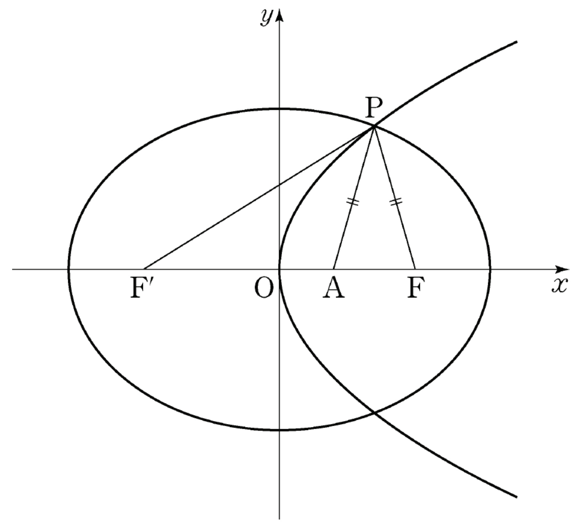


M041
●●● (2018(9)−가형27)

좌표평면에서 초점이 $\mathrm{A}(a,\ 0)(a>0)$이고 꼭짓점이 원점인 포물선과 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>a)$인 타원의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자.

$$\overline{\mathrm{AF}}=2,\ \overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PF}},\ \overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}$$

일 때, 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{7}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]



M042
○○ (2018−가형8)

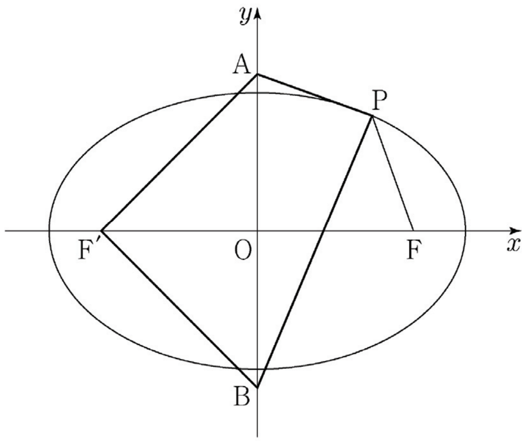
타원 $\dfrac{(x-2)^2}{a}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표가 $(6,\ b)$, $(-2,\ b)$일 때, ab의 값은? (단, a는 양수이다.) [3점]

① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

M043

○○○
(2019(9)-가형27)

좌표평면에서 두 점 A$(0,\ 3)$, B$(0,\ -3)$에 대하여, 두 초점이 F, F$'$인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PF}}$를 만족시킨다. 사각형 AF$'$BP의 둘레의 길이가 $a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF'}}$이고 a, b는 자연수이다.) [4점]

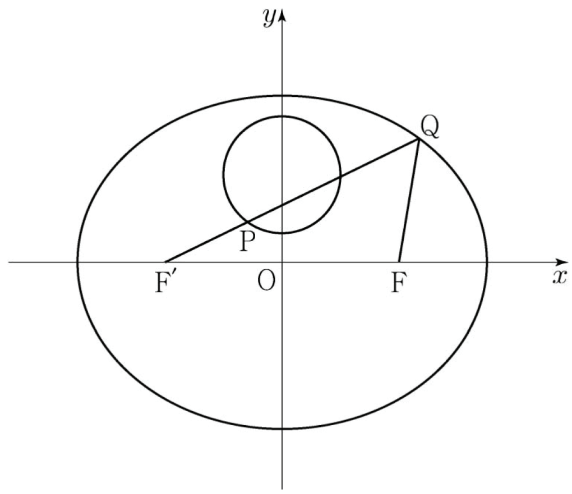


M044

○○○
(2019-가형28)

두 초점이 F, F$'$인 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{33}=1$이 있다.

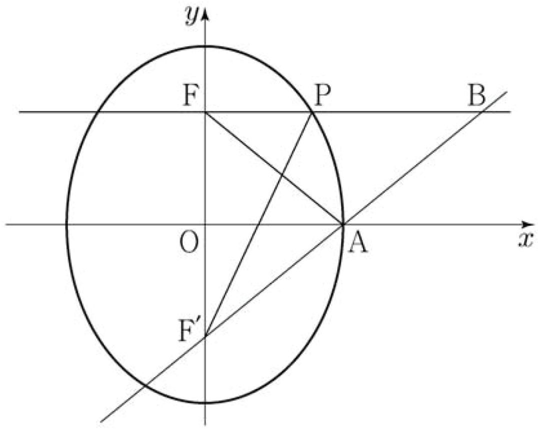
원 $x^2+(y-3)^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 F$'$P가 이 타원과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



M045

○○○ (2020-가형13)

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$를 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{25}=1$이 x축과 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 A라 하자. 직선 $y=c$가 직선 AF'과 만나는 점을 B, 직선 $y=c$가 타원과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 P라 하자. 삼각형 BPF'의 둘레의 길이와 삼각형 BFA의 둘레의 길이의 차가 4일 때, 삼각형 AFF'의 넓이는? (단, $0<a<5$, $c>0$) [3점]

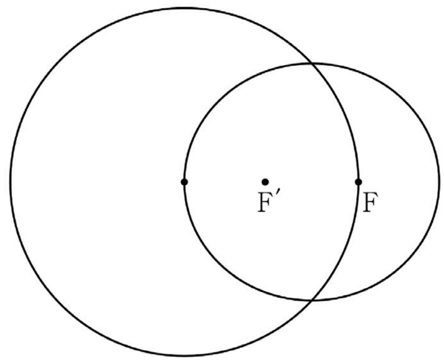


① $5\sqrt{6}$　② $\dfrac{9\sqrt{6}}{2}$　③ $4\sqrt{6}$　④ $\dfrac{7\sqrt{6}}{2}$　⑤ $3\sqrt{6}$

M046

●●● (2022(6)-기하28)

두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

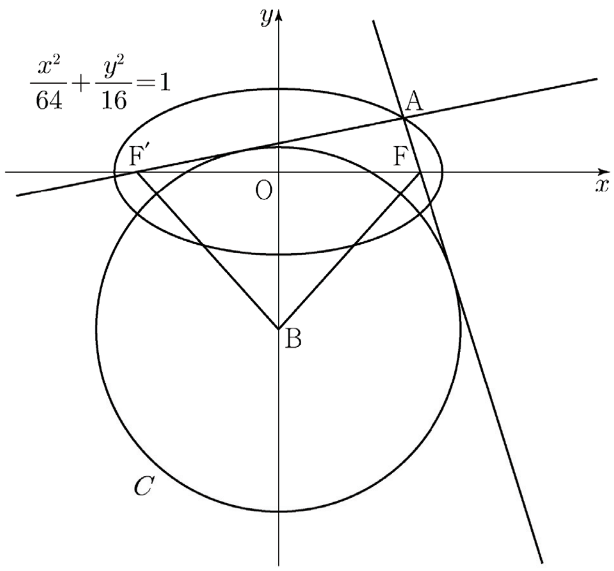


① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{6}-1}{2}$　③ $\sqrt{3}-1$　④ $2\sqrt{2}-2$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

M047

●●● (2022-기하26)

두 초점이 F, F$'$이 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A가 있다. 두 직선 AF, AF$'$에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 중 중심의 y좌표가 음수인 것을 C라 하자. 원 C의 중심을 B라 할 때
사각형 AFBF$'$의 넓이가 72이다. 원 C의 반지름의 길이는? [3점]



① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$
④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$

M. 쌍곡선

M048

○○ (2002-자연5)

방정식 $x^2-y^2+2y+a=0$이 나타내는 도형이 x축에 평행인 주축을 갖는 쌍곡선이 되기 위한 a의 값의 범위는? [2점]

① $a<-1$ ② $a>-1$ ③ $a<1$
④ $a>1$ ⑤ $a>2$

M049

○○○ (2005(예비)-가형10)

점 $(0,\ 3)$을 지나고 기울기가 m인 직선이 쌍곡선
$3x^2-y^2+6y=0$과 만나지 않는 m의 범위는? [3점]

① $m\leq-3$ 또는 $m\geq3$
② $m\leq-3$ 또는 $m\geq\sqrt{3}$
③ $m\leq-\sqrt{3}$ 또는 $m\geq\sqrt{3}$
④ $-\sqrt{3}\leq m\leq\sqrt{3}$
⑤ $-3\leq m\leq3$

M050

○○ (2005(9)-가형5)

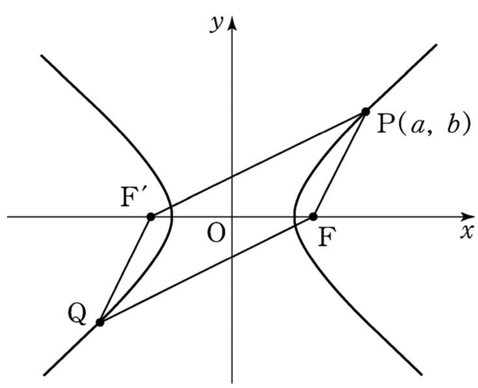
두 초점을 공유하는 타원 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$과 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선의 한 점근선이 $y=\sqrt{35}\,x$일 때, 이 쌍곡선의 두 꼭짓점 사이의 거리는? [3점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

M051

○○ (2006-가형5)

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하고, 꼭짓점이 아닌 쌍곡선 위의 한 점 P의 원점에 대한 대칭인 점을 Q라 하자. 사각형 F′QFP의 넓이가 24가 되는 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $|a|+|b|$의 값은? [3점]



① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

M052

●●● (2007(9)-가형9)

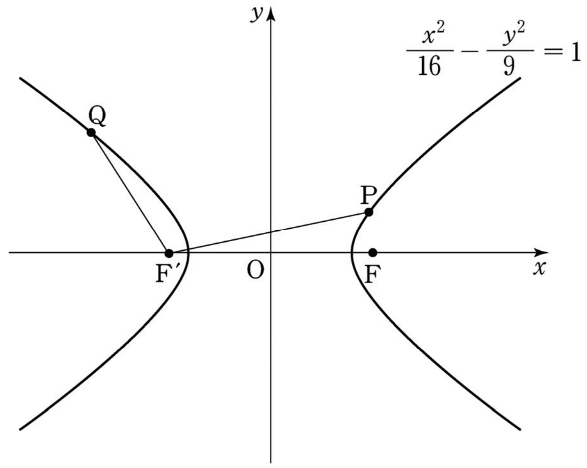
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$의 두 초점 $(2\sqrt{3},\ 0)$, $(-2\sqrt{3},\ 0)$을 각각 F, F′이라 하자.
이 쌍곡선 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)(x>0)$에 대하여 선분 F′P 위의 점 Q가 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족시킬 때, 점 Q가 나타내는 도형 전체의 길이는? [4점]

① π ② $\sqrt{3}\pi$ ③ 2π
④ 3π ⑤ $2\sqrt{3}\pi$

M053

○○ (2008-가형21)

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P와 제2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{QF'}}=3$일 때, $\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{PF}}$의 값을 구하시오. [3점]



M054

○○ (2010(9)-가형12)

쌍곡선 $9x^2-16y^2=144$의 초점을 지나고 점근선과 평행한 4개의 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3점]

① $\frac{76}{16}$　② $\frac{25}{4}$　③ $\frac{25}{2}$
④ $\frac{75}{4}$　⑤ $\frac{75}{2}$

M055

○○○ (2012(6)-가형13)

원 $(x-4)^2+y^2=r^2$과 쌍곡선 $x^2-2y^2=1$이 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 양수 r의 최댓값은? [3점]

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

M056

○○ (2013(6)-가형5)

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 꼭짓점은 타원 $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이다. a^2+b^2의 값은? [3점]

① 10　② 11　③ 12
④ 13　⑤ 14

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

M 이차곡선

1	①	2	①	3	③	4	8	5	13
6	⑤	7	128	8	①	9	①	10	136
11	④	12	①	13	②	14	90	15	6
16	80	17	③	18	⑤	19	②	20	51
21	⑤	22	41	23	①	24	39	25	④
26	32	27	32	28	⑤	29	103	30	④
31	③	32	180	33	④	34	105	35	②
36	12	37	④	38	104	39	6	40	22
41	29	42	①	43	14	44	11	45	①
46	③	47	②	48	①	49	④	50	④
51	①	52	③	53	13	54	⑤	55	②
56	④	57	①	58	19	59	④	60	⑤
61	③	62	12	63	⑤	64	④	65	116
66	③	67	③	68	⑤	69	④	70	①
71	②	72	②	73	12	74	14	75	④
76	①	77	10	78	②	79	③	80	①
81	③	82	②	83	17	84	④	85	32
86	③	87	①	88	②	89	⑤	90	⑤
91	①	92	③	93	②	94	④	95	③
96	32	97	④	98	52	99	①	100	15
101	②	102	③						

N 평면 벡터

1	15	2	③	3	②	4	①	5	53
6	①	7	③	8	⑤	9	③	10	①
11	③	12	⑤	13	④	14	⑤	15	①
16	③	17	③	18	②	19	⑤	20	⑤
21	17	22	7	23	③	24	②	25	19
26	②	27	⑤	28	7	29	⑤	30	31
31	24	32	⑤	33	⑤	34	48	35	45
36	100	37	⑤	38	52	39	9	40	⑤
41	10	42	③	43	48	44	④	45	①
46	②								

P 공간도형과 공간좌표

1	⑤	2	①	3	③	4	③	5	20
6	①	7	⑤	8	⑤	9	③	10	④
11	25	12	②	13	②	14	30	15	⑤
16	10	17	①	18	15	19	12	20	12
21	②	22	③	23	②	24	①	25	40
26	④	27	①	28	③	29	34	30	15
31	27	32	30	33	③	34	⑤	35	45
36	32	37	40	38	11	39	162	40	8
41	②	42	⑤	43	④	44	②	45	①
46	②	47	11	48	①	49	13	50	⑤
51	①	52	20	53	①	54	10	55	⑤
56	④	57	④	58	①	59	④	60	24
61	③	62	②	63	11	64	⑤	65	13
66	②	67	④	68	9	69	23		

해설 목차

기하

M 이차곡선

1	①	2	①	3	③	4	8	5	13
6	⑤	7	128	8	①	9	①	10	136
11	④	12	①	13	②	14	90	15	6
16	80	17	③	18	⑤	19	②	20	51
21	⑤	22	41	23	①	24	39	25	④
26	32	27	32	28	⑤	29	103	30	④
31	③	32	180	33	④	34	105	35	②
36	12	37	④	38	104	39	6	40	22
41	29	42	①	43	14	44	11	45	①
46	③	47	②	48	①	49	④	50	④
51	①	52	③	53	13	54	⑤	55	②
56	④	57	①	58	19	59	④	60	⑤
61	③	62	12	63	⑤	64	④	65	116
66	③	67	③	68	⑤	69	④	70	①
71	②	72	②	73	12	74	14	75	④
76	①	77	10	78	②	79	③	80	①
81	③	82	②	83	17	84	④	85	32
86	③	87	①	88	②	89	⑤	90	⑤
91	①	92	③	93	②	94	④	95	③
96	32	97	④	98	52	99	①	100	15
101	②	102	③						

M001 | 답 ①

[풀이1]

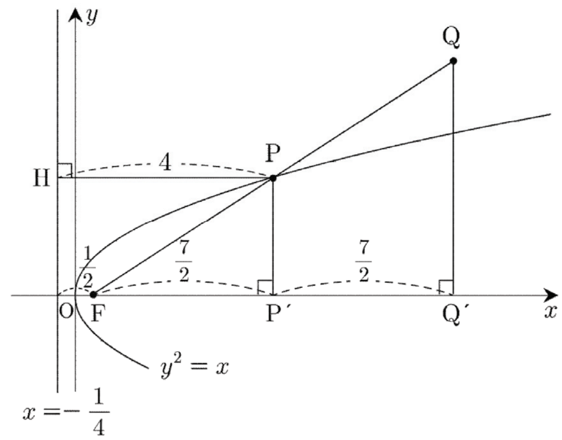
$y^2=4\times\frac{1}{4}\times x$에서 포물선의 초점은

$F\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$

포물선의 준선의 방정식은

$x=-\frac{1}{4}$

점 P에서 x축과 직선 $x=-\frac{1}{4}$에 내린 수선의 발을 각각 P$'$과 H, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 Q$'$이라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{FP}=\overline{PH}$, $\overline{FO}=$(원점에서 준선까지의 거리)

이므로

$\overline{FP'}=\overline{HP}-2\overline{OF}$

$=\overline{FP}-2\overline{OF}=\frac{7}{2}$ $\cdots$㉠

서로 닮은 두 삼각형 PFP$'$, QFQ$'$에 대하여

$\overline{FP}:\overline{FQ}=1:2=\overline{FP'}:\overline{FQ'}$

이므로

$\overline{FP'}=\overline{P'Q'}$ $\cdots$㉡

점 Q의 x좌표를 q라고 하면

$\therefore\ q=\overline{OF}+\overline{FP'}+\overline{P'Q'}$

$=\overline{OF}+2\overline{FP'}$ ($\because$ ㉡)

$=\frac{1}{4}+2\times\frac{7}{2}=\frac{29}{4}$ ($\because$ ㉠)

답 ①

[풀이2] (선택)

$y^2=4\times\frac{1}{4}\times x$에서 포물선의 초점은

$F\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$

포물선의 준선의 방정식은

$x=-\frac{1}{4}$

점 P의 좌표를 P$(p^2,\ p)$로 두자. (단, $p>0$)

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{FP}=\sqrt{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)^2+(p-0)^2}=4$

정리하면

$\sqrt{\left(p^2+\frac{1}{4}\right)^2}=4$

$p^2+\frac{1}{4}>0$이므로 $p^2+\frac{1}{4}=4$

$p^2 = \frac{15}{4}$

점 Q의 x좌표를 q로 두자.

점 $\mathrm{P}\left(\frac{15}{4}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$는 선분 FQ의 중점이므로 내분점의 공식에서

(점 P의 x좌표)$= \dfrac{\frac{1}{4}+q}{2} = \frac{15}{4}$

방정식을 풀면

$\therefore\ q = \frac{29}{4}$

답 ①

[풀이3] (교육과정 외)

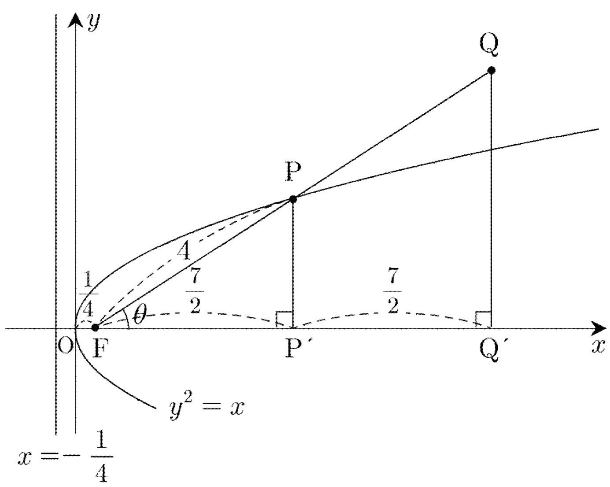
공식

$\overline{\mathrm{PF}} = \dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.

두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′라고 하자.

조건 $\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{PQ}}$에서 $\overline{\mathrm{FP'}} = \overline{\mathrm{P'Q'}}$이다.



$y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x$에서 $p = \frac{1}{4}$이므로

$4 = \dfrac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1-\cos\theta}$, $\cos\theta = \frac{7}{8}$

직각삼각형 PFP′에서

$\overline{\mathrm{FP'}} = 4 \times \frac{7}{8} = \frac{7}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{P'Q'}} = \frac{7}{2}$

$\therefore$ (점 Q의 x좌표)

$= \overline{\mathrm{OF}} + \overline{\mathrm{FP'}} + \overline{\mathrm{P'Q'}} = \frac{1}{4} + \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{29}{4}$

답 ①

M002 | 답 ①

[풀이]

$y^2 = 4 \times \frac{1}{4} \times x$에서 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

주어진 포물선의 준선의 방정식은

$x = -\frac{1}{4}$

주어진 로그함수의 그래프의 점근선은

$x = -a$

주어진 로그함수의 점근선이 주어진 포물선의 점근선과 일치하므로

$-a = -\frac{1}{4}$ 즉, $a = \frac{1}{4}$

주어진 로그함수의 방정식은

$y = \log_2\left(x + \frac{1}{4}\right) + b$

이 로그함수의 그래프가 포물선의 초점을 지나므로

$0 = \log_2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + b$

로그의 정의에 의하여

$0 = -1 + b$ 즉, $b = 1$

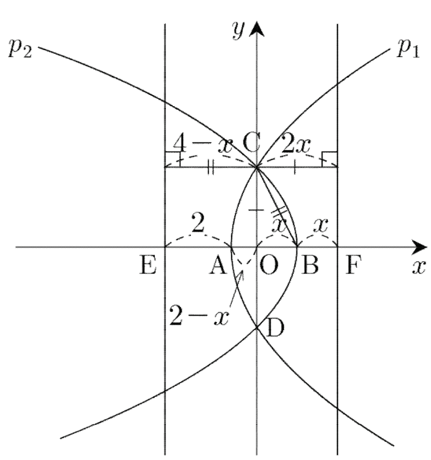
$\therefore\ a + b = \frac{5}{4}$

답 ①

M003 | 답 ③

[풀이1]

두 포물선 p_1, p_2의 준선이 x축과 만나는 점을 각각 E, F라고 하자.



$\overline{OB}=x$로 두면 $\overline{AB}=2$이므로

$\overline{AO}=2-x$

포물선의 정의에 의하여

포물선 p_1에서 $\overline{EA}=\overline{AB}$이므로

$\overline{EA}=2$

포물선 p_2에서 $\overline{OB}=\overline{BF}$이므로

$\overline{BF}=x$

포물선의 정의에 의하여

포물선 p_1에서

$\overline{BC}=$(점 C에서 포물선 p_1의 준선까지의 거리)

$=4-x$

포물선 p_2에서

$\overline{CO}=$(점 C에서 포물선 p_2의 준선까지의 거리)

$=2x$

직각삼각형 OBC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{CO}^2+\overline{OB}^2$

대입하면

$(4-x)^2=(2x)^2+x^2$

정리하면

$x^2+2x-4=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=-1+\sqrt{5}$

구하는 넓이를 S라고 하자.

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times2\times2x=2(\sqrt{5}-1)$

답 ③

[풀이2] (선택)

$\overline{AO}=k$로 두고 두 포물선의 방정식을 구하자.

포물선 p_1의 초점과 준선은 각각

$B(2-k,\ 0)$, $x=-2-k$이므로

p_1 : $y^2=8(x+k)$ …㉠

포물선 p_2의 초점과 준선은 각각

$O(0,\ 0)$, $x=4-2k$이므로

p_2 : $y^2=(4k-8)(x-2+k)$ …㉡

㉠에 $x=0$을 대입하면

$y=\pm2\sqrt{2k}$ 이므로 점 C의 좌표는

$C(0,\ 2\sqrt{2k})$

㉡에 $x=0$과 $y=2\sqrt{2k}$를 대입하여 정리하면

$k^2-6k+4=0$

풀면

$k=3-\sqrt{5}$ ($\because 0<k<2$)

두 포물선의 방정식은

p_1 : $y^2=8(x+3-\sqrt{5})$

p_2 : $y^2=(4-4\sqrt{5})(x+1-\sqrt{5})$

점 C의 좌표는

$C(0,\ 2\sqrt{5}-2)$

구하는 넓이를 S라고 하자.

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times2\times(2\sqrt{5}-2)$

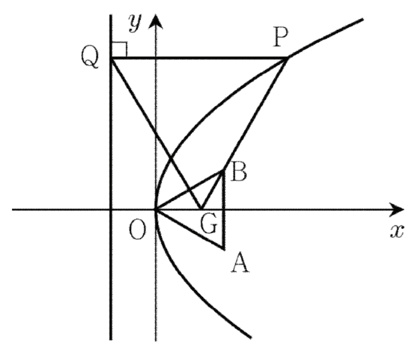
$=2(\sqrt{5}-1)$

답 ③

M004 | 답 8

[풀이1]

점 P에서 주어진 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 Q라고 하자.



정삼각형 OAB의 꼭짓점 O와 무게중심 G가 x축 위에 있으므로

$\angle BOG=\frac{1}{2}\angle BOA=30^\circ$

무게중심 G는 정삼각형 OAB의 외심이므로

$\overline{OG}=\overline{GB}$

이등변삼각형 OGB에 대하여

$\angle OBG=30^\circ$

삼각형 OGB에 대하여 $\angle G$의 외각의 크기는 60° 이므로

직선 GP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60° 이다.

정삼각형 OAB의 높이가 3이므로

$\overline{OG}=2$

주어진 포물선의 초점의 좌표는

$G(2,\ 0)$

주어진 포물선의 준선의 방정식은

$x=-2$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{GP}=\overline{PQ}$

$QP // x$축이므로

$\angle QPG = 60°$

이므로 QPG는 정삼각형이다.

$\overline{GP} = \overline{PQ}$

$= 2 \times$(점 G에서 준선까지의 거리)$= 8$

답 8

[풀이2]

정삼각형 OAB의 꼭짓점 O와 무게중심 G가 x축 위에 있으므로

$\angle BOG = \frac{1}{2} \angle BOA = 30°$

무게중심 G는 정삼각형 OAB의 외심이므로

$\overline{OG} = \overline{GB}$

이등변삼각형 OGB에 대하여

$\angle OBG = 30°$

삼각형 OGB에 대하여 $\angle G$의 외각은 $60°$ 이므로

직선 GP가 x축의 양의 방향과 이루는 각은 $60°$ 이다.

정삼각형 OAB의 높이가 3이므로

$\overline{OG} = 2$

주어진 포물선의 초점의 좌표는

$G(2,\ 0)$

직선 GP의 방정식은

$y = \sqrt{3}(x-2)$ …㉠

주어진 포물선의 방정식은

$y^2 = 8x$ …㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$3(x-2)^2 = 8x$

정리하면

$3x^2 - 20x + 12 = 0$

좌변을 인수분해하면

$(3x-2)(x-6) = 0$

$x = \frac{2}{3}$ 또는 $x = 6$

주어진 그림에서 점 P의 x좌표는 2보다 크므로

$P(6,\ 4\sqrt{3})$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{GP} = \sqrt{(6-2)^2 + (4\sqrt{3}-0)^2} = 8$

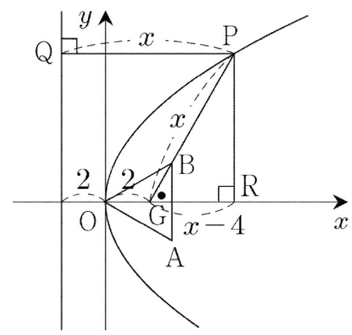
답 8

[풀이3] 시험장

점 P에서 포물선의 준선과 x축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라고 하자.

$\overline{GP} = x$로 두면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PQ} = x$



(단, ●$= 60°$)

정삼각형 OAB의 높이가 3이고, 점 G는 이 삼각형의 무게중심이므로

$\overline{OG} = 2 (= \frac{2}{3} \times 3)$

직각삼각형 PGR에서

$\frac{x-4}{x} = \cos 60°$ 풀면 $x = 8$

$\therefore\ \overline{GP} = 8$

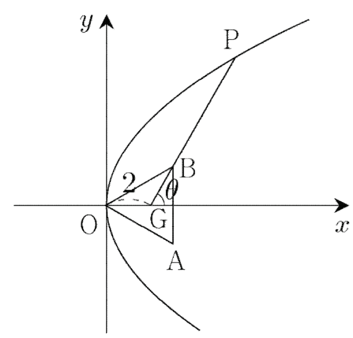
답 8

[풀이4] (교육과정 외)

공식

$\overline{PG} = \frac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PG가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.



(단, $\theta = 60°$)

정삼각형 OAB의 높이가 3이고, 점 G는 이 삼각형의 무게중심이므로

$\overline{OG} = 2 (= \frac{2}{3} \times 3)$, 즉 $p = 2$

$p = 2$, $\theta = 60°$ 이므로

$\therefore\ \overline{PG} = \frac{2p}{1-\cos\theta} = \frac{2 \times 2}{1-\cos 60°} = 8$

답 8

M005 | 답 13

[풀이1]

※ 점 B가 일사분면에 있다고 가정해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

주어진 포물선의 초점의 좌표는

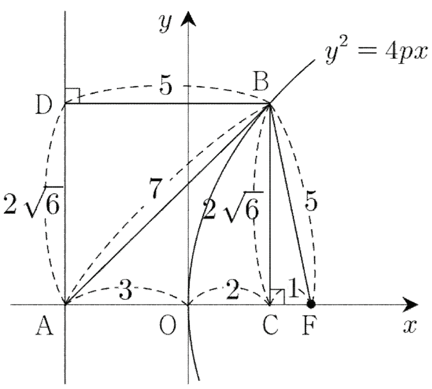
F $(p,\ 0)$

주어진 포물선의 준선의 방정식은

$x=-p$

점 B에서 x축과 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라고 하자.

- (1) 점 B의 x좌표가 p보다 작은 경우



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{BD}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=5$

직각삼각형 BAC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BA}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}=2\sqrt{6}$

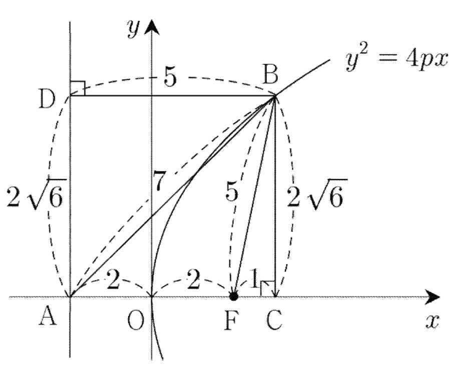
직각삼각형 BCF에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{CF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BF}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}=1$

포물선의 정의에 의하여

$p=\overline{\mathrm{OF}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AF}}=3$

- (2) 점 B의 x좌표가 p보다 큰 경우



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{BD}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=5$

직각삼각형 BAC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BA}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}=2\sqrt{6}$

직각삼각형 BFC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BF}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}=1$

포물선의 정의에 의하여

$p=\overline{\mathrm{OF}}=\dfrac{1}{2}(\overline{\mathrm{DB}}-\overline{\mathrm{FC}})=2$

(1), (2)에서

$p=2$ 또는 $p=3$

$\therefore\ a^2+b^2=13$

답 13

[풀이2] (선택)

※ 점 B가 일사분면에 있다고 가정해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

주어진 포물선의 초점의 좌표는

F $(p,\ 0)$

주어진 포물선의 준선의 방정식은

$x=-p$

점 A의 좌표는 A $(-p,\ 0)$

점 B의 좌표를 B $(t,\ 2\sqrt{pt})$로 두자.

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(t+p)^2+4pt}=7$

정리하면

$t^2+6pt+p^2-49=0 \quad \cdots ㉠$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{BF}}=\sqrt{(t-p)^2+4pt}=5$

정리하면

$t^2+2pt+p^2-25=0 \quad \cdots ㉡$

㉠에서 ㉡을 변변히 빼서 정리하면

$t=\dfrac{6}{p} \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$p^4-13p^2+36=0$

좌변을 인수분해하면

$(p^2-4)(p^2-9)=0$

풀면

$p^2=4$ 또는 $p^2=9$

$\therefore\ a^2+b^2=13$

답 13

M006 | 답 ⑤

[풀이1]

$y^2=4\times1\times x$ 이므로

주어진 포물선의 초점의 좌표는

F $(1,\ 0)$

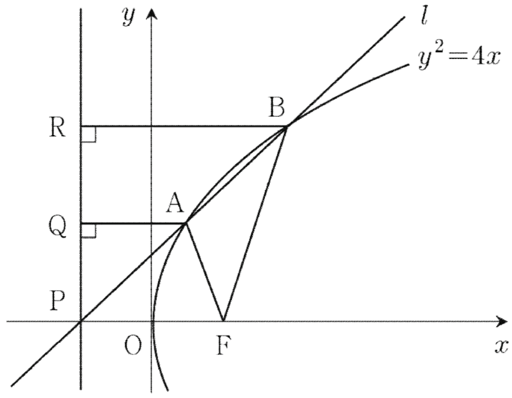
주어진 포물선의 준선의 방정식은

$x=-1$

점 P의 좌표는

$P(-1,\ 0)$

두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{FA}=\overline{AQ},\ \overline{FB}=\overline{BR}$

이므로

$\overline{AQ}:\overline{BR}=1:2$

서로 닮음인 두 직각삼각형 PAQ, PBR에 대하여

$\overline{PQ}:\overline{PR}=1:2$

점 A의 y좌표를 t로 두면 점 B의 y좌표는 $2t$이다.

두 점 A와 B의 좌표는 각각

$A\left(\frac{t^2}{4},\ t\right),\ B(t^2,\ 2t)$

(직선 PA의 기울기)$=\dfrac{t-0}{\frac{t^2}{4}-(-1)}$

(직선 PB의 기울기)$=\dfrac{2t-0}{t^2-(-1)}$

세 점 P, A, B가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{t}{\frac{t^2}{4}+1}=\frac{2t}{t^2+1}$$

풀면

$t=\sqrt{2}$

두 점 A와 B의 좌표는 각각

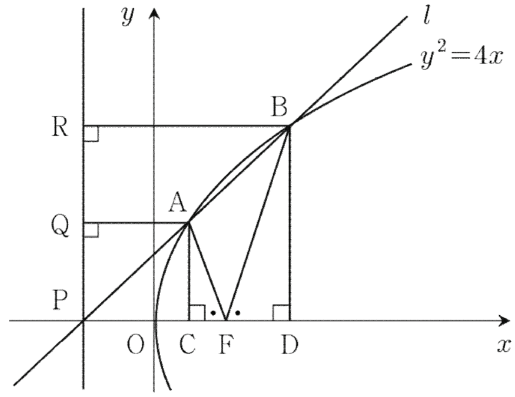
$A\left(\frac{1}{2},\ \sqrt{2}\right),\ B(2,\ 2\sqrt{2})$

(직선 l의 기울기)$=\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

답 ⑤

[풀이2]

점 A에서 x축과 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, Q, 점 B에서 x축과 준선에 내린 수선의 발을 각각 D, R이라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{FA}=\overline{AQ},\ \overline{FB}=\overline{BR}$

이므로

$\overline{AQ}:\overline{BR}=1:2$

서로 닮음인 두 직각삼각형 PAQ, PBR에 대하여

$\overline{PQ}:\overline{PR}=1:2$

서로 닮음인 두 직각삼각형 APC, BPD에 대하여

$\overline{PC}:\overline{PD}=1:2$

$\overline{PC}=a,\ \overline{PQ}=b$로 두면 $\overline{PD}=2a,\ \overline{PR}=2b$이다.

두 직각삼각형 FAC, FBD에 대하여

$\sin(\angle CFA)=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{FA}}=\dfrac{b}{a}$

$\sin(\angle DFB)=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{FB}}=\dfrac{2b}{2a}=\dfrac{b}{a}$

즉, $\angle CFA=\angle DFB$이므로

두 직각삼각형 FAC, FBD는 서로 닮음이다.

서로 닮음인 두 직각삼각형 FAC, FBD에 대하여

$\overline{FC}:\overline{FD}=1:2$

$\overline{CF}=c$로 두면 $\overline{FD}=2c$이다.

직사각형 RPDB에서

$\overline{RB}=\overline{PC}+\overline{CF}+\overline{FD}$ 즉, $2a=a+c+2c$

정리하면 $c=\dfrac{a}{3}$

직각삼각형 ACF에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{FA}^2-\overline{FC}^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$ 즉, $b=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a$

$\therefore$ (직선 l의 기울기)$=\dfrac{\overline{CA}}{\overline{PC}}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

답 ⑤

[풀이3] (선택)

직선 l의 방정식을

$l:\ y=mx+n$(단, $m>0,\ n>0$)

직선 l은 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$x=-1,\ y=0$을 직선 l의 방정식에 대입하면

$m=n$ …㉠

문제에서 주어진 포물선의 방정식과 직선 l의 방정식을 연립하면

$(mx+n)^2=4x$

정리하면

$m^2x^2+2(mn-2)x+n^2=0$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$라고 하면

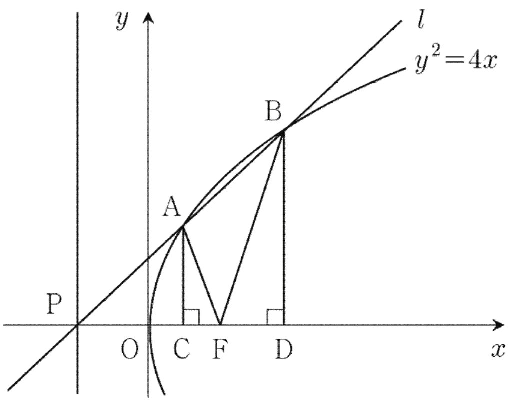
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha\beta=\dfrac{n^2}{m^2}$ …㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\alpha\beta=1$ 즉, $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$

두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 C, D라고 하자.



서로 닮음인 두 직각삼각형 APC, BPD에 대하여

$\overline{\mathrm{PC}}\ :\ \overline{\mathrm{PD}}=1\ :\ 2$

대입하면

$(\alpha+1)\ :\ \left(\dfrac{1}{\alpha}+1\right)=1\ :\ 2$

정리하면

$2\alpha^2+\alpha-1=0$

좌변을 인수분해하면

$(2\alpha-1)(\alpha+1)=0$

α는 양수이므로 $\alpha=\dfrac{1}{2}$

점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ \sqrt{2}\right)$이므로

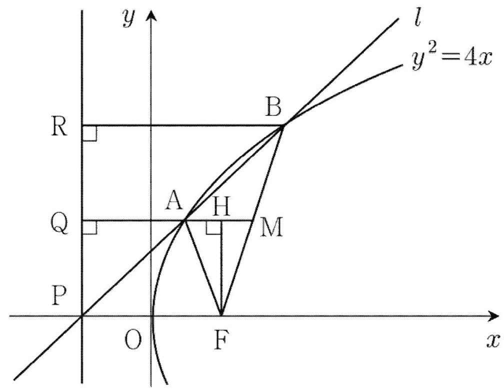
(직선 l의 기울기)$=\dfrac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{PC}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

답 ⑤

[풀이4]

$y^2=4\times1\times x$에서 문제에서 주어진 포물선의 준선의 방정식은 $x=-1$이다. 그리고 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이다.

두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R, 선분 BF의 중점을 M, 점 F에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{AF}},\ \overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{BF}}$

이므로 문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{QA}}:\overline{\mathrm{RB}}=1:2$

두 직각삼각형 PAQ, PBR의 닮음비가 $1:2$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$

점 M이 선분 FB의 중점이므로

세 직선 PF(x축), QM, RB 중에서 어느 두 직선도 서로 평행하다.

$\overline{\mathrm{AF}}=a$로 두면 $\overline{\mathrm{BF}}=2a$이고,

$\overline{\mathrm{QA}}=a,\ \overline{\mathrm{RB}}=2a$이다.

사다리꼴 PFBR에서 내분점의 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{QM}}=\dfrac{\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{RB}}}{2}=\dfrac{2+2a}{2}=a+1$

그런데

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{QM}}-\overline{\mathrm{QA}}=(a+1)-a=1$

이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}$이다.

($\because$ 삼각형 AFM은 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{FM}}$인 이등변삼각형이다.)

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QA}}+\overline{\mathrm{AH}}$

즉, $2=a+\dfrac{1}{2}$에서 $a=\dfrac{3}{2}$

직각삼각형 AFH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{HF}}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$

이므로 $\overline{\mathrm{RP}}=2\sqrt{2}$

(직선 l의 기울기)$=\dfrac{\overline{\mathrm{RP}}}{\overline{\mathrm{RB}}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

답 ⑤

[풀이5]

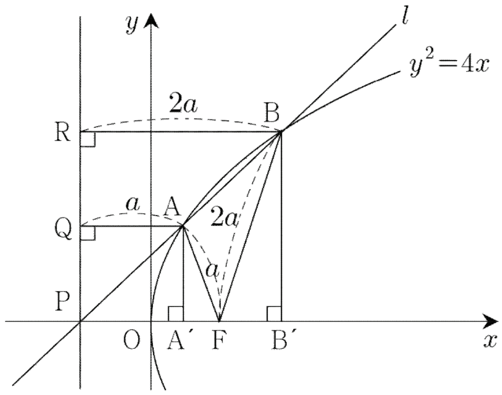
$y^2=4\times1\times x$에서

F$(1,\ 0)$ (즉, $p=1$), P$(-1,\ 0)$

점 A에서 x축과 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, Q, 점 B에서 x축과 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 B$'$, R이라고 하자.

그리고 $\overline{\text{AF}}=a$로 두면 $\overline{\text{BF}}=2a$이고,

$\overline{\text{AQ}}=a$, $\overline{\text{BR}}=2a$($\because$ 포물선의 정의)



두 점 A, B의 좌표는 각각

A$(a-1,\ 2\sqrt{a-1})$, B$(2a-1,\ 2\sqrt{2a-1})$

두 직각삼각형 APA$'$, BPB$'$의 닮음비가 $1:2$이므로

$\overline{\text{AA}'}:\overline{\text{BB}'}=1:2$, 즉 $2\times2\sqrt{a-1}=2\sqrt{2a-1}$

양변을 제곱하여 풀면

$a=\dfrac{3}{2}$, A$\left(\dfrac{1}{2},\ \sqrt{2}\right)$

$\therefore$ (직선 l의 기울기)=(직선 AP의 기울기)

$=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{2}+1}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

답 ⑤

[풀이6] (교육과정 외)

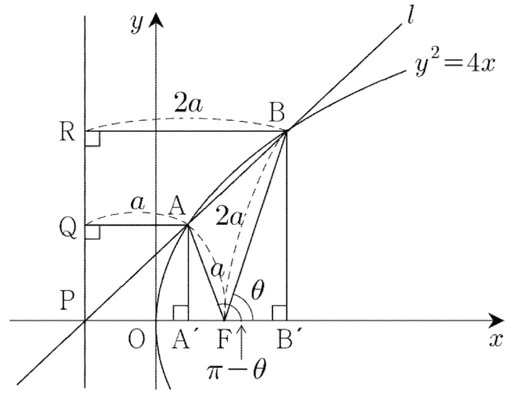
$y^2=4\times1\times x$에서

F$(1,\ 0)$ (즉, $p=1$), P$(-1,\ 0)$

점 A에서 x축과 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, Q, 점 B에서 x축과 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 B$'$, R라고 하자.

그리고 $\overline{\text{AF}}=a$로 두면 $\overline{\text{BF}}=2a$이고,

$\overline{\text{AQ}}=a$, $\overline{\text{BR}}=2a$($\because$ 포물선의 정의)



두 직각삼각형 PAQ, PBR의 닮음비가 $1:2$이므로

$\overline{\text{PQ}}:\overline{\text{QR}}=1:1$, 즉 $\overline{\text{AA}'}:\overline{\text{BB}'}=1:2$

두 직각삼각형 FAA$'$, FBB$'$는 서로 닮음이므로

$\angle\text{BFB}'=\theta$로 두면 $\angle\text{AFA}'=\theta$

즉, 직선 AF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\pi-\theta$이다.

$\overline{\text{BF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$, $\overline{\text{AF}}=\dfrac{2p}{1-\cos(\pi-\theta)}$

즉, $2a=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$, $a=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

연립하면

$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$, $a=\dfrac{3}{2}$

점 B의 좌표는 $(2,\ 2\sqrt{2})$이므로

$\therefore$ (직선 l의 기울기)=(직선 BP의 기울기)

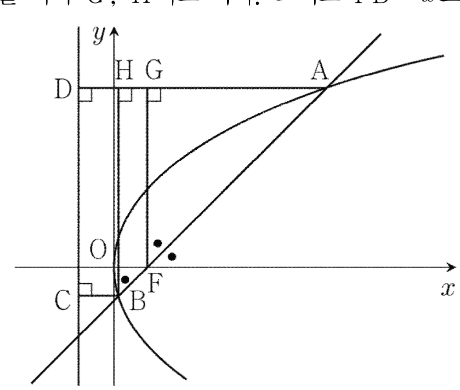
$=\dfrac{2\sqrt{2}}{2-(-1)}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

답 ⑤

M007 | 답 128

[풀이1]

두 점 A, B에서 문제에서 주어진 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 D, C, 두 점 F, B에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라고 하자. 그리고 $\overline{\text{FB}}=x$로 두자.



(단, $\bullet=45^\circ$ 이다.)

포물선의 정의에 의하여

$\overline{BC} = x$ 즉, $\overline{HD} = x$ ⋯㉠

정사각형의 정의에 의하여

삼각형 AFG는 직각이등변삼각형이므로

$\angle AFG = 45°$

$\overline{FG} // \overline{BH}$이므로 평행선의 성질에 의하여

$\angle ABH = \angle AFG = 45°$ (동위각)

직각삼각형의 특수각의 삼각비에 의하여

$\dfrac{\overline{GH}}{\overline{BF}} = \sin 45°$ 이므로 $\overline{GH} = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ ⋯㉡

그리고 문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{AG} = 2$ ⋯㉢

포물선의 정의에 의하여

$\overline{AD} = \overline{AF} =$(한 변의 길이가 2인

정사각형의 대각선의 길이)$= 2\sqrt{2}$

이고, ㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$\overline{AG} + \overline{GH} + \overline{HD} = 2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + x$

이므로

$2 + \dfrac{x}{\sqrt{2}} + x = 2\sqrt{2}$

풀면

$x = 6\sqrt{2} - 8$

따라서 선분 AB의 길이는 $8\sqrt{2} - 8$이다.

$a = -8$, $b = 8$이므로

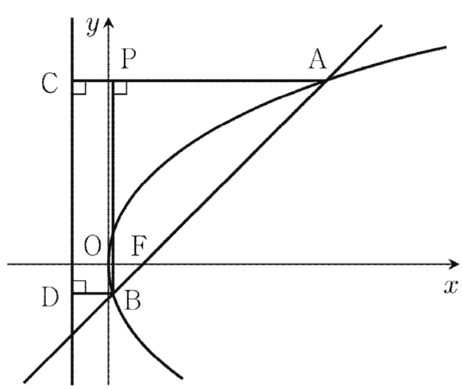
$\therefore\ a^2 + b^2 = 128$

답 128

[풀이2]

두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D, 점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 P라고 하자.

$\overline{BF} = x$로 두자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{AC} = \overline{AF} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BD} = \overline{BF} = x$

이므로

$\overline{AP} = 2\sqrt{2} - x$

PA//(x축)이므로

$\angle BAP =$(직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기)$= 45°$

따라서 APB는 직각이등변삼각형이다.

직각삼각형 APB에서 삼각비의 정의에 의하여

$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BA}} = \cos 45°$

대입하면

$\dfrac{2\sqrt{2} - x}{2\sqrt{2} + x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

풀면

$x = 6\sqrt{2} - 8$

따라서 선분 AB의 길이는 $8\sqrt{2} - 8$이다.

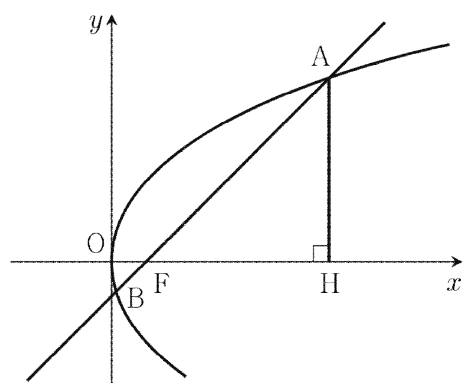
$a = -8$, $b = 8$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 128$

답 128

[풀이3] (선택)

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



주어진 포물선의 방정식을

$y^2 = 4px\,(p > 0)$

초점 F의 좌표는

$F(p,\ 0)$

점 A의 y좌표는 2이므로

$A\left(\dfrac{1}{p},\ 2\right)$

(직선 AB의 기울기)$= \dfrac{\overline{HA}}{\overline{FH}} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{p} - p} = 1$

정리하면

$p^2 + 2p - 1 = 0$

풀면

$p = -1 + \sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$y = x - p$

포물선의 방정식과 직선 AB의 방정식을 연립하면

$(x-p)^2=4px$

정리하면

$x^2-6px+p^2=0$

근의 공식에 의하여

$\beta=(3-2\sqrt{2})p$

(단, β는 점 B의 x좌표이다.)

$\overline{\mathrm{BF}}=|$두 점 B, F의 x좌표의 차이$|\times\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}$

$=2(2-\sqrt{2})p=-8+6\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=-8+8\sqrt{2}$

$a=-8,\ b=8$

$\therefore\ a^2+b^2=128$

답 128

[풀이4] (교육과정 외)

공식

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.

문제에서 주어진 포물선의 초점 F의 x좌표를 p라고 하자.

$\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{2p}{1-\cos45^\circ}=2\sqrt{2},\ p=\sqrt{2}-1$

$\overline{\mathrm{BF}}=\dfrac{2p}{1-\cos225^\circ}=\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=6\sqrt{2}-8$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}=8\sqrt{2}-8$

$\therefore\ a^2+b^2=128$

답 128

M008 | 답 ①

[풀이1]

$y^2=4\times\dfrac{1}{4n}\times x$이므로

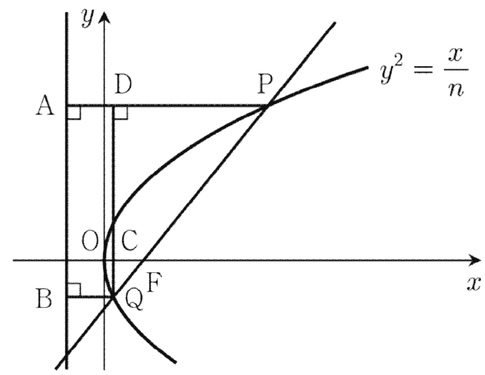
주어진 포물선의 초점의 좌표는

$\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{4n},\ 0\right)$

주어진 포물선의 준선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{4n}$

두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A, B, 점 Q에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 D라고 하자. 이때, 직선 DQ와 x축의 교점을 C라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PF}}=1,\ \overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{QF}}=a_n$

이므로

$\overline{\mathrm{DP}}=1-a_n,\ \overline{\mathrm{PQ}}=1+a_n$

서로 닮은 두 삼각형 QFC, QPD에 대하여

$\overline{\mathrm{FC}}:\overline{\mathrm{PD}}=\overline{\mathrm{QF}}:\overline{\mathrm{QP}}$

대입하면

$\overline{\mathrm{FC}}:(1-a_n)=a_n:(1+a_n)$

정리하면

$\overline{\mathrm{FC}}=\dfrac{a_n(1-a_n)}{1+a_n}$ …㉠

한편

$\overline{\mathrm{FC}}=$(점 F에서 준선까지의 거리)$-\overline{\mathrm{BQ}}$

$=\dfrac{1}{2n}-a_n$ …㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$\dfrac{1}{a_n}=4n-1$

시그마의 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)$

$=4\times\dfrac{10\times11}{2}-10=210$

답 ①

[풀이2]

$y^2=4\times\dfrac{1}{4n}\times x$이므로

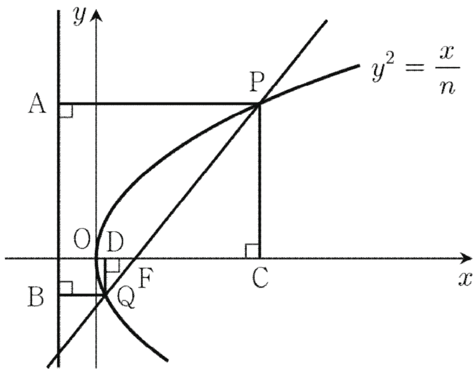
주어진 포물선의 초점의 좌표는

$\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{4n},\ 0\right)$

주어진 포물선의 준선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{4n}$

점 P에서 x축과 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, A, 점 Q에서 x축과 준선에 내린 수선의 발을 각각 D, B라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{AP}=\overline{PF}=1$, $\overline{BQ}=\overline{QF}=a_n$

$\overline{FC}=\overline{AP}-$(점 F에서 준선까지의 거리)$=1-\dfrac{1}{2n}$

$\overline{DF}=$(점 F에서 준선까지의 거리)$-\overline{BQ}=\dfrac{1}{2n}-a_n$

서로 닮은 두 직각삼각형 PFC, QFD에 대하여

$\overline{PF}:\overline{FC}=\overline{QF}:\overline{FD}$

대입하면

$1:1-\dfrac{1}{2n}=a_n:\dfrac{1}{2n}-a_n$

정리하면

$\dfrac{1}{a_n}=4n-1$

시그마의 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)$

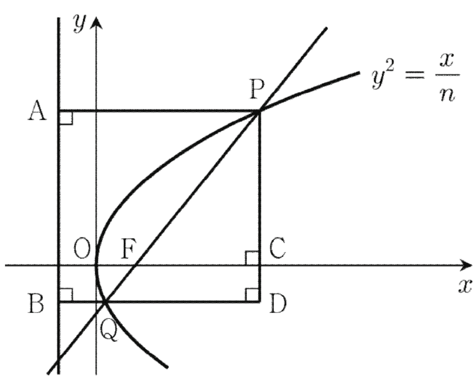
$=4\times\dfrac{10\times11}{2}-10=210$

답 ①

[참고]

다음과 같은 방법으로 일반항 a_n을 구할 수도 있다.

점 P에서 x축과 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, A, 점 Q에서 준선에 내린 수선의 발을 B, 두 직선 PC, BQ가 만나는 점을 D라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{AP}=\overline{PF}=1$, $\overline{BQ}=\overline{QF}=a_n$

$\overline{FC}=\overline{AP}-$(점 F에서 준선까지의 거리)$=1-\dfrac{1}{2n}$

$\overline{QD}=\overline{BD}-\overline{BQ}=\overline{AP}-\overline{BQ}=1-a_n$

서로 닮은 두 직각삼각형 PFC, PQD에 대하여

$\overline{PF}:\overline{FC}=\overline{PQ}:\overline{QD}$

대입하면

$1:1-\dfrac{1}{2n}=1+a_n:1-a_n$

정리하면

$a_n=\dfrac{1}{4n-1}$

[풀이3] ★

아래의 정리를 이용하여 일반항 a_n을 구하자.

(정리) 포물선 $y^2=4px$의 초점을 F라고 하자. 포물선의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 할 때,

$$\frac{1}{\overline{OF}}=\frac{1}{\overline{PF}}+\frac{1}{\overline{QF}}\qquad\cdots(*)$$

이 항상 성립한다.

(*)에 의하여

$\dfrac{1}{\frac{1}{4n}}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{a_n}$

정리하면

$a_n=\dfrac{1}{4n-1}$

시그마의 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)$

$=4\times\dfrac{10\times11}{2}-10=210$

답 ①

M009 | 답 ①

[풀이1]

$y^2=4\times3\times x$에서

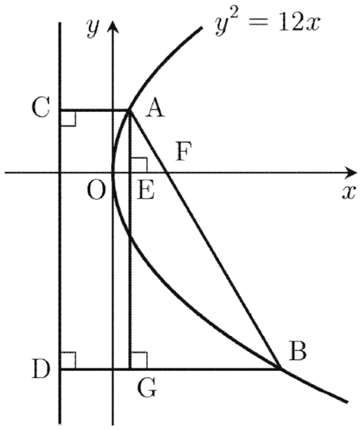
주어진 포물선의 초점의 좌표는

F$(3,\ 0)$

주어진 포물선의 준선의 방정식은

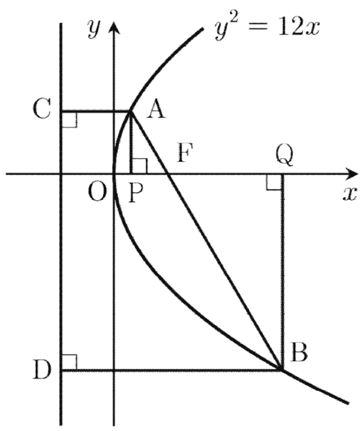
$x=-3$

점 A를 지나고 y축과 평행한 직선이 x축, 선분 BD와 만나는 점을 각각 E, G라고 하자.



$\overline{BD} = k$라고 하자.
포물선의 정의에 의하여
$\overline{FA} = \overline{AC} = 4$, $\overline{FB} = \overline{BD} = k$
두 직각삼각형 AFE, ABG는 서로 닮음이므로
$\overline{AF} : \overline{FE} = \overline{AB} : \overline{BG}$
대입하면
$4 : 2 = 4 + k : k - 4$
일차방정식을 풀면
$\therefore\ k = 12$
답 ①

[풀이2]
주어진 포물선의 방정식
$y^2 = 4 \times 3 \times x$에서
주어진 포물선의 초점의 좌표는
$F(3,\ 0)$
주어진 포물선의 준선의 방정식은
$x = -3$
두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자.
그리고 $\overline{BD} = x$로 두자.



포물선의 정의에 의하여
$\overline{FA} = \overline{AC} = 4$, $\overline{FB} = \overline{BD} = x$
$\overline{FP} =$(점 F에서 준선까지의 거리)$- \overline{AC}$
$= 6 - 4 = 2$
$\overline{FQ} = \overline{BD} -$(점 F에서 준선까지의 거리)$= x - 6$
서로 닮음인 두 직각삼각형 AFP, BFQ에 대하여
$\overline{AF} : \overline{FP} = \overline{BF} : \overline{FQ}$
대입하면
$4 : 2 = x : x - 6$
풀면
$x = 12$
따라서 선분 BD의 길이는 12이다.
답 ①

[참고] (선택)
다음의 정리를 이용하여 선분 BD의 길이를 구해도 좋다.
(정리) 포물선 $y^2 = 4px\,(p > 0)$의 초점을 F라고 하자. 포물선의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라고 할 때, 세 점 A, F, B의 x좌표는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(점 A의 x좌표)$=1$, (점 F의 x좌표)$=3$,
(점 B의 x좌표)$=b$
$1,\ 3,\ b$는 이 순서대로 등비수열을 이루므로
등비중항의 정의에 의하여
$b = 9$
$\therefore\ \overline{BD} = 9 + 3 = 12$

[풀이3] (선택)
$y^2 = 4 \times 3 \times x$에서
주어진 포물선의 초점의 좌표는
$F(3,\ 0)$
주어진 포물선의 준선의 방정식은
$x = -3$
포물선의 정의에 의하여
$\overline{FA} = \overline{AC} = 4$
점 A의 x좌표는 1이므로 점 A의 좌표는
$A(1,\ 2\sqrt{3})$
직선 AF의 방정식은
$y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$
직선 AF의 방정식과 포물선의 방정식을 연립하면
$(-\sqrt{3}x + 3\sqrt{3})^2 = 12x$
정리하면
$x^2 - 10x + 9 = 0$
좌변을 인수분해하면
$(x-1)(x-9) = 0$ 풀면 $x = 1$ 또는 $x = 9$
점 B의 x좌표는 9이므로

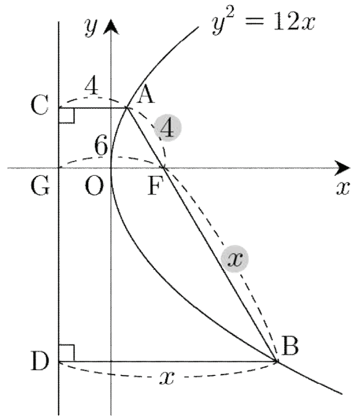
$\therefore\ \overline{BD}=12$

답 ①

[풀이4] 시험장

$y^2=4\cdot3\cdot x$에서 $p=3$, 즉 $F(3,\ 0)$

준선 l이 x축과 만나는 점을 $G(-3,\ 0)$이라고 하자.



사다리꼴 ACDB에서 다음의 등식이 성립한다.

$\overline{FG}=\dfrac{x\overline{AC}+4\overline{BD}}{x+4}$, (←내분점의 공식)

즉 $6=\dfrac{4x+4x}{x+4}$

$\therefore\ x=12(=\overline{BD})$

답 ①

M010 | 답 136

[풀이1]

※ 점 A를 제1사분면 위의 점으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

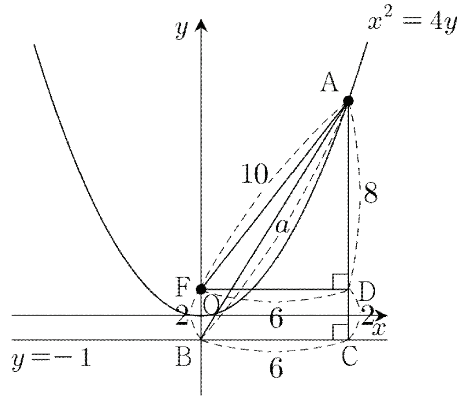
문제에서 주어진 포물선의 방정식은

$x^2=4\times1\times y$

이므로 이 포물선의 초점과 준선의 방정식은 각각

$F(0,\ 1)$, $y=-1$

점 A에서 준선 $y=-1$에 내린 수선의 발을 C, 점 F에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라고 하자. 점 B는 준선 $y=-1$ 위의 점이다.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{AC}=\overline{AF}=10$

포물선 위의 점 O에서 준선 $y=-1$에 내린 수선의 발은 점 B이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{OB}=\overline{OF}=1$, $\overline{FB}=\overline{FO}+\overline{OB}=2$

직사각형 BCDF에서 $\overline{DC}=\overline{FB}=2$이므로

$\overline{AD}=\overline{AC}-\overline{DC}=8$

직각삼각형 AFD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{FD}=\sqrt{\overline{AF}^2-\overline{AD}^2}=6$

직사각형 BCDF에서 $\overline{BC}=\overline{FD}=6$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\therefore\ a^2=\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=136$

답 136

[풀이2] (선택)

※ 점 A를 제1사분면 위의 점으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. 문제에서 주어진 포물선의 방정식은

$x^2=4\times1\times y$

이므로 이 포물선의 초점의 좌표는 $F(0,\ 1)$이다.

점 A의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$으로 두자.(단, $t>0$)

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{AF}=\sqrt{t^2+\left(\dfrac{t^2}{4}-1\right)^2}=10$

식을 변형하면 $\sqrt{\left(\dfrac{t^2}{4}+1\right)^2}=10$ 즉, $\dfrac{t^2}{4}+1=10$

이차방정식을 풀면 $t=6$

점 A의 좌표는 $A(6,\ 9)$이다.

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\therefore\ a^2=\overline{AB}^2=6^2+(9+1)^2=136$

답 136

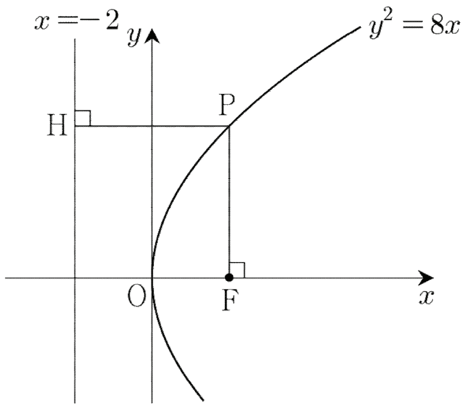
M011 | 답 ④

[풀이1]

$y^2 = 4\times 2\times x$이므로 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$이고,

준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 P에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=4$

이므로 점 P의 x좌표는 $2(=4-2)$이다.

즉, $a=2$

이를 포물선의 방정식에 대입하면

$y^2=16$에서 $y=4$ 즉, $b=4$

$\therefore\ a+b=6$

답 ④

[참고] (교육과정 외)

공식

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 직선 PF가 y축에 평행함을 보일 수 있다.

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2\times 2}{1-\cos\theta}=4$, $\cos\theta=0$, $\theta=90^\circ$

따라서 직선 PF는 y축에 평행하다.

[풀이2]

$y^2=4\times 2\times x$이므로 문제에서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이다.

문제에서 주어진 포물선은 제1사분면과 제4사분면을 지나고, $b>0$이므로 점 P는 제1사분면에 속한다. 따라서 $a>0$이다.

점 P는 포물선 위에 있으므로

$b^2=8a$ $\cdots$ ㉠

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(a-2)^2+b^2}=4$

양변을 제곱하여 정리하면

$(a-2)^2+b^2=16$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(a-2)^2+8a=16$

정리하면

$a^2+4a-12=0$

좌변을 인수분해하면

$(a+6)(a-2)=0$

풀면

$a=2(\because a>0)$

이를 ㉠에 대입하면 $b=4(\because b>0)$

$\therefore\ a+b=6$

답 ④

M012 | 답 ①

[풀이1]

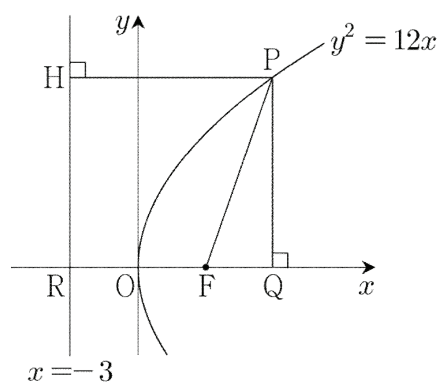
$y^2=4\times 3\times x$이므로

이 포물선의 초점은 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이고,

준선은 $x=-3$이다.

점 P에서 두 직선 $x=-3$, $y=0$(x축)에 내린 수선의 발을 각각 H, Q, 직선 $x=-3$이 x축과 만나는 점을 R이라고 하자.

아래 그림처럼 점 P의 y좌표를 양수로 두자. (점 P의 y좌표가 음수인 경우에도 동일한 결과를 얻는다.)



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=9$

이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{RO}}+\overline{\mathrm{OQ}}=3+\overline{\mathrm{OQ}}=9$

에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=6$

$\therefore$ (점 P의 x좌표)$=\overline{\mathrm{OQ}}=6$

답 ①

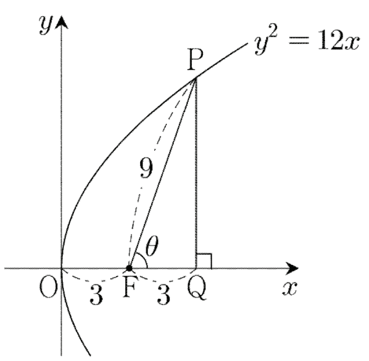
[풀이2]

$y^2=4\times 3\times x$이므로

이 포물선의 초점은 $\mathrm{F}(3,\ 0)$이다.

점 P의 좌표를 $(s,\ t)$로 두자.
점 P는 문제에서 주어진 포물선 위에 있으므로
$t^2=12s$
두 점 사이의 거리 공식에 의하여
$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(s-3)^2+t^2}$
$=\sqrt{(s-3)^2+12s}\ (\because t^2=12s)$
$=\sqrt{(s+3)^2}$
$=s+3=9$에서 $s=6$
따라서 점 P의 x좌표는 6이다.
답 ①

[풀이3] (교육과정 외)
공식
$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)
를 이용하여 문제를 해결하자.
$y^2=4\cdot3\cdot x$에서 $p=3$, 즉 $\mathrm{F}(3,\ 0)$
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라고 하자.



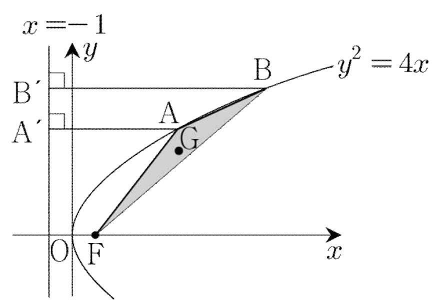
$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$, 즉 $9=\dfrac{2\cdot3}{1-\cos\theta}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$
직각삼각형 PFQ에서
$\overline{\mathrm{FQ}}=3$
$\therefore$ (점 P의 x좌표)$=3+3=6$
답 ①

M013 | 답 ②

[풀이]
문제에서 주어진 포물선의 방정식을 정리하면
$(y-2)^2=ax$, 즉 $(y-2)^2=4\cdot\dfrac{a}{4}\cdot x$
이 포물선의 초점은 포물선 $y^2=4\cdot\dfrac{a}{4}\cdot x$의 초점 $\left(\dfrac{a}{4},\ 0\right)$을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 문제에서 주어진 포물선의 초점의 좌표는
$\left(\dfrac{a}{4},\ 2\right)$
이므로 $\dfrac{a}{4}=3$, $2=b$, 즉 $a=12$, $b=2$
$\therefore\ a+b=14$
답 ②

M014 | 답 90

[풀이]
$y^2=4\times1\times x\,(p=1)$이므로 이 포물선의 초점의 좌표는
$\mathrm{F}(1,\ 0)$
이고, 준선의 방정식은 $x=-1$이다.
삼각형 AFB의 무게중심을 G, 두 점 A, B에서 직선 $x=-1$(준선)에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′라고 하자.
그리고 $\overline{\mathrm{AF}}=a$, $\overline{\mathrm{BF}}=b$라고 하자.

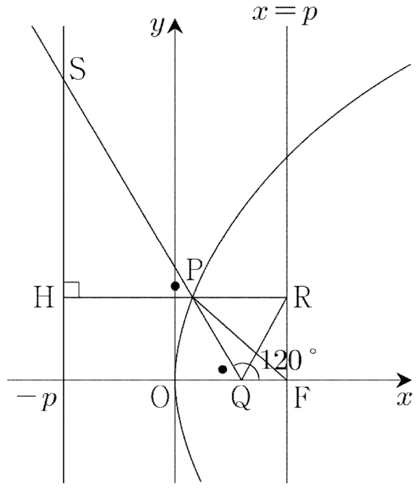


(점 A의 x좌표)$=\overline{\mathrm{A'A}}-1=\overline{\mathrm{AF}}-1=a-1$,
(점 B의 x좌표)$=\overline{\mathrm{B'B}}-1=\overline{\mathrm{BF}}-1=b-1$
이므로
(점 G의 x좌표)$=\dfrac{(a-1)+(b-1)+1}{3}$
$=\dfrac{a+b-1}{3}=6$, 즉 $a+b=19$
이제 ab의 최댓값을 구하면 된다.
$ab=a(19-a)$ $\cdots(*)$
이차함수 $y=a(19-a)$의 대칭축은
$a=\dfrac{19}{2}=9.5$
이므로 $(*)$는
$a=9\,(b=10)$ 또는 $a=10\,(b=9)$
일 때 최댓값 90을 갖는다.
답 90

M015 | 답 6

[풀이]
점 P에서 직선 $x=-p$(준선)에 내린 수선의 발을 H라고 하

자. 그리고 정삼각형 PQR의 한 변의 길이를 $2t$라고 하자. 이때, $\overline{QF}=t$이다.



(단, ●$=60°$)

삼각형 PQF에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PF}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QF}^2-2\overline{PQ}\,\overline{QF}\cos 120°$

$=5t^2-2\times 2t^2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7t^2$

$\overline{PF}=\sqrt{7}t$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PH}=\sqrt{7}t$

직각삼각형 SHP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\dfrac{\sqrt{21}-\sqrt{3}t}{\sqrt{7}t}=\tan 60°$,

(이때, $\sqrt{3}t$는 정삼각형 PQR의 높이이다.)

즉 $t=\dfrac{7-\sqrt{7}}{6}(=\overline{QF})$

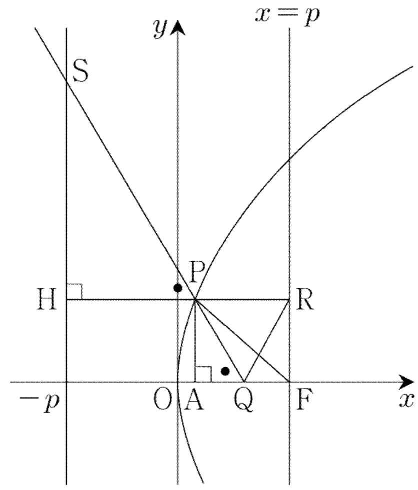
$\therefore\ a=7,\ b=-1,\ a+b=6$

답 6

[참고]

다음과 같은 방법으로 선분 PF의 길이를 구해도 좋다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 A라고 하자.



(단, ●$=60°$)

직각삼각형 PAQ에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{PA}=\sqrt{3}t$

직각삼각형 PAF에서 피타고라스의 정리에 의하여

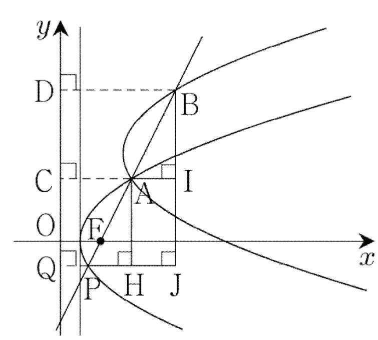
$\overline{PF}=\sqrt{(2t)^2+(\sqrt{3}t)^2}=\sqrt{7}t$

M016 | 답 80

[풀이]

$y^2=8x=4\times2\times x$에서 포물선의 초점의 좌표는 F$(2,\ 0)$이다. (그런데 직선 $y=2x-4$가 이 점을 지난다.) 그리고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

직선 $y=2x-4$가 포물선 $y^2=8x$와 만나는 두 점 중에서 점 A가 아닌 점을 P, 점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 아래 그림처럼 $\angle PJB=90°$가 되도록 점 J를 잡고, 점 A에서 두 직선 BJ, PJ에 내린 수선의 발을 각각 I, H라고 하자.



포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동 하면 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$와 일치한다.

이때, 동일한 평행이동에 의하여 두 점 P, A는 각각 두 점 A, B로 이동한다.

(즉, $\overline{AI}=a=\overline{PH}=\overline{HJ}$,

$\overline{BI}=2a=\overline{AH}=\overline{IJ}$)

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PQ}+\overline{AC}-\overline{PA}=0$

$(\because \overline{FP}=\overline{PQ},\ \overline{FA}=\overline{AC})$

이므로

$k=\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$

$=\overline{PQ}+\overline{AC}-\overline{PA}+2a=2a$

$(\because \overline{AC}=\overline{PQ}+a,\ \overline{BD}=\overline{AC}+a,\ \overline{AB}=\overline{PA})$

이제 a의 값을 구하자.

두 점 A, P의 x좌표를 각각 α, β로 두면

$\alpha-\beta=a$

포물선과 직선의 방정식을 연립하면

$(2x-4)^2=8x$, $x^2-6x+4=0$

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$

$\therefore\ k^2=4a^2=4(\alpha-\beta)^2$

$=4\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=4\times 20=80$

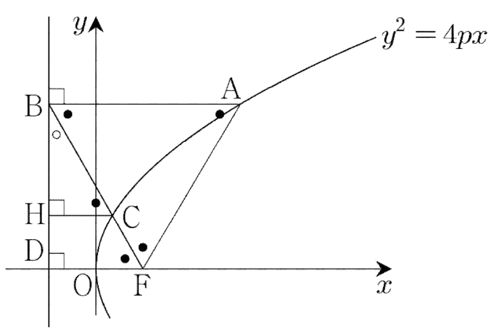
답 80

M017 | 답 ③

[풀이]

점 C에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H,

직선 $x=-p$가 x축과 만나는 점을 D라고 하자.



(단, ●$=60°$, ○$=30°$)

포물선의 정의에 의하여

$\overline{FA}=\overline{AB}$

이므로 삼각형 ABF는 정삼각형이다.

그리고 '삼각형의 세 내각의 합은 $180°$이다.', 평행선의 성질에 의하여 위의 그림처럼 각(●, ○)이 결정된다.

$\overline{AB}=2\overline{DF}=4p$이므로 정삼각형 ABF의 한 변의 길이는 $4p$이다.

직각삼각형 BCH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\dfrac{\overline{CH}}{\overline{BC}}=\cos 60°=\dfrac{1}{2}$, 즉

$\overline{BC}=2\overline{CH}=2\overline{CF}$ ($\because$ 포물선의 정의) $\cdots$ ㉠

문제에서 주어진 등식

$\overline{BC}+3\overline{CF}=6$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\overline{CF}=\dfrac{6}{5}$, $\overline{BF}=3\overline{CF}=\dfrac{18}{5}=4p$

$\therefore\ p=\dfrac{9}{10}$

답 ③

M018 | 답 ⑤

[풀이1]

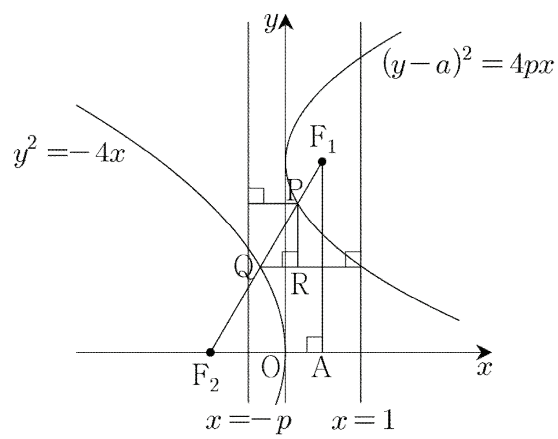
포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점과 준선은 각각

$F_1(p,\ a)$, $x=-p$

포물선 $y^2=-4x$의 초점과 준선은 각각

$F_2(-1,\ 0)$, $x=1$

아래 그림처럼 점 F_1에서 x축에 내린 수선의 발을 A라 하고, PQR이 직각삼각형이 되도록 점 R을 잡자. 그리고 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라고 하자.



삼각형 F_1F_2A에서

$\overline{F_2A}=p+1$, $\overline{F_1A}=a$

이므로 직선 PQ(F_1F_2)의 기울기는 $\dfrac{a}{p+1}$이다.

서로 닮음인 두 직각삼각형 F_1F_2A, PQR의 닮음비가 $3:1$이므로

$\overline{QR}=\dfrac{1}{3}(p+1)$ 즉, $x_1-x_2=\dfrac{1}{3}(p+1)$ $\cdots$ ㉠

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF_1}=p+x_1$, $\overline{QF_2}=1-x_2$

이므로

$\overline{PF_1}+\overline{QF_2}=p+x_1+1-x_2=2$,

$x_1-x_2=1-p$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\frac{1}{3}(p+1)=1-p,\ p=\frac{1}{2}$

직각삼각형 F_1F_2A에서 피타고라스의 정리에 의하여

$a^2=3^2-(p+1)^2=9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$

$\therefore\ a^2+p^2=7$

답 ⑤

[풀이2]

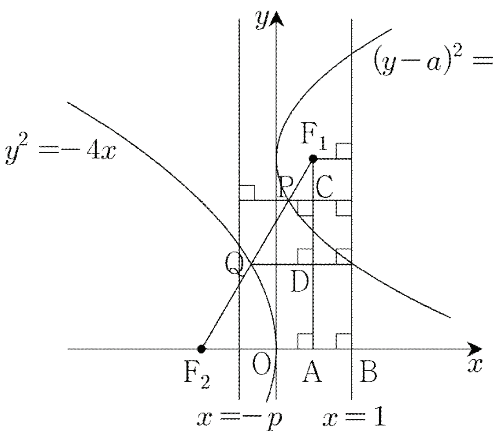
포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점과 준선은 각각

$F_1(p,\ a),\ x=-p$

포물선 $y^2=-4x$의 초점과 준선은 각각

$F_2(-1,\ 0),\ x=1$

점 F_1에서 x축에 내린 수선의 발을 A, 두 점 P, Q에서 선분 F_1A에 내린 수선의 발을 각각 C, D, 직선 $x=1$이 x축과 만나는 점을 B라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{PC}=(1+p)-b-(1-p)=2p-b$

$(\because\ \overline{AB}=1-p)$

$\overline{QD}=c-(1-p)=1-b+p$

$(\because\ c=2-b)$

$\triangle F_1F_2A \sim \triangle F_1PC \sim \triangle F_1QD$이므로

$\overline{F_1P}:\overline{PC}=\overline{F_1F_2}:\overline{F_2A}$ 즉, $b:2p-b=3:1+p$

$\overline{F_1Q}:\overline{QD}=\overline{F_1F_2}:\overline{F_2A}$ 즉, $b+1:1-b+p=3:p+1$

위의 두 비례식을 정리하면

$b=\frac{6p}{p+4}=\frac{2+2p}{p+4},\ \therefore\ p=\frac{1}{2}$

직각삼각형 F_1F_2A에서 피타고라스의 정리에 의하여

$a^2=3^2-(p+1)^2=9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$

$\therefore\ a^2+p^2=7$

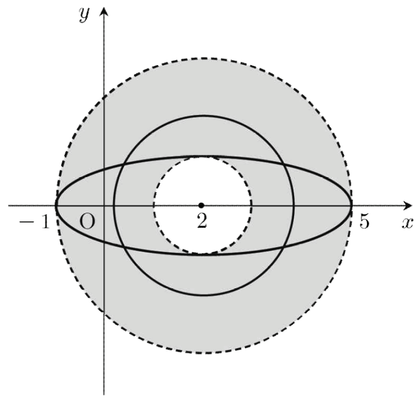
답 ⑤

M019 | 답 ②

[풀이1]

주어진 타원의 방정식을 정리하면

$\frac{(x-2)^2}{3^2}+y^2=1$



중심이 $(2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 a인 원이 두 원

$(x-2)^2+y^2=1,\ (x-2)^2+y^2=9$

로 둘러싸인 영역(단, 경계제외)에 속하면 주어진 타원과 원은 서로 다른 네 점에서 만난다.

$\therefore\ 1<a<3$

답 ②

[풀이2] (선택)

주어진 타원의 방정식은

$x^2-4x+9y^2-5=0$ $\cdots$㉠

주어진 원의 방정식은

$x^2-4x+y^2-a^2+4=0$ $\cdots$㉡

㉠$-$㉡을 하면

$8y^2=9-a^2$

주어진 타원의 방정식을 정리하면

$\frac{(x-2)^2}{3^2}+y^2=1$

y의 범위는 $-1\le y\le 1$이므로

$0\le 8y^2\le 8$

대입하면

$0\le 9-a^2\le 8$

양수 a에 대한 연립부등식을 풀면

$1\le a\le 3$

$a=1$이면

$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (2,\ -1)$

이므로 타원과 원은 서로 다른 두 점에서 만난다.

$a=3$이면

$(x,\ y)=(-1,\ 0),\ (5,\ 0)$

이므로 타원과 원은 서로 다른 두 점에서 만난다.

$1<a<3$이면

$(x,\ y)=\left(\dfrac{3\sqrt{2a^2-2}}{4}+2,\ \dfrac{\sqrt{18-2a^2}}{4}\right)$,

$\left(\dfrac{3\sqrt{2a^2-2}}{4}+2,\ -\dfrac{\sqrt{18-2a^2}}{4}\right)$,

$\left(-\dfrac{3\sqrt{2a^2-2}}{4}+2,\ \dfrac{\sqrt{18-2a^2}}{4}\right)$,

$\left(-\dfrac{3\sqrt{2a^2-2}}{4}+2,\ -\dfrac{\sqrt{18-2a^2}}{4}\right)$

이므로 타원과 원은 서로 다른 네 점에서 만난다.

$\therefore\ 1<a<3$

답 ②

M020 | 답 51

[풀이]

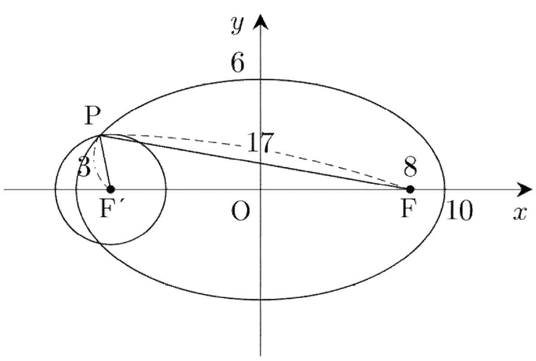
주어진 타원의 네 꼭짓점의 좌표는 각각

$(10,\ 0)$, $(0,\ 6)$, $(-10,\ 0)$, $(0,\ -6)$

주어진 타원의 두 초점의 좌표는 각각

$\mathrm{F}(\sqrt{10^2-6^2},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{10^2-6^2},\ 0)$

즉, $\mathrm{F}(8,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-8,\ 0)$



원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}=3$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=20$

이므로

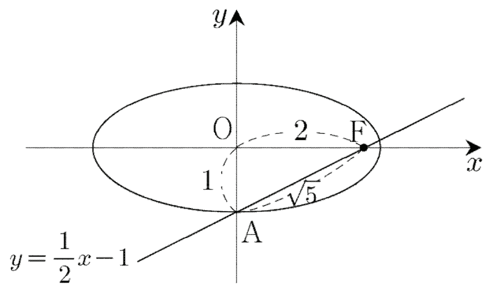
$\overline{\mathrm{PF}}=17$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}\cdot\overline{\mathrm{PF'}}=51$

답 51

M021 | 답 ⑤

[풀이1]



주어진 직선의 x절편과 y절편이 각각 2와 -1이므로

두 점 F, A의 좌표는 각각

$\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ -1)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{(2-0)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{5}$

타원의 정의에 의하여

$\therefore$ (타원의 장축의 길이)$=2\overline{\mathrm{AF}}=2\sqrt{5}$

답 ⑤

[풀이2]

주어진 직선의 x절편과 y절편이 각각 2와 -1이므로

두 점 F, A의 좌표는 각각

$\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ -1)$

주어진 타원의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$로 두자.

주어진 타원은 점 $\mathrm{A}(0,\ -1)$을 지나므로

$\dfrac{0^2}{a^2}+\dfrac{(-1)^2}{b^2}=1$에서 $b^2=1$

주어진 타원의 두 초점 중에서 한 초점이 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이므로

$\sqrt{a^2-b^2}=2$에서 $a^2=5$

주어진 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$

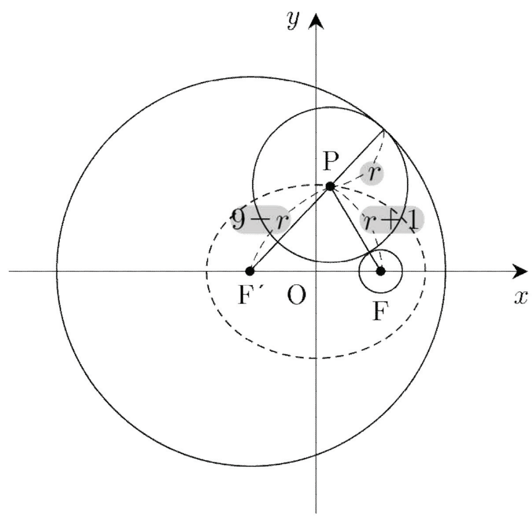
따라서 주어진 타원의 장축의 길이는

$2a=2\sqrt{5}$

답 ⑤

M022 | 답 41

[풀이]



점 P가 중심인 원의 반지름의 길이를 r이라고 하자.

$\overline{PF}=r+1$, $\overline{PF'}=9-r$

변변히 더하면

$\overline{PF}+\overline{PF'}=10$

타원의 정의에 의하여 점 P의 자취는 두 점

$F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$을 초점으로 하는 타원이다.

타원의 정의에 의하여 점 P의 자취(타원)의 장축의 길이는 5

$(=\frac{10}{2})$이다. 즉, $a=5$

타원의 정의에 의하여

$b=\sqrt{a^2-3^2}=4$

$\therefore\ a^2+b^2=41$

답 41

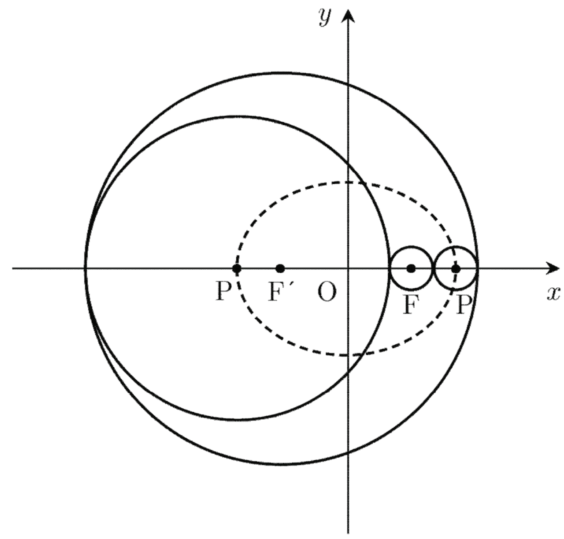
[참고]

다음과 같이 a, b의 값을 구해도 좋다.

타원의 정의에 의하여 점 P의 자취는 두 점

$F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$을 초점으로 하는 타원이다.

$\sqrt{a^2-b^2}=3$ …㉠



점 P가 x축 위에 있으면

$\overline{OP}=5$

($\because$ $\overline{OP}=\overline{OF}+$(원 F의 반지름의 길이)

$+$(작은 원 P의 반지름의 길이)$=3+1+1=5$)

이므로 주어진 타원의 x축 위의 두 꼭짓점의 좌표는 각각

$(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$

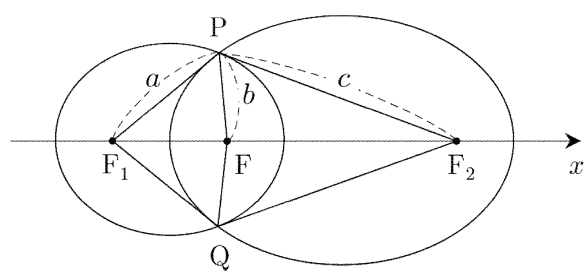
$a=5$ …㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$a=5$, $b=4$

M023 | 답 ①

[풀이]



타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF_1}=16$, 즉 $a+b=16$ …㉠

$\overline{QF}+\overline{QF_1}=16$, 즉 $a+b=16$ …㉡

타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF_2}=24$, 즉 $b+c=24$ …㉢

$\overline{QF}+\overline{QF_2}=24$, 즉 $b+c=24$ …㉣

㉠−㉢을 하면

$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=-8$, 즉 $a-c=-8$

㉡−㉣을 하면

$\overline{QF_1}-\overline{QF_2}=-8$, 즉 $a-c=-8$

$\therefore \ |\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|+|\overline{QF_1}-\overline{QF_2}|=16$

답 ①

[참고]

$a-b=(a+c)-(b+c)$로 계산하는 것은 수능에서 자주 출제되므로 이를 반드시 기억해두어야 한다. 이때, 우변에서 c는 소거된다.

M024 | 답 39

[풀이1]

타원의 두 초점은 각각

$F(\sqrt{36-20},\ 0),\ F'(-\sqrt{36-20},\ 0)$

즉, $F(4,\ 0),\ F'(-4,\ 0)$

$\overline{PF}=a$로 두자.

타원의 정의에서

$\overline{PF}+\overline{PF'}=12$

이므로 $\overline{PF'}=12-a$

삼각형 $F'FP$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PF'}^2=\overline{F'F}^2+\overline{FP}^2-2\overline{F'F}\,\overline{FP}\cos\frac{\pi}{3}$$

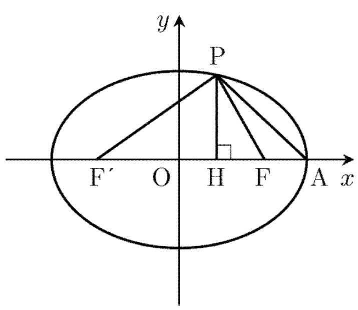
대입하면

$$(12-a)^2=8^2+a^2-2\times8\times a\times\cos\frac{\pi}{3}$$

a에 대한 일차방정식을 풀면

$a=5$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



직각삼각형 FPH에서

$$\overline{PH}=\frac{5\sqrt{3}}{2},\ \overline{HF}=\frac{5}{2}$$

직각삼각형 APH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AP}^2=\overline{PH}^2+\overline{HF}^2=39$

$\therefore\ 39$

[풀이2]

주어진 타원의 방정식에서

$a=6,\ b=2\sqrt{5}$ 이므로

$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$

주어진 타원의 두 초점은 각각

$F(4,\ 0),\ F'(-4,\ 0)$

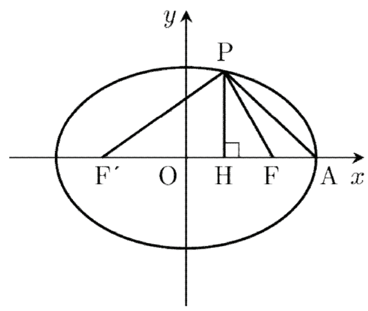
$\overline{PF}=t$로 두자.

타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=12$이므로

$\overline{PF'}=12-t$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



두 직각삼각형 FPH, F′PH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{PH}^2=\overline{PF}^2-\overline{FH}^2=t^2-\left(\frac{t}{2}\right)^2=\frac{3}{4}t^2$$

$$\overline{PH}^2=\overline{PF'}^2-\overline{F'H}^2=(12-t)^2-\left(8-\frac{t}{2}\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}t^2-16t+80$$

이므로

$$\frac{3}{4}t^2=\frac{3}{4}t^2-16t+80$$

풀면 $t=5$ 즉, $\overline{PF}=5$

직각삼각형 PFH에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\overline{PH}=\frac{5\sqrt{3}}{2},\ \overline{HF}=\frac{5}{2}$$

그리고 $\overline{HA}=\dfrac{9}{2}$이므로

직각삼각형 APH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AP}^2=\overline{PH}^2+\overline{HA}^2=39$

답 39

[풀이3] (선택)

주어진 타원의 방정식에서

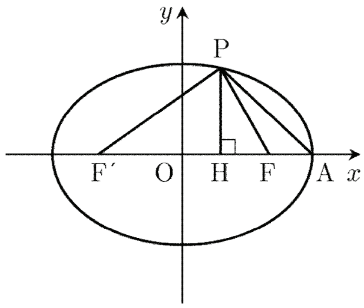
$a=6,\ b=2\sqrt{5}$ 이므로

$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$

주어진 타원의 두 초점은 각각

$F(4,\ 0),\ F'(-4,\ 0)$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



점 P의 좌표를

$\mathrm{P}\left(6\sqrt{1-\frac{t^2}{20}},\ t\right)$

으로 두면

$\overline{\mathrm{PH}}=t$, $\overline{\mathrm{HF}}=4-6\sqrt{1-\frac{t^2}{20}}$

직각삼각형 FPH에서

$\frac{\overline{\mathrm{HP}}}{\overline{\mathrm{FH}}}=\tan\frac{\pi}{3}$

대입하면

$\frac{t}{4-6\sqrt{1-\frac{t^2}{20}}}=\sqrt{3}$

정리하면

$6\sqrt{3-\frac{3}{20}t^2}=4\sqrt{3}-t$

양변을 제곱하여 정리하면

$8t^2-10\sqrt{3}t-75=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$t=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 또는 $t=-\frac{5\sqrt{3}}{4}$

t는 양수이므로 $t=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

직각삼각형 FPH에서 $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\mathrm{HF}}=\frac{5}{2}$

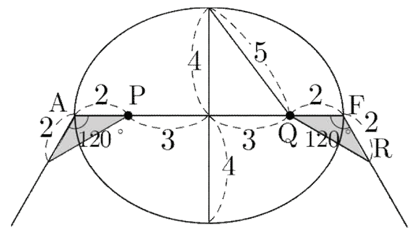
$\overline{\mathrm{HA}}=\frac{9}{2}$이므로 직각삼각형 APH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HA}}^2=39$

답 39

M025 | 답 ④

[풀이]



위의 그림과 같이 주어진 12개의 초점 중에서 3개의 초점을 각각 P, Q, R이라고 하자.

타원의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{FR}}$

정육각형의 성질의 의하여

$\angle\mathrm{QFR}=120^\circ$

삼각형 QFR은 $\angle\mathrm{QFR}=120^\circ$인 이등변삼각형이며, 나머지 5개의 삼각형은 모두 삼각형 QFR과 합동이다.

주어진 6개의 삼각형의 넓이의 합이 $6\sqrt{3}$이므로, 1개의 삼각형의 넓이는 $\sqrt{3}$이다.

$\overline{\mathrm{QF}}=a$로 두면

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle\mathrm{QFR}$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{QF}}\,\overline{\mathrm{FR}}\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$

풀면

$a=2$

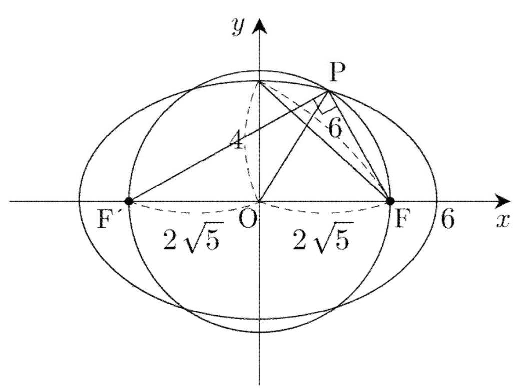
타원의 장축의 길이가 10, 타원의 중심에서 한 초점까지의 거리가 3이므로 타원의 정의에 의하여

∴ (단축의 길이)$=2\sqrt{5^2-3^2}=8$

답 ④

M026 | 답 32

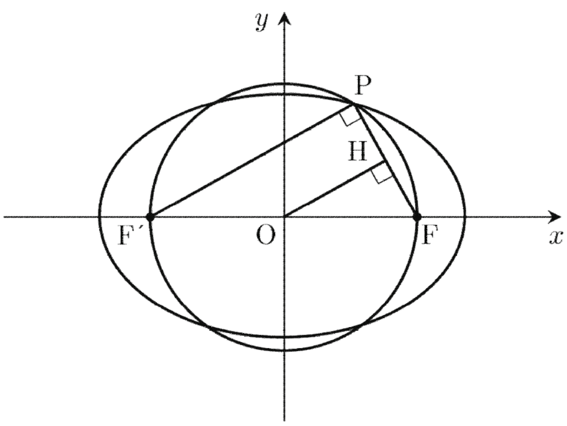
[풀이1]



타원의 초점의 좌표를 구하면

$F(\sqrt{36-16}, 0)$, $F'(-\sqrt{36-16}, 0)$
즉, $F(2\sqrt{5}, 0)$, $F'(-2\sqrt{5}, 0)$
타원의 정의에 의하여
$\overline{PF}+\overline{PF'}=12$ …㉠
문제에서 주어진 타원의 중심은 원점이므로
$\overline{OF}=\overline{OF'}$
주어진 조건에 의하여
$\overline{OP}=\overline{OF}$
이므로 세 점 F, F′, P는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원 위에 있다.
원주각의 성질에 의하여
$\angle FPF'=90°$
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{F'F}^2=\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2$
대입하면
$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=80$ …㉡
㉠의 양변을 제곱하면
$\overline{PF}^2+2\overline{PF}\times\overline{PF'}+\overline{PF'}^2=144$ …㉢
㉢−㉡을 하여 정리하면
$\overline{PF}\times\overline{PF'}=32$
답 32

[풀이2]
타원의 중심이 원점이므로
$\overline{OF}=\overline{OF'}$
주어진 조건에 의하여
$\overline{OP}=\overline{OF}=\overline{OF'}$
원의 정의에 의하여 세 점 F, P, F′은 원점을 중심으로 하는 원 위에 있다.
원점에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



원의 성질에 의하여
$\angle FPF'=\frac{\pi}{2}$
두 직선 OH, F′P는 서로 평행하므로
$\angle FHO=\frac{\pi}{2}$
그리고 $\angle OFH=\angle F'FP$이므로
두 삼각형 FHO, FPF′은 서로 닮음이다.
타원의 장축의 길이가 12이므로
타원의 정의에 의하여
$\overline{PF}+\overline{PF'}=12$
$\overline{PF}=x$로 두면 $\overline{PF'}=12-x$
이등변삼각형 POF에서 직선 OH는 선분 PF의 수직이등분선이므로
$\overline{HF}=\frac{1}{2}\times\overline{PF}=\frac{x}{2}$
두 삼각형 FHO, FPF′은 서로 닮음이다.
$\overline{OF} : \overline{F'F}=\overline{OH} : \overline{F'P}$
정리하면
$\overline{OH}=6-\frac{x}{2}$
타원의 초점 F의 좌표를 구하면
$F(2\sqrt{5}, 0)$이므로 $\overline{OF}=2\sqrt{5}$
직각삼각형 OFH에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{OF}^2=\overline{OH}^2+\overline{HF}^2$
대입하면
$(2\sqrt{5})^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(6-\frac{x}{2}\right)^2$
정리하면
$x^2-12x+32=0$
좌변을 인수분해하면
$(x-4)(x-8)=0$
$0<x<6$이므로
$x=4$
$\therefore\ \overline{PF}\cdot\overline{PF'}=4\times8=32$
답 32

[풀이3] (선택)
타원의 중심이 원점이므로
$\overline{OF}=\overline{OF'}$
주어진 조건에 의하여
$\overline{OP}=\overline{OF}=\overline{OF'}$
원의 정의에 의하여 세 점 F, P, F′은 원점을 중심으로 하는 원 위에 있다.
타원의 초점 F의 좌표를 구하면
$F(2\sqrt{5}, 0)$이므로 $\overline{OF}=2\sqrt{5}$
세 점 F, P, F′을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2=20$
이 원의 방정식과 타원의 방정식을 연립하면

$$\frac{x^2}{36}+\frac{20-x^2}{16}=1$$

풀면

$$x=\pm\frac{6\sqrt{5}}{5},\ y=\pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

점 P는 제1사분면 위에 있으므로

$$P\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},\ \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\overline{PF}=\sqrt{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}-2\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2}=4$$

$$\overline{PF'}=\sqrt{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}+2\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2}=8$$

이므로

$\therefore\ \overline{PF}\cdot\overline{PF'}=32$

답 32

M027 | 답 32

[풀이]

주어진 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{9}+y^2=1$$

타원의 두 초점을 각각

$F(c,\ 0),\ F'(-c,\ 0)$

이라고 하면

$c=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

$d=|c-(-c)|=4\sqrt{2}$

$\therefore\ d^2=32$

답 32

M028 | 답 ⑤

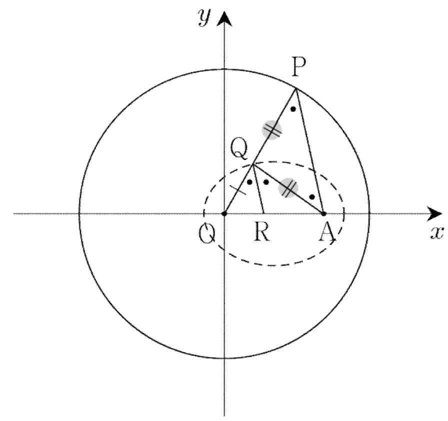
[풀이]

점 Q를 지나고 직선 AP에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 R이라고 하자.

$\angle OQR=\alpha$로 두면

조건 (나)에 의하여

$\angle AQR=\alpha$



조건 (나)에 의하여

두 직선 AP, RQ가 서로 평행하므로

$\angle OQR=\alpha=\angle OPA$ (동위각)

$\angle RQA=\alpha=\angle PAQ$ (엇각)

이등변삼각형 AQP에서

$\overline{AQ}=\overline{QP}$

원의 정의에 의하여

$\overline{OP}=\overline{OQ}+\overline{QP}=\overline{OQ}+\overline{QA}=6$

타원의 정의에 의하여 점 Q의 자취는 두 점 O, A를 두 초점으로 하는 타원의 일부이다.

이 타원의 중심은 $(2,\ 0)$이고, 장축의 길이는 6이므로

타원의 방정식은

$$\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{y^2}{3^2-2^2}=1$$

따라서

$$X\subset\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\right\}$$

답 ⑤

[참고1]

$b\neq 0$이므로 점 Q의 y좌표는 0이 아니다.

구한 타원의 방정식에 $y=0$을 대입하여

x의 값을 구하면 $x=-1$ 또는 $x=5$이다.

두 점 $(-1,\ 0)$, $(5,\ 0)$는 집합 X의 원소가 아니다.

[참고2] (선택)

두 점 O, A를 두 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원의 방정식을 다음과 같이 유도할 수도 있다.

$\overline{OQ}+\overline{AQ}=6$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6$$

식을 변형하면

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6-\sqrt{x^2+y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2022 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2022 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통 〉

- 공통 1 : 문제를 보자마자 a^2-b^2이 떠올라야 함. 1번부터 '이 시험은 교과서/기출문제를 풀었던 기억으로 푼다.' 를 의도적으로 말하고 있음. 즉, '정해진 풀이를 따르지 않으면 망한다.' 를 노골적으로 표현.
- 공통 8 : 이차함수의 정적분 → 대칭축을 생각한다.
- 공통 13 : 그림을 그릴 수 없으니, 처음부터 끝까지 계산. 로그문제에서 a^b이 나오면 $\log a^b = b\log a$ 생각이 들어야.
- 공통 14 : x축에서 점 P를 움직이는게 우선.
- 공통 15 : 역대 평가원 기출 중에서 " 코사인법칙에 의하여 " 란 문구가 등장한 첫 번째 문제. 어떤 공식을 써야 하는지 알려 주었는데. 어려운 문제일리 없다. 읽는데 4점.
- 공통 21 : $2+2^2+2^3<2^4$과 같은 계산을 해보았는가? '기하급수적으로 빨라진다.' 의 의미를 아는가를 평가.
- 공통 22 : $f(1)=f(4)$에서 $f(x)$의 그래프의 개형이 바로 나와야 함. 삼차함수의 비율관계.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 28 : 분할, 여사건 모두 가능. 이 문제 보다 경우 구분이 많은 함수 개수 세는 문제는 기출에 널려있음.
- 확률과 통계 29 : 적분 기호 쓰면 좀 더 편하긴 한데. $y=k$ 그리면 더 단순하게 해결 가능.
- 확률과 통계 30 : 답을 맞히기 상당히 어려운, 실수하기 딱 좋은 문제. 수형도 그냥 다 그리는 편이 나음.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 : 평행이동/대칭성 & 기출을 풀었던 경험. 풀이 중간 과정에서 답을 바로 알 수 있음.
- 미적분 29 : 계산이 복잡하니. 극한의 근사적 계산으로 접근하면 실수 없이 빠르게 계산 가능.
- 미적분 30 : (나)의 항등식에 $x=1,\ 2,\ 4$ 대입하여 점찍고, 확대해서 그리면 끝. 역함수의 정적분 계산 말고, 그림으로 해결.

〈 기하 〉

- 기하 26 : 동일하게 쌍곡선으로 수능에 출제된 적이 있음. 원 밖의 점에서 접선 2개 그으면 합동인 직각삼각형 2개 찾는다.
- 기하 28 : 빗변 주면, 직각삼각형 그리고. 기울기 없으니, 피타 쓰고. 포물선의 정의대로 선분 그으면 직각 안에 수선 그려지니 닮음 쓰고.
- 기하 29 : 문제에서 원 위의 점 주었으니. (나)는 직선(선분)일 수밖에. 이 유형의 문제 중에서도 중급 수준.
- 기하 30 : 평가원 기출 중, 구/직선 정사영 내려서 점의 이동 관찰하는 문제의 확장판. 풀다보면 이면각 보다는 정사영이 좀 더 편하긴 하지만. 이면각의 정의에 의한 풀이도 계산이 거의 없음. 기존 공도 기출과 비교하여 중급 수준.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

구성

▸ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 수학 Ⅰ'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 489개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2021년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2022학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2022학년도 (학년도 기준)

▸ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▸ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
대단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

▸ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

수학 Ⅰ

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록

A. 지수함수와 로그함수

A001

○○ (2001경찰대(1차)—공통5)

$\log_c b \times \log_b a = 2$, $\log_b c \times \log_c a = 3$일 때,

$\log_c a \times \log_a b$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

A002

○○ (2002사관(1차)—문과1)

실수 x, y에 대하여 a, b를 각각 $a=9^x$, $b=3^y$이라 할 때, $\log_a \sqrt{b}$를 x와 y로 나타내면? (단, $x \neq 0$) [2점]

① $\frac{y}{4x}$ ② $\frac{y}{3x}$ ③ $\frac{2y}{3x}$

④ $\frac{3y}{4x}$ ⑤ $\frac{2y}{x}$

A003

○○ (2003(10)고2—가형29)

함수 $y=4^x+4^{-x}-2(2^x+2^{-x})+5$의 최솟값을 구하시오. [4점]

A004

○○○ (2004(6)고2—나형15)

두 부등식 $1 \le x < 2^{10}$, $0 \le y \le \log_2 x$를 만족시키는 정수 x, y에 대하여 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 다음과 같이 구하였다.

> 자연수 k에 대하여 부등식 $2^{k-1} \le x < 2^k$을 만족시키는 정수 x의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.
> 이 $\boxed{(가)}$ 개의 각각의 x에 대하여
> $\log_2 2^{k-1} = k-1$, $\log_2 2^k = k$이므로
> $0 \le y \le \log_2 x$를 만족시키는 정수 y의 개수는 $\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 $2^{k-1} \le x < 2^k$인 범위에서 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 $\boxed{(가)} \times \boxed{(나)}$이다.
> 그런데 자연수 k는 1부터 $\boxed{(다)}$ 까지의 값을 취할 수 있으므로 각각의 k값을 대입하여 그 합을 구하면 9217이다.

위에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	2^k	$k-1$	10
②	2^k-1	k	10
③	2^{k-1}	$k+1$	9
④	2^{k-1}	k	10
⑤	2^{k+1}	k	9

A005

○○ (2005(6)고2-가형29)

1이 아닌 세 자연수 a, b, c에 대하여 등식

$$a^2=b^3=c^4=k$$

를 만족하는 k의 값들 중 최소인 수를 p라 할 때, $\log_4 p$의 값을 구하시오. [4점]

A006

○○ (2005(4)고3-나형16)

0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여

$a+b+c=0$이고 $3^a=x$, $3^b=y$, $3^c=z$이다.

이때, $\log_x yz+\log_y zx+\log_z xy$의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

A007

○○○ (2005사관(1차)-문과16)

다음은 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 할 때, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$이면

$$\frac{\log_2 p}{p}+\frac{\log_2 q}{q}\le 1$$

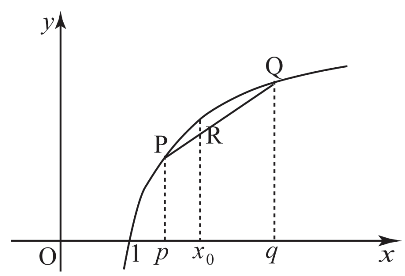
임을 증명한 것이다.

〈증명〉

$pq=\boxed{(가)}$이므로

$$\frac{\log_2 p}{p}+\frac{\log_2 q}{q}=\frac{q\log_2 p+p\log_2 q}{pq}$$

$$=\frac{q\log_2 p+p\log_2 q}{\boxed{(가)}} \quad \cdots ㉠$$



$\overline{\mathrm{PQ}}$를 $p:q$로 내분하는 점을 $\mathrm{R}(x_0,\ y_0)$라 하면

$$x_0=\boxed{(나)},\ y_0=\frac{q\log_2 p+p\log_2 q}{p+q} \quad \cdots ㉡$$

그런데 곡선 $y=\log_2 x$는 $\boxed{(다)}$이므로

$y_0\le\log_2 x_0$이다.

따라서 ㉠, ㉡에서

$$\frac{\log_2 p}{p}+\frac{\log_2 q}{q}\le 1$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$p+q$	2	위로 볼록
②	$-p-q$	3	위로 볼록
③	$p+q$	3	위로 볼록
④	$-p-q$	2	아래로 볼록
⑤	$p+q$	3	아래로 볼록

A008

(2005(7)고3-나형11)

다음은 $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$과 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$의 대소 관계를 알아보는 과정이다.

> $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$
>
> $=(\sqrt{2})^{\boxed{(가)}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$
>
> $\{(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-(\sqrt{3})^{\boxed{(나)}}\}$
>
> 그런데 $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\ \boxed{(다)}\ (\sqrt{3})^{\boxed{(나)}}$이고
>
> $(\sqrt{2})^{\boxed{(가)}}>0$, $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}>0$이므로
>
> $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}\ \boxed{(다)}\ 0$
>
> $\therefore\ (\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\ \boxed{(다)}\ (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$<$
②	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$>$
③	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$	$<$
④	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$	$>$
⑤	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$	$<$

A009

(2005(4)고3-가형14)

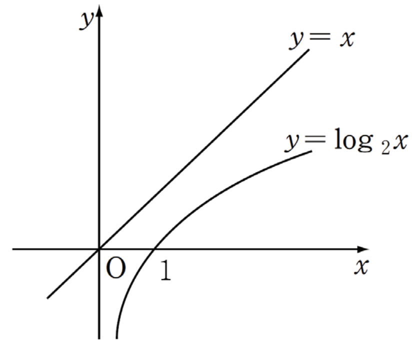
$y=10^x$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, $y=\log x$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하였더니 두 함수의 그래프가 두 점에서 만났다. 이 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{1}{9}+2\log 3$ ② $\frac{1}{9}+3\log 3$ ③ $9-\log 3$
④ $9-2\log 3$ ⑤ $9+\log 3$

A010

(2005(4)고3-가형9)

두 함수 $y=x$와 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



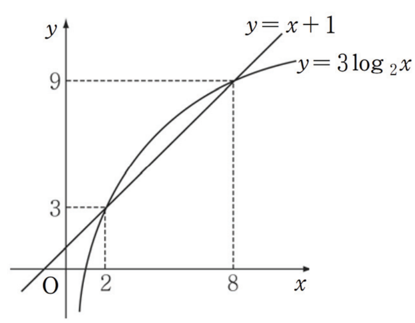
> ㄱ. $\frac{\log_2 x}{x}<1$
>
> ㄴ. $\frac{\log_2 x}{x-1}<1\ (x\neq 1)$
>
> ㄷ. $\frac{\log_2(x+1)}{x}<1\ (x\neq 0)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A011

(2005(4)고3-가형16)

두 함수 $y=x+1$과 $y=3\log_2 x$의 그래프를 이용하여 부등식 $2^{x+2}<(x+1)^3$을 만족시키는 x의 범위를 구하면 $\alpha<x<\beta$이다. 이때, $\alpha+\beta$의 값은? [4점]



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

A012

○○ (2005(3)고3-나형19)

$abc=24$인 세 실수 a, b, c가 있다. $2^a=3^2$, $3^b=5^3$일 때, 5^c의 값을 구하시오. [3점]

A013

○○ (2005(7)고3-나형30)

두 함수 $y=\log_4(x+p)+q$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+p)+q$의 역함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 한다. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 4)$에서 만나도록 두 실수 p, q의 값을 정할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. [4점]

A014

○○ (2005(7)고3-나형15)

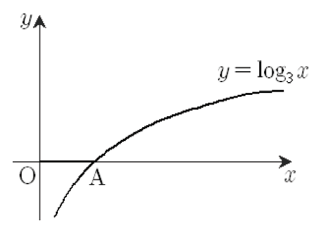
임의의 실수 x에 대하여 부등식 $2^{x+1}-2^{\frac{x+4}{2}}+a\geq 0$이 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

A015

○○ (2006(4)고3-가형6)

함수 $y=\log_3 x$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A라 하자. $y=\log_3(x+a)$의 그래프가 선분 OA를 x축의 양의 방향으로 3만큼, y축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동한 선분과 만날 때, a의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, O은 원점이다.) [3점]



① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

A016

○○ (2006(6)고2-가형18)

집합 $A=\{(x,\ y)|y=\log_3 x,\ x$는 양수$\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $(a,\ b)\in A$이면 $(3a,\ b+1)\in A$이다.
ㄴ. $\left(\frac{a}{3},\ b\right)\in A$이면 $(a,\ b-1)\in A$이다.
ㄷ. $(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in A$이면 $(ac,\ b+d)\in A$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A017

○○ (2006(3)고3-가형27)

x에 대한 방정식

$$4^x-a\times 2^{x+1}+a^2-a-6=0$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위는? [3점]

① $a>-6$ ② $-6<a<-2$
③ $a>0$ ④ $-2<a<3$
⑤ $a>3$

A018

○○ (2006(6)고2-나형3)

$\log_3 18=p$일 때, $\log_2 54$를 p로 나타낸 것은? [2점]

① $\frac{p}{p-1}$ ② $\frac{p+1}{p-2}$ ③ $\frac{p+2}{p-3}$
④ $\frac{p+3}{p-4}$ ⑤ $\frac{p+4}{p-5}$

A019

○○ (2006(3)고3-가형26)

실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\log_{a^2-a+2}(a^2+1)$
ㄴ. $\log_{2\|a\|+1}(a^2+1)$
ㄷ. $\log_{a^2+2}(a^2-2a+1)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A020

○○ (2006(3)고3-나형5)

집합

$$A=\left\{x \,\middle|\, x=\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{n}},\ n\text{은 0이 아닌 정수}\right\}$$

의 원소 중 자연수인 것의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A021

○○ (2006(9)고2-나형7)

$\log_{|x|}(x+3)(5-x)$가 정의되기 위한 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

A022

○○ (2006(11)고2-가형12/나형12)

100의 모든 양의 약수들을 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_9$라 할 때, $\log a_1+\log a_2+\log a_3+\ \cdots\ +\log a_9$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

A023

○○ (2006사관(1차)-문과18)

1 보다 큰 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 두 등식

$$\begin{cases} a^2b^3=64 \\ 3(\log_a c)^2-2(\log_b c)^2=-(\log_a c)(\log_b c) \end{cases}$$

이 성립하도록 하는 두 수 a와 b에 대하여 $\log_2 ab$의 값은? [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

A024

○ (2006(11)고2-가형5/나형5)

거듭제곱근의 성질 중 항상 옳은 것을 보기에서 모두 고르면? (단, $a>0$, $a\neq 1$) [3점]

ㄱ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[4]{a}$
ㄴ. $(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[12]{a}$
ㄷ. $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[6]{a^5}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A025

○○○ (2006(1차)경찰대-공통18)

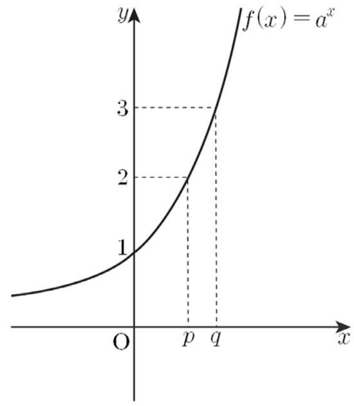
두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$와 직선 $x=32$로 둘러싸인 영역에 포함되는 x, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는? (단, 경계 위의 점은 제외한다.)

① 29 ② 31 ③ 33
④ 35 ⑤ 37

A026

○○ (2007(11)고2-가형13)

그림은 $f(x)=a^x\,(a>1)$의 그래프이다.



함수 $g(x)$가 $g(f(x))=x$를 만족시킬 때, $g(12)$의 값을 p, q로 나타내면? (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.) [3점]

① $p+q$ ② $p+2q$ ③ $p+3q$
④ $2p+q$ ⑤ $2p+3q$

A027

○○ (2007(7)고3-가형10)

함수 $f(x)=\log_a x$, $g(x)=\log_b x$가 $0<x<1$에서 $f(x)>g(x)$이 성립하기 위한 조건으로 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $1<b<a$
ㄴ. $0<a<b<1$
ㄷ. $0<a<1<b$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A028

○○○
(2007(9)고2-나형20)

이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 실근 α, β에 대하여

$$\log_2(\alpha+\beta)=\log_2\alpha+\log_2\beta-1$$

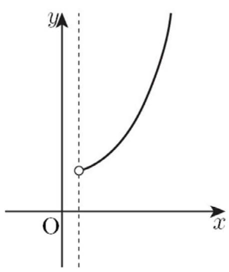
이 성립할 때, $q-p$의 최솟값은? (단, p, q는 실수이다.) [4점]

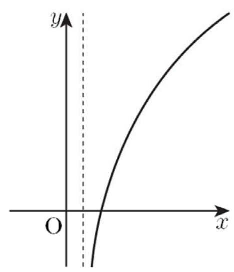
① 18 ② 24 ③ 30
④ 36 ⑤ 42

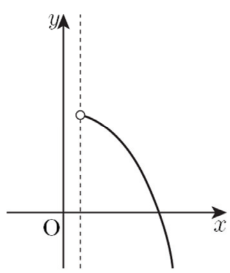
A029

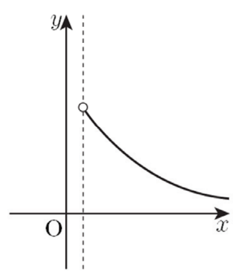
○○
(2007(11)고2-가형21)

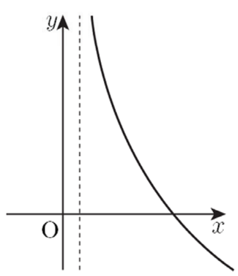
함수 $f(2^x)=-\log_3 x$일 때, $y=f(x)$의 그래프의 개형은? [4점]

①


②


③


④


⑤


A030

○○
(2007(4)고3-나형10)

두 수 $\sqrt{\dfrac{2^a\cdot5^b}{2}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{2^a\cdot5^b}{5}}$ 이 모두 자연수일 때, $a+b$의 최솟값은? (단, a, b는 자연수이다.) [4점]

① 2 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

A031

○
(2007(6)고2-가형3)

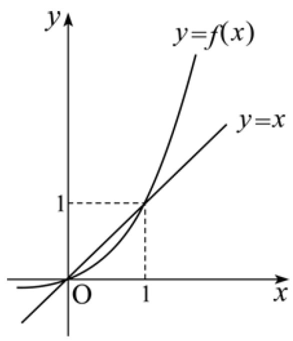
임의의 양수 a, b에 대하여 $a^2b\times\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}$ 을 간단히 하면? [3점]

① $a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{5}{3}}$ ② $a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{3}}$ ③ $a^{\frac{5}{3}}b^2$
④ a^2b^2 ⑤ $a^2b^{\frac{7}{3}}$

A032

○○ (2007(3)고3-가형10)

그림은 함수 $f(x)=2^x-1$의 그래프와 직선 $y=x$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위에 임의로 두 점을 잡아 그 두 점의 x좌표를 각각 a, $b\,(0<a<b)$라 할 때, 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



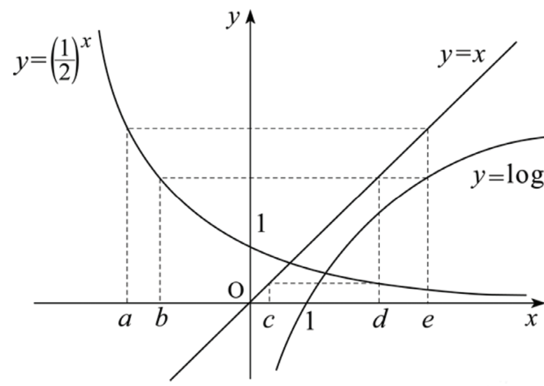
ㄱ. $0<a<1$이면 $f(a)<a$ ㄴ. $b-a<2^b-2^a$ ㄷ. $b(2^a-1)<a(2^b-1)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A034

○○○ (2007(10)고3-나형6)

그림은 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다.
옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은? (단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.) [4점]



ㄱ. $\left(\frac{1}{2}\right)^d=c$ ㄴ. $a+d=0$ ㄷ. $ce=1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A033

○○ (2007(7)고3-가형5)

로그함수 $f(x)=\log_a x$에 대하여 $f(m)=2$, $f(n)=3$일 때, $f^{-1}(7)$의 값을 m, n으로 올바르게 나타낸 것은? (단, f^{-1}는 f의 역함수) [3점]

① mn^2 ② m^2n ③ m^2n^2
④ m^2n^3 ⑤ m^3n^2

A035

○○ (2007(9)고2-가형8)

양의 실수 a와 2 이상의 정수 n에 대하여 항상 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\sqrt[n]{a^{2n}}=a^2$ ㄴ. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[2n]{a}=\sqrt[3n]{a}$ ㄷ. $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n+1]{a}=\sqrt[n(n+1)]{a}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A036

○○ (2007(11)고2-나형6)

$2^{x+2y}=a$, $2^{x-y}=b$일 때, 2^{x+y}을 a와 b로 나타내면? [3점]

① $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ② $\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$ ③ $\sqrt{ab}$
④ $\sqrt[3]{ab^2}$ ⑤ $\sqrt[3]{a^2b}$

A037

○○ (2007(4)고3-나형4)

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $a=b^2=c^3$이 성립할 때, $\log_a b+\log_b c+\log_c a$의 값은? [3점]

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{25}{6}$ ③ $\frac{29}{6}$
④ $\frac{31}{6}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

A038

○○○ (2007(10)고3-나형27)

두 집합

$$A=\left\{x \mid 2^{x(x-3a)}<2^{a(x-3a)}\right\},$$
$$B=\left\{x \mid \log_3(x^2-2x+6)<2\right\}$$

에 대하여 $A\cap B=A$가 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는? [3점]

① $-1\le a\le 0$ ② $-1\le a\le \frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}\le a\le 1$
④ $\frac{1}{3}\le a\le 3$ ⑤ $1\le a\le 3$

A039

○○ (2008(7)고3-가형13)

1이 아닌 양수 a, $b(a>b)$에 대하여 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=b^x$라 하자. 양수 n에 대하여 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(n)>g(n)$
ㄴ. $f(n)<g(-n)$이면 $a>1$이다.
ㄷ. $f(n)=g(-n)$이면 $f\left(\frac{1}{n}\right)=g\left(-\frac{1}{n}\right)$이다.

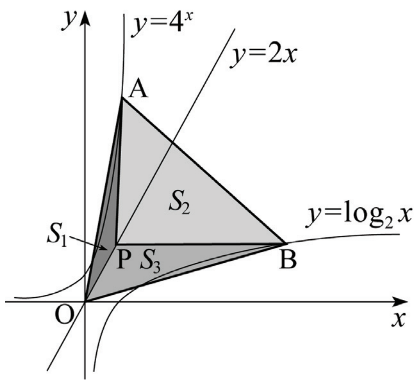
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A040

○○○
(2008(10)고3-가형16)

제1사분면에서 직선 $y=2x$ 위의 한 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 A라 하고, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B라 하자. 이때, 세 삼각형 OPA, PAB, OPB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.

$S_1 : S_2 : S_3 = 3 : k : 7$일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 17　② 18　③ 19
④ 20　⑤ 21

A041

○○○
(2008(9)고2-가형28)

양의 실수 k에 대하여 k의 네제곱근 중 실수인 것을 a, b $(a>b)$라 하고, k의 세제곱근 중 실수인 것을 c, $-k$의 세제곱근 중 실수인 것을 d라 한다.

이때, $\log_2 \dfrac{c}{a} = \log_2 \dfrac{b}{d} + 1$을 만족하는 k의 값을 구하시오. [4점]

A042

○○
(2008사관(1차)-문과1)

1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $a^2 \sqrt[5]{b} = 1$이 성립할 때, $\log_a \dfrac{1}{ab}$의 값은? [2점]

① -9　② -3　③ 3
④ 5　⑤ 9

A043

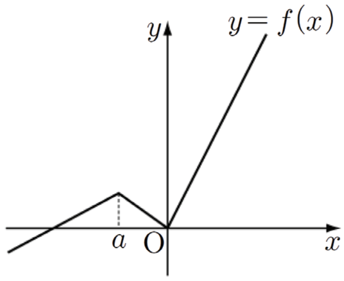
○○
(2009사관(1차)-문과25)

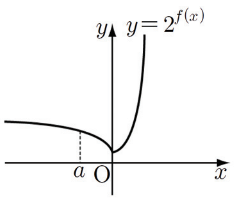
세 실수 a, b, c가 $ab=12$, $bc=8$, $2^a=27$을 만족시킬 때, 4^c의 값을 구하시오. [2점]

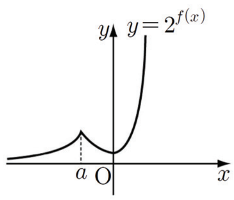
A044

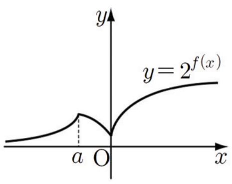
○○○
(2009(11)고2-가형11)

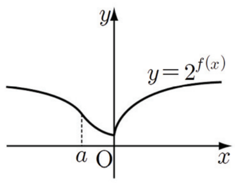
함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $y=2^{f(x)}$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은? [4점]

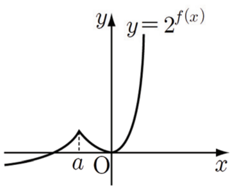


①


②


③


④


⑤


A045

○○○
(2009(11)고2-가형28)

집합 $\{2^n \mid n$은 20 이하의 자연수$\}$에서 서로 다른 두 수 a, b를 임의로 선택할 때, $\log_a b$가 정수가 되는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]

A046

○○
(2009(6)고2-가형8)

집합 $X=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{\sqrt{x} \mid x\in X,\ \sqrt{x}\text{는 실수}\}$$
$$B=\{\sqrt[3]{x} \mid x\in X,\ \sqrt[3]{x}\text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 곱은? [3점]

① $2^{\frac{1}{2}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{6}}$

④ 2 ⑤ $2^{\frac{7}{6}}$

A047

○○ (2009(9)고2-나형5)

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여, a^2은 b의 세제곱근이고 c^3은 b의 네제곱근이다.

$\log_a b+\log_b c=\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

① 81　② 82　③ 83
④ 84　⑤ 85

A048

○○○ (2009(7)고3-가형13)

정의역이 $x<4$인 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$) [3점]

ㄱ. $x_1+x_2>0$
ㄴ. $x_1y_1+x_2y_2<0$
ㄷ. $\lvert x_1y_2\rvert-\lvert x_2y_1\rvert>0$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A049

○○ (2009(7)고3-나형18)

$a>0$, $a\neq 1$에 대하여 $\left\{\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}}\times\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6=a^k$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

A050

○○ (2009경찰대(1차)-공통5)

다음이 성립할 때, $\dfrac{x}{y}$의 값은?

$$\log x+\log 3=2\log(2x-3y)-\log y$$

① 1　② $\dfrac{3}{2}$　③ 3
④ $\dfrac{10}{3}$　⑤ 5

A051

(2009사관(1차)-문과18)

함수 $f(x) = |2^x - 2|$의 그래프 위의 세 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$, $(c,\ f(c))$가 $0 < a < b < c$와 $f(a) > f(b) > f(c)$를 만족할 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $0 < c < 1$
ㄴ. $0 < f(a) + f(b) + f(c) < 3$
ㄷ. 방정식 $f(x) - a = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

A052

(2010(3)고3-가형4)

부등식 $a^{x-1} < a^{2x+1}$의 해가 $x < -2$일 때, 부등식

$$\log_a(x-2) < \log_a(4-x)$$

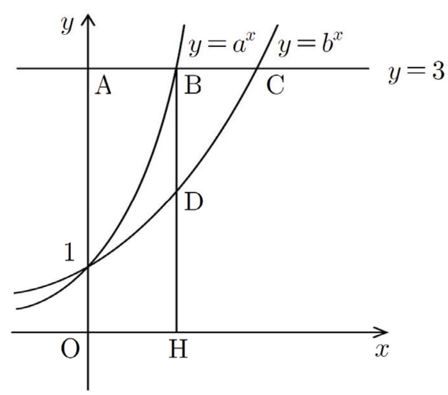
의 해는? (단, 상수 a는 1이 아닌 양수이다.) [3점]

① $2 < x < 3$　② $3 < x < 4$　③ $2 < x < 4$
④ $x < 3$　⑤ $x > 3$

A053

(2010(6)고2-가형6)

그림과 같이 직선 $y = 3$이 $x = 0$, $y = a^x$, $y = b^x$(단, $1 < b < a$)의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\text{BH}}$가 $y = b^x$의 그래프와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\text{AB}} = \overline{\text{BC}}$일 때, $\dfrac{\overline{\text{BD}}}{\overline{\text{DH}}}$의 값은? [3점]



① $\sqrt{2}-1$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\sqrt{3}-1$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A054

○○○
(2010(11)고2-가형6)

$\left(\frac{1}{3}\right)^a=\log_2 a$, $\left(\frac{1}{2}\right)^b=\log_3 b$, $\left(\frac{1}{3}\right)^c=\log_3 c$일 때, 양수 a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$
④ $c<a<b$ ⑤ $c<b<a$

A055

○○
(2010(11)고2-가형11)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.
(나) $f(x)=\begin{cases}4^{-x+1}-1 & (0\le x<1)\\ 4^{x-1}-1 & (1\le x<2)\end{cases}$

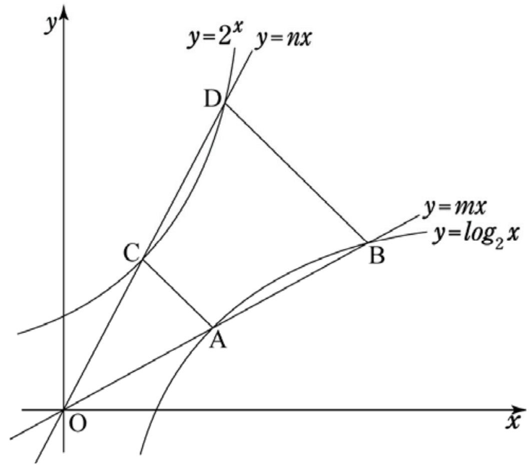
함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프와 만나는 점의 개수는? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

A056

○○
(2010(7)고3-나형12)

그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=mx$의 두 교점을 A, B라 하고, 함수 $y=2^x$의 그래프와 직선 $y=nx$의 두 교점을 C, D라 하자. 사각형 ABDC는 등변사다리꼴이고 삼각형 OBD의 넓이는 삼각형 OAC의 넓이의 4배일 때, $m+n$의 값은? (단, O는 원점) [3점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

A057

○○ (2010(10)고3-나형10)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-2 \le x \le 0$일 때, $f(x)=\lvert x+1 \rvert -1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$

$-10 \le x \le 10$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프의 교점의 개수는? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

A058

○○○ (2011(6)고2-가형21)

두 함수

$f(x)=-x^2+2x+1,\ g(x)=a^x(a>0,\ a\neq 1)$

이 있다. $-1 \le x \le 2$에서 두 함수 $f(g(x))$, $g(f(x))$의 최댓값이 같아지도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

A059

○○ (2011(6)고2-가형28)

모든 실수 x에 대하여 지수부등식

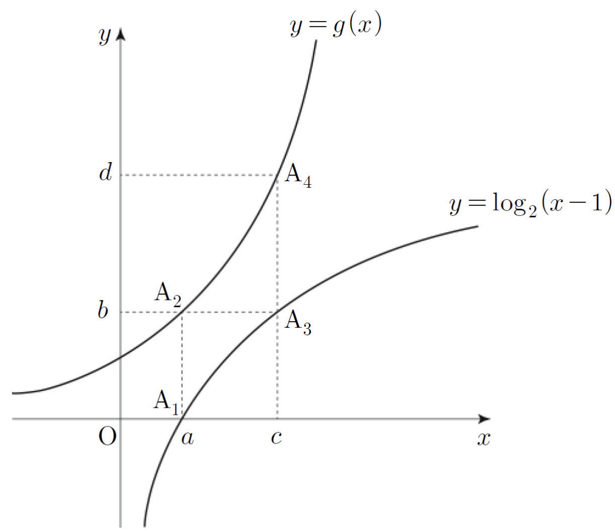
$$5^{2x} \ge k \cdot 5^x - 2k - 5$$

가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $\alpha \le k \le \beta$이다. $\lvert \alpha\beta \rvert$의 값을 구하시오. [4점]

A060

○○ (2011(11)고2-나형30)

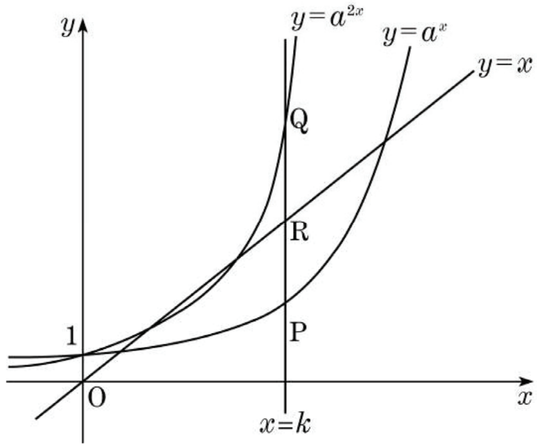
그림과 같이 함수 $y=\log_2(x-1)$과 그 역함수 $y=g(x)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-1)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 $A_1(a,\ 0)$, 점 A_1을 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 $A_2(a,\ b)$라 하자.
점 A_2를 지나고 x축에 평행한 직선이
함수 $y=\log_2(x-1)$의 그래프와 만나는 점을 $A_3(c,\ b)$, 점 A_3을 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 $A_4(c,\ d)$라 하자.
이때, $\log_{(b-1)}(c-1)(d-1)$의 값을 구하시오. [4점]



A061

●●● (2011(3)고3-가형14)

그림과 같이 지수함수 $y=a^x$와 $y=a^{2x}$의 그래프는 직선 $y=x$와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다. $y=a^x$의 그래프, $y=a^{2x}$의 그래프와 직선 $x=k$의 교점을 각각 P, Q라 하고 직선 $y=x$와 직선 $x=k$의 교점을 R라 하자.



$k=2$이면 두 점 Q와 R가 일치할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>1$) [4점]

ㄱ. $k=4$이면 두 점 Q와 R가 일치한다.
ㄴ. $\overline{PQ}=12$이면 $\overline{QR}=8$이다.
ㄷ. $\overline{PQ}=\frac{1}{8}$을 만족시키는 실수 k의 값의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A062

○○○ (2011(10)고3-나형26)

x에 대한 로그방정식

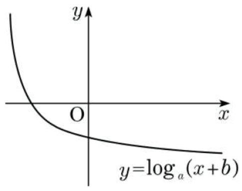
$$(\log x+\log 2)(\log x+\log 4)=-(\log k)^2$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 k의 값의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $10(\alpha^2+\beta^2)$의 값을 구하시오. [4점]

A063

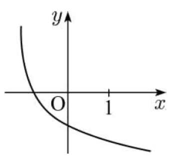
○○ (2011(6)고2-가형15)

함수 $y=\log_a(x+b)(a>0,\ a\neq1)$의 그래프가 그림과 같다.

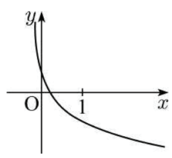


이때, 함수 $y=\log_b(x+a)$의 그래프로 알맞은 것은? [4점]

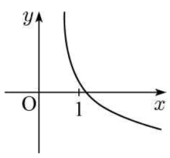
①



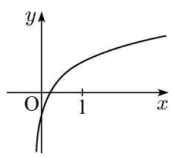
②



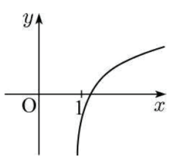
③



④



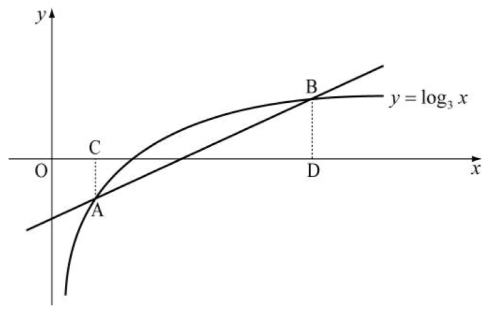
⑤



A064

○○ (2011(9)고2-가형25/나형25)

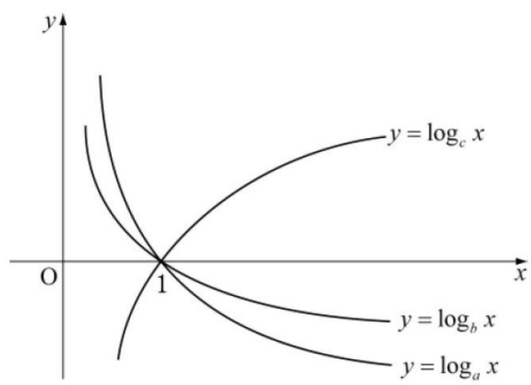
그림과 같이 곡선 $y=\log_3 x$와 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이 두 점 A, B에서 만나고 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{OC}}:\overline{\mathrm{OD}}=1:9$일 때, 선분 CD의 길이를 구하시오. [3점]



A065

○○ (2011(9)고2-가형9)

그림은 세 양수 a, b, c를 밑으로 하는 로그함수의 그래프이다.



$a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}>1$일 때, x_1, x_2, x_3의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

① $x_1>x_2>x_3$ ② $x_2>x_1>x_3$ ③ $x_2>x_3>x_1$
④ $x_3>x_1>x_2$ ⑤ $x_3>x_2>x_1$

A066
○○ (2012(11)고2–A형9/B형9)

좌표평면에서 지수함수 $y=a\cdot 3^x\,(a\neq 0)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1,\ -6)$을 지난다. 이때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

A067
○○ (2012사관(1차)–문과12)

x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases}\log_3 x+\log_2 \dfrac{1}{y}=1\\ \log_9 3x+\log_{\frac{1}{2}} y=1-\dfrac{k}{2}\end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha\leq\beta$를 만족시키는 정수 k의 최댓값은? [3점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

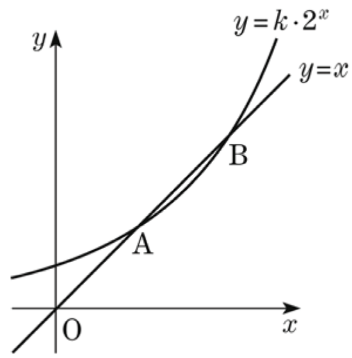
A068
○○○ (2012사관(1차)–문과23)

$0<a<b<1$일 때, 직선 $y=1$이 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_b x$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고 직선 $y=-1$이 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_b x$의 그래프와 만나는 점을 R, S라 하자. 네 직선 PS, PR, QS, QR의 기울기를 각각 α, β, γ, δ라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [4점]

① $\delta<\alpha<\beta<\gamma$ ② $\gamma<\alpha<\delta<\beta$
③ $\gamma<\alpha<\beta<\delta$ ④ $\gamma<\alpha=\delta<\beta$
⑤ $\alpha=\delta<\beta<\gamma$

A069
○○ (2012(6)고2–A형16)

두 함수 $y=k\cdot 2^x$과 $y=x$의 그래프가 그림과 같이 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 점 A가 선분 OB의 중점일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

A070

○○
(2012(6)고2-B형8)

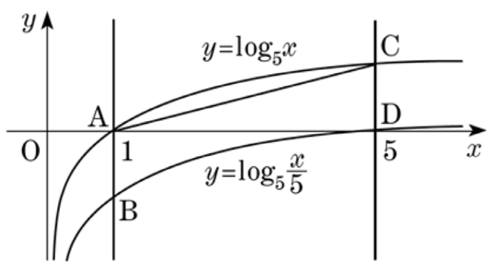
등식 $x^5y^3=5^{15}$을 만족시키는 양의 실수 x, y에 대하여 $m\log_5 x+15\log_5 y$가 일정한 값을 가질 때, 실수 m의 값은? [3점]

① 3　② 5　③ 15
④ 20　⑤ 25

A071

○○
(2012(6)고2-B형16)

그림과 같이 두 곡선 $y=\log_5 x$, $y=\log_5 \frac{x}{5}$가 직선 $x=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또, 두 곡선이 직선 $x=5$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 곡선 $y=\log_5 x$와 두 선분 AD, DC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S, 곡선 $y=\log_5 \frac{x}{5}$와 세 선분 BA, AC, CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 할 때 $S+T$의 값은? [4점]

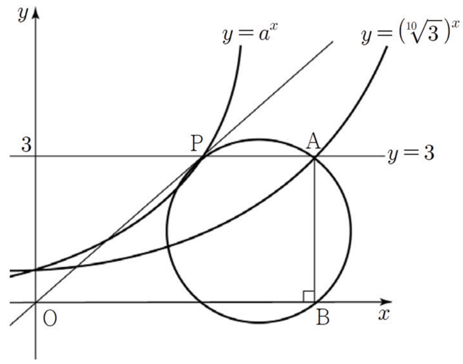


① 4　② 6　③ 8
④ 10　⑤ 12

A072

○○○
(2012(9)고2-A형21)

그림과 같이 지수함수 $y=(\sqrt[10]{3})^x$의 그래프가 직선 $y=3$과 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 두 점 A, B를 지나는 원이 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점 P에서 직선 OP에 접하도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? (단, $a>\sqrt[10]{3}$) [4점]

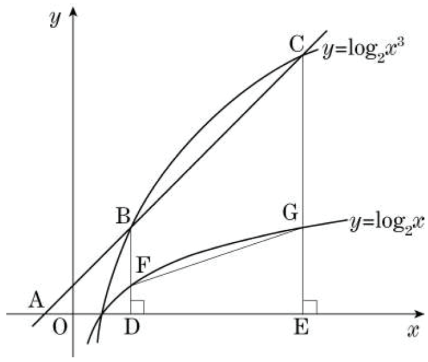


① $3^{\frac{8}{9}}$　② $3^{\frac{10}{9}}$　③ $3^{\frac{13}{9}}$
④ $3^{\frac{16}{9}}$　⑤ $3^{\frac{20}{9}}$

A073

○○○
(2012(3)고3-가형29/나형29)

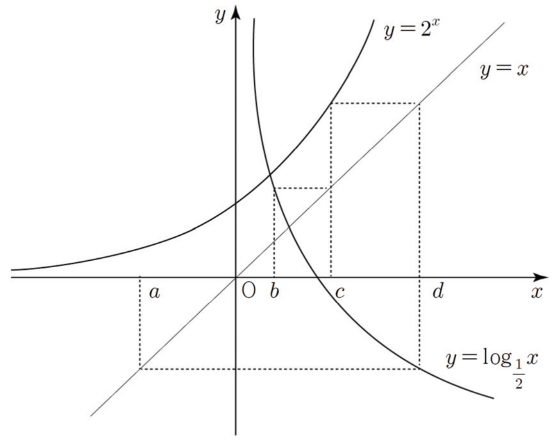
그림과 같이 x축 위의 한 점 A를 지나는 직선이 곡선 $y=\log_2 x^3$과 서로 다른 두 점 B, C에서 만나고 있다. 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 두 선분 BD, CE가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 F, G라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$이고, 삼각형 ADB의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 사각형 BFGC의 넓이를 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 0보다 작다.) [4점]



A074

○○
(2012(9)고2-B형12)

그림은 세 함수 $y=2^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$, $y=x$의 그래프와 $a<0<b<c<d$인 네 실수 a, b, c, d의 관계를 나타낸 것이다. (단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.)



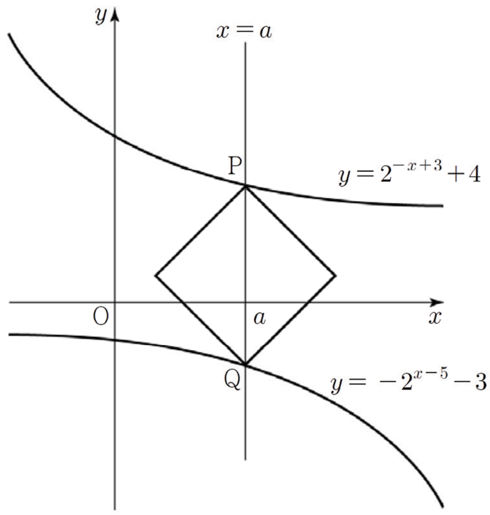
곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$, x축, 그리고 직선 $x=d$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하고 곡선 $y=2^x$, x축, y축, 그리고 직선 $x=c$로 둘러싸인 영역의 넓이를 T라 하자. $a=-3$일 때, $S+T$의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

A075

○○
(2012(9)고2-B형19)

직선 $x=a$와 두 곡선 $y=2^{-x+3}+4$, $y=-2^{x-5}-3$의 교점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ를 대각선으로 하는 정사각형의 넓이의 최솟값은? [4점]



① 32　② 36　③ 40　④ 44　⑤ 48

A076

○○○
(2012(9)고2-A형20)

이차함수 $f(x)=x^2+1$과 두 실수 x_1, x_2에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

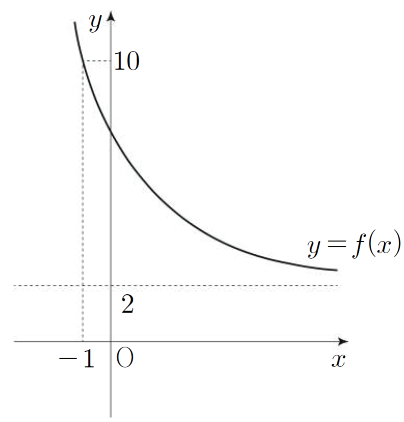
> ㄱ. $0<x_1<x_2$이면 $2^{f(x_1)}<2^{f(x_2)}$이다.
> ㄴ. $x_1<x_2<0$이면 $\log_2 f(x_1)>\log_2 f(x_2)$이다.
> ㄷ. $x_1<0<x_2$이면 $\log_{\frac{1}{2}} f(x_1)<\log_{\frac{1}{2}} f(x_2)$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A077

○○
(2012(4)고3-가형11/나형11)

점근선의 방정식이 $y=2$인 지수함수 $y=2^{2x+a}+b$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 10)$을 지날 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

A078

○○○
(2012(3)고3-나형16)

등식 $2^a=5^b$을 만족시키는 양의 실수 a, b에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $b=\dfrac{1}{2}$이면 $a=\log_4 5$이다.

ㄴ. $2<\dfrac{a}{b}<3$

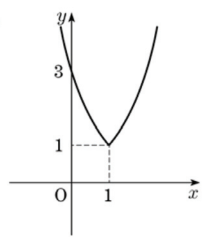
ㄷ. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$은 무리수이다.

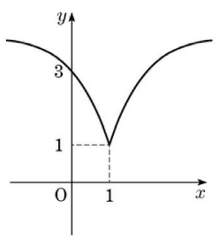
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

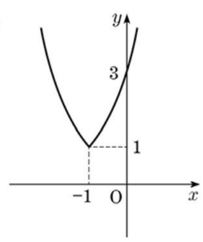
A079

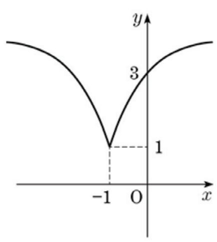
○○
(2012(6)고2-A형12/B형12)

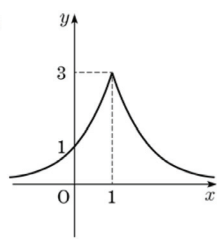
두 함수 $f(x)=x-1$, $g(x)=3^{|x|}$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프의 개형은? [4점]

①


②


③


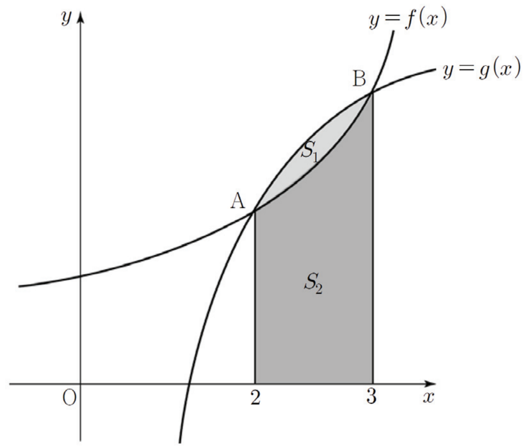
④


⑤


A080

○○○
(2012(9)고2-A형30)

함수 $f(x)=2^{x-2}+1$과 $g(x)=\log_2(x-1)+2$의 그래프가 두 점 A$(2,\ f(2))$, B$(3,\ f(3))$에서 만난다. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하고, 함수 $f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=2$, $x=3$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+2S_2의 값을 구하시오. [4점]



이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

1	②	2	①	3	3	4	④	5	6
6	①	7	①	8	①	9	①	10	①
11	③	12	16	13	10	14	②	15	③
16	③	17	⑤	18	②	19	①	20	④
21	②	22	①	23	④	24	③	25	⑤
26	④	27	③	28	②	29	⑤	30	④
31	②	32	③	33	②	34	⑤	35	③
36	⑤	37	②	38	③	39	③	40	⑤
41	64	42	⑤	43	81	44	②	45	46
46	⑤	47	⑤	48	③	49	17	50	③
51	⑤	52	②	53	④	54	②	55	①
56	②	57	⑤	58	①	59	25	60	19
61	②	62	25	63	④	64	4	65	⑤
66	③	67	③	68	②	69	③	70	⑤
71	②	72	②	73	24	74	⑤	75	①
76	③	77	②	78	③	79	①	80	5
81	⑤	82	③	83	6	84	10	85	4
86	④	87	②	88	9	89	③	90	④
91	②	92	⑤	93	16	94	31	95	②
96	④	97	③	98	②	99	35	100	25
101	①	102	③	103	④	104	⑤	105	①
106	40	107	④	108	③	109	193	110	③
111	②	112	28	113	16	114	⑤	115	16
116	⑤	117	②	118	127	119	⑤	120	①
121	7	122	②	123	12	124	①	125	⑤
126	①	127	64	128	12	129	②	130	⑤
131	60	132	11	133	75	134	54	135	5
136	②	137	①	138	②	139	④	140	⑤
141	②	142	⑤	143	⑤	144	45	145	24
146	⑤	147	②	148	12	149	75	150	①
151	①	152	12	153	⑤	154	③	155	973
156	①	157	①	158	②	159	③	160	20
161	④	162	③	163	①	164	15	165	③
166	③	167	217	168	②	169	16	170	4
171	②	172	③	173	⑤				

B 삼각함수

1	④	2	③	3	①	4	②	5	④
6	35	7	192	8	④	9	①	10	⑤
11	②	12	13	13	②	14	⑤	15	50
16	②	17	③	18	①	19	④	20	10
21	③	22	⑤	23	①	24	⑤	25	④
26	150	27	⑤	28	⑤	29	③	30	103
31	②	32	50	33	④	34	②	35	②
36	④	37	30	38	①	39	①	40	②
41	③	42	10	43	9	44	④	45	③
46	②	47	⑤	48	5	49	⑤	50	192
51	10	52	8	53	①	54	⑤	55	②
56	②	57	⑤	58	①	59	③	60	20
61	50	62	①	63	②	64	14	65	①
66	①	67	110	68	10	69	④	70	49
71	②	72	④	73	③	74	80	75	40
76	④	77	②	78	63	79	⑤	80	480
81	⑤	82	⑤	83	③	84	③	85	④
86	②	87	②	88	13	89	686	90	④
91	②	92	15	93	7	94	27	95	②
96	27	97	③	98	③	99	36	100	④
101	84	102	⑤	103	7	104	71		

C 수열

1	87	2	⑤	3	④	4	183	5	①
6	⑤	7	105	8	④	9	④	10	③
11	⑤	12	⑤	13	③	14	①	15	⑤
16	②	17	①	18	②	19	⑤	20	②
21	①	22	150	23	①	24	64	25	④
26	⑤	27	324	28	195	29	③	30	⑤
31	⑤	32	②	33	225	34	⑤	35	315
36	④	37	⑤	38	②	39	①	40	496
41	⑤	42	245	43	13	44	③	45	④
46	②	47	271	48	512	49	⑤	50	192
51	②	52	③	53	27	54	①	55	③
56	③	57	②	58	④	59	③	60	③
61	③	62	②	63	544	64	370	65	③
66	603	67	②	68	①	69	⑤	70	⑤
71	④	72	③	73	⑤	74	⑤	75	570
76	①	77	120	78	308	79	④	80	120
81	⑤	82	②	83	①	84	214	85	⑤
86	④	87	②	88	95	89	670	90	675
91	51	92	⑤	93	①	94	④	95	5
96	③	97	33	98	①	99	③	100	⑤
101	①	102	②	103	②	104	252	105	24
106	616	107	11	108	③	109	②	110	⑤
111	②	112	①	113	553	114	42	115	80
116	18	117	③	118	26	119	①	120	①
121	427	122	123	123	235	124	①	125	65
126	200	127	④	128	18	129	8	130	③
131	⑤	132	435	133	16	134	84	135	①
136	9	137	①	138	④	139	③	140	②
141	132	142	26	143	29	144	③	145	27
146	8	147	128	148	67	149	200	150	26
151	④	152	④	153	13	154	⑤	155	142
156	④	157	①	158	64	159	273	160	⑤
161	242	162	477	163	①	164	③	165	13
166	⑤	167	79	168	④	169	④	170	169
171	③	172	①	173	④	174	③	175	525
176	③	177	17	178	164	179	②	180	③
181	③	182	①	183	⑤	184	②	185	①
186	①	187	②	188	10	189	395	190	②
191	282	192	162	193	⑤	194	5	195	①
196	117	197	⑤	198	③	199	①	200	⑤
201	②	202	⑤	203	④	204	513	205	⑤
206	⑤	207	7	208	①	209	②	210	③
211	③	212	29						

해설 목차

수학 I

A 지수함수와 로그함수

1	②	2	①	3	3	4	④	5	6
6	①	7	①	8	①	9	①	10	①
11	③	12	16	13	10	14	②	15	③
16	③	17	⑤	18	②	19	①	20	④
21	②	22	①	23	④	24	③	25	⑤
26	④	27	③	28	②	29	⑤	30	④
31	②	32	③	33	②	34	⑤	35	③
36	⑤	37	②	38	③	39	③	40	⑤
41	64	42	⑤	43	81	44	②	45	46
46	⑤	47	⑤	48	③	49	17	50	③
51	⑤	52	②	53	④	54	②	55	①
56	②	57	⑤	58	①	59	25	60	19
61	②	62	25	63	④	64	4	65	⑤
66	③	67	③	68	②	69	③	70	⑤
71	②	72	②	73	24	74	⑤	75	①
76	③	77	②	78	③	79	①	80	5
81	⑤	82	③	83	6	84	10	85	4
86	④	87	②	88	9	89	③	90	④
91	②	92	⑤	93	16	94	31	95	②
96	④	97	③	98	②	99	35	100	25
101	①	102	③	103	④	104	⑤	105	①
106	40	107	④	108	③	109	193	110	③
111	②	112	28	113	16	114	⑤	115	16
116	⑤	117	②	118	127	119	⑤	120	①
121	7	122	②	123	12	124	①	125	⑤
126	①	127	64	128	12	129	②	130	⑤
131	60	132	11	133	75	134	54	135	5
136	②	137	①	138	②	139	④	140	⑤
141	②	142	⑤	143	⑤	144	45	145	24
146	⑤	147	②	148	12	149	75	150	①
151	①	152	12	153	⑤	154	③	155	973
156	①	157	①	158	②	159	③	160	20
161	④	162	③	163	①	164	15	165	③
166	③	167	217	168	②	169	16	170	4
171	②	172	③	173	⑤				

A001 | 답 ②

[풀이]

$\log_a b = t$, $\log_a c = s$로 두자.

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\log_c b \times \log_b a$

$= \dfrac{\log_a b}{\log_a c} \times \dfrac{1}{\log_a b} = \dfrac{1}{s} = 2$ 즉, $s = \dfrac{1}{2}$

$\log_b c \times \log_c a$

$= \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \times \dfrac{1}{\log_a c} = \dfrac{1}{t} = 3$ 즉, $t = \dfrac{1}{3}$

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\therefore\ \log_c a \times \log_a b$

$= \dfrac{1}{\log_a c} \times \log_a b = \dfrac{t}{s} = \dfrac{2}{3}$

답 ②

A002 | 답 ①

[풀이]

로그의 밑의 변환의 공식과 로그의 성질에 의하여

$\log_a \sqrt{b} = \dfrac{\log_3 \sqrt{b}}{\log_3 a} = \dfrac{\log_3 b}{2\log_3 a}$

$= \dfrac{\log_3 3^y}{2\log_3 9^x} = \dfrac{y\log_3 3}{2x\log_3 9} = \dfrac{y}{4x}$

답 ①

A003 | 답 3

[풀이]

$2^x + 2^{-x} = t$로 두자.

산술기하절대부등식에 의하여

$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x 2^{-x}} = 2$

(단, 등호는 $x = 0$일 때 성립한다.)

주어진 함수는

$y = t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2$

(단, $t \geq 2$)

주어진 함수의 최솟값은 3이다.

이때, $t = 2$이다.

답 3

A004 | 답 ④

[풀이]

자연수 k에 대하여 부등식 $2^{k-1} \le x < 2^k$을 만족시키는 정수 x의 개수는 $\boxed{2^{k-1}}(=2^k-2^{k-1})$이다.

이 $\boxed{2^{k-1}}$ 개의 각각의 x에 대하여

$\log_2 2^{k-1}=k-1$, $\log_2 2^k=k$이므로

(즉, $k-1 \le \log_2 x < k$이므로)

$0 \le y \le \log_2 x$를 만족시키는 정수 y의 개수는 $\boxed{k}$이다.

($\because$ y가 가질 수 있는 값은 $0, 1, 2, \cdots, k-1$이다.)

따라서 $2^{k-1} \le x < 2^k$인 범위에서 순서쌍 (x, y)의 개수는 $\boxed{2^{k-1}} \times \boxed{k}$이다.

그런데 자연수 k는 1부터 $\boxed{10}$ 까지의 값을 취할 수 있으므로 각각의 k값을 대입하여 그 합을 구하면 9217이다.

(가): 2^{k-1}

(나): k

(다): 10

답 ④

A005 | 답 6

[풀이]

k는 제곱수인 동시에 세제곱수인 동시에 네제곱수이다.

2, 3, 4의 최소공배수는 12이므로

$k=2^{12}, 3^{12}, 4^{12}, \cdots$

$p=2^{12}$이므로

$\therefore\ \log_4 p=\log_4 2^{12}=\dfrac{12}{2}=6$

답 6

A006 | 답 ①

[풀이]

로그의 정의에 의하여

$\log_3 x=a$, $\log_3 y=b$, $\log_3 z=c$

로그의 밑의 변환의 공식과 로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \log_x yz+\log_y zx+\log_z xy$

$=\dfrac{\log_3 y+\log_3 z}{\log_3 x}+\dfrac{\log_3 z+\log_3 x}{\log_3 y}+\dfrac{\log_3 x+\log_3 y}{\log_3 z}$

$=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$

$=\dfrac{-a}{a}+\dfrac{-b}{b}+\dfrac{-c}{c}$ ($\because a+b+c=0$)

$=-3$

답 ①

A007 | 답 ①

[풀이]

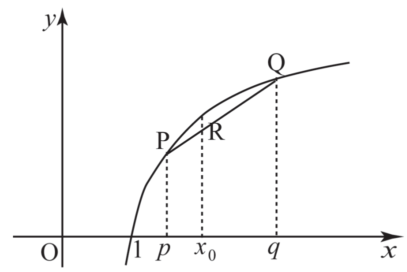
〈증명〉

$pq=\boxed{p+q}$이므로

($\because \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $\dfrac{p+q}{pq}=1$)

$\dfrac{\log_2 p}{p}+\dfrac{\log_2 q}{q}=\dfrac{q\log_2 p+p\log_2 q}{pq}$

$=\dfrac{q\log_2 p+p\log_2 q}{\boxed{p+q}}$ $\cdots$ ㉠



$\overline{PQ}$를 $p:q$로 내분하는 점을 $R(x_0, y_0)$라 하면

$x_0=\dfrac{2pq}{p+q}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}}=\boxed{2}$,

$y_0=\dfrac{q\log_2 p+p\log_2 q}{p+q}$ $\cdots$ ㉡

그런데 곡선 $y=\log_2 x$는 $\boxed{\text{위로 볼록}}$이므로

$y_0 \le \log_2 x_0$이다.

따라서 ㉠, ㉡에서

$\dfrac{q\log_2 p+p\log_2 q}{p+q} \le 1=\log_2 2$

즉, $\dfrac{q\log_2 p+p\log_2 q}{pq} \le 1$

$\therefore\ \dfrac{\log_2 p}{p}+\dfrac{\log_2 q}{q} \le 1$

(가): $p+q$

(나): 2

(다): 위로 볼록

답 ①

A008 | 답 ①

[풀이]

$(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} \times (\sqrt{3})^{\sqrt{2}} - (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \times (\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{2})^{\boxed{\sqrt{2}}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\{(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-(\sqrt{3})^{\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}\}$

(이때, 우변을 전개하여 좌변과 비교하면 된다.)

그런데 $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\boxed{<}(\sqrt{3})^{\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$이고

$(\because \sqrt{2}<\sqrt{3})$

$(\sqrt{2})^{\boxed{\sqrt{2}}}>0$, $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}>0$이므로

$(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}-(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}\boxed{<}0$

$\therefore\ (\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\boxed{<}(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

(가): $\sqrt{2}$

(나): $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(다): $<$

답 ①

A009 | 답 ①

[풀이]

지수함수 $y=10^x$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 함수

$y=10^{x-k}$

의 그래프와 일치한다.

로그함수 $y=\log x$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 함수

$y=\log x+k$

의 그래프와 일치한다.

$y=10^{x-k}$을 x에 대하여 풀면

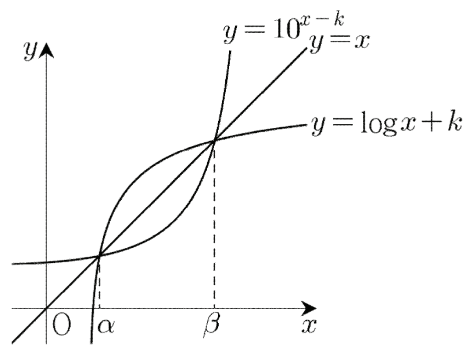
$x=\log y+k$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log x+k$

이므로 두 함수 $y=10^{x-k}$와 $y=\log x+k$는 서로 역함수이다.

두 함수 $y=10^{x-k}$와 $y=\log x+k$는 증가함수이므로, 두 함수의 그래프가 만나는 두 점은 모두 직선 $y=x$ 위에 있다. 이 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라고 하자. (단, $\alpha<\beta$)



문제에서 주어진 조건에 의하여 두 점 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$ 사이의 거리는 $\sqrt{2}$이므로 두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}$

정리하면

$\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}$ 즉, $\beta-\alpha=1$ $\cdots$ ㉠

두 점 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$는 모두 곡선 $y=\log x+k$ 위에 있으므로

$\alpha=\log\alpha+k$, $\beta=\log\beta+k$ $\cdots$ ㉡

위의 두 식을 변변히 빼서 정리하면

$\beta-\alpha=\log\dfrac{\beta}{\alpha}$

즉, $\log\dfrac{\beta}{\alpha}=1$에서 $\beta=10\alpha$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 연립하면

$\alpha=\dfrac{1}{9}$, $\beta=\dfrac{10}{9}$

이를 ㉡에 대입하면

$\dfrac{1}{9}=\log\dfrac{1}{9}+k$

정리하면

$\therefore\ k=\dfrac{1}{9}+2\log 3$

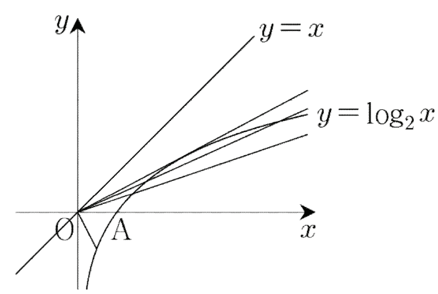
답 ①

A010 | 답 ①

[풀이]

$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{P}(x,\ \log_2 x)$, $\mathrm{Q}(x,\ \log_2(x+1))$으로 두자.

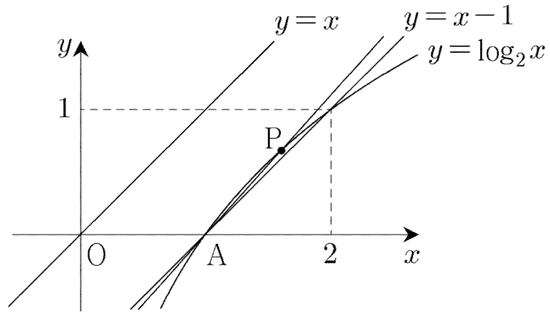
▸ ㄱ. (참)



위의 그림에서 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 임의의 점 P에 대하여 직선 OP의 기울기는 1보다 작다.

즉, $\dfrac{\log_2 x-0}{x-0}<1$, $\dfrac{\log_2 x}{x}<1$

▸ ㄴ. (거짓)



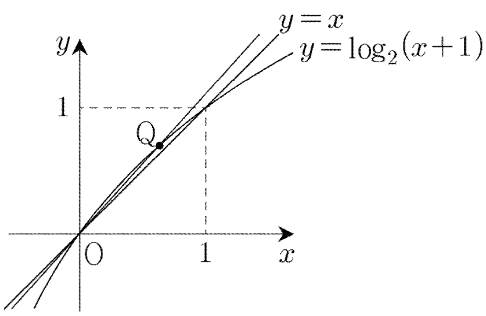
위의 그림처럼 점 P의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작으면 직선 AP의 기울기가 1보다 크다.

즉, $1 < x < 2$이면 $\dfrac{\log_2 x - 0}{x-1} > 1$, $\dfrac{\log_2 x}{x-1} > 1$

따라서 보기 ㄴ에서 주어진 부등식은 항상 성립하는 것이 아니다.

▸ ㄷ. (거짓)

곡선 $y=\log_2 x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 일치한다.



위의 그림처럼 점 Q의 x좌표가 0보다 크고 1보다 작으면 직선 OQ의 기울기가 1보다 크다.

즉, $0 < x < 1$이면 $\dfrac{\log_2(x+1) - 0}{x} > 1$,

$\dfrac{\log_2(x+1)}{x} > 1$

따라서 보기 ㄷ에서 주어진 부등식은 항상 성립하는 것이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

A011 | 답 ③

[풀이]

$2 < x < 8 \Leftrightarrow 3\log_2 x > x+1$,

$\log_2 x^3 > x+1$, $x^3 > 2^{x+1}$

이제 $x = t+1$로 두면

$1 < t < 7 \Leftrightarrow 2^{t+2} < (t+1)^3$

$\therefore\ \alpha = 1,\ \beta = 7,\ \alpha+\beta = 8$

답 ③

A012 | 답 16

[풀이]

$3 = 2^{\frac{a}{2}}$, $5 = 3^{\frac{b}{3}}$이므로 $5 = 2^{\frac{ab}{6}}$

$\therefore\ 5^c = 2^{\frac{abc}{6}} = 2^{\frac{24}{6}} = 2^4 = 16$

답 16

A013 | 답 10

[풀이]

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 모두 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$f(1)=4,\ g(1)=4$

역함수의 성질에 의하여

$f^{-1}(4)=1,\ g^{-1}(4)=1$

이므로

$f^{-1}(4) = \log_4(4+p)+q = 1$ $\cdots$ ㉠

$g^{-1}(4) = \log_{\frac{1}{2}}(4+p)+q = 1$

위의 두 식을 변변히 빼면

$\log_4(4+p) - \log_{\frac{1}{2}}(4+p) = 0$

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\dfrac{1}{2}\log_2(4+p) + \log_2(4+p) = 0$

정리하면

$\log_2(4+p) = 0$

로그의 정의에 의하여

$4+p = 2^0 = 1$이므로 $p=-3$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$q=1$

$\therefore\ p^2+q^2 = 10$

답 10

A014 | 답 ②

[풀이]

$2^{\frac{x}{2}} = t$로 두자. 이때, $t>0$이다.

문제에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$2t^2 - 4t \geq -a$(단, $t>0$)

$t>0$일 때,

$2t^2-4t=2(t-1)^2-2\geq -2$

(단, 등호는 $t=1$일 때 성립한다.)

이므로

$-a\leq -2$ 즉, $a\geq 2$이어야 한다.

답 ②

A015 | 답 ③

[풀이]

곡선 $y=\log_3 x$의 x절편이 1이므로 $\mathrm{A}(1,\ 0)$이다.

두 점 O, A를 평행이동시킨 점을 각각 O′, A′라고 하면

$\mathrm{O}'(3,\ 2)$, $\mathrm{A}'(4,\ 2)$

곡선 $y=\log_3(x+a)$가 선분 O′A′와 만나려면

$\log_3(3+a)\leq 2$, $\log_3(4+a)\geq 2$

이어야 한다. 각각을 풀면

$a\leq 6$, $a\geq 5$, 즉 $5\leq a\leq 6$

따라서 구하는 값은 11이다.

답 ③

A016 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$(a,\ b)\in A$이면 $b=\log_3 a$이므로

$b+1=\log_3 a+1=\log_3 3a$에서

$(3a,\ b+1)\in A$

▸ ㄴ. (거짓)

$\left(\dfrac{a}{3},\ b\right)\in A$이면 $b=\log_3\dfrac{a}{3}$이므로

$b-1=\log_3\dfrac{a}{3}-1=\log_3\dfrac{a}{9}$에서

$\left(\dfrac{a}{9},\ b-1\right)\in A$

왜냐하면 $\dfrac{a}{9}=a$이면 $a=0$인데, 이는 a가 양수라는 조건에 맞지 않는다.

(물론 $(a,\ b+1)\in A$임을 보여도 좋다.)

▸ ㄷ. (참)

$(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in A$이면

$b=\log_3 a$, $d=\log_3 c$에서 $b+d=\log_3 ac$이므로

$(ac,\ b+d)\in A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A017 | 답 ⑤

[풀이]

$2^x=t$로 두면 문제에서 주어진 방정식은

$t^2-2at+(a-3)(a+2)=0$ (단, $t>0$)

t에 대한 이차방정식의 서로 다른 두 양의 실근을 각각 α, β라고 하자.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a>0$에서 $a>0$

$\alpha\beta=(a-3)(a+2)>0$에서 $a<-2$ 또는 $a>3$

a에 대한 연립부등식을 풀면

$\therefore\ a>3$

답 ⑤

A018 | 답 ②

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$\log_3 18=\log_3 2\times 3^2=2+\log_3 2$

이므로 $p=2+\log_3 2$

로그의 성질과 로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\therefore\ \log_2 54=\log_2 2\times 3^3=1+3\log_2 3$

$=1+\dfrac{3}{\log_3 2}=1+\dfrac{3}{p-2}=\dfrac{p+1}{p-2}$

답 ②

A019 | 답 ①

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

로그의 밑의 조건을 생각하자.

$a^2-a+2=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$이고,

방정식 $a^2-a+2=1$은 실근을 갖지 않으므로

$\left(\because a^2-a+1=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0\right)$

로그의 밑의 조건을 만족시킨다.

로그의 진수의 조건을 생각하자.

$a^2+1>0$이므로

로그의 진수의 조건을 만족시킨다.

▸ ㄴ. (거짓)

로그의 밑의 조건을 생각하자.

$2|a|+1>0$이지만,
방정식 $2|a|+1=1$은 실근 $a=0$을 가지므로
로그의 밑의 조건을 만족시키지 않는다.
‣ ㄷ. (거짓)
로그의 진수의 조건을 생각하자.
$a^2-2a+1=(a-1)^2 \geq 0$이므로
$a=1$이면 진수가 0이다.
즉, $a=1$은 로그의 진수의 조건을 만족시키지 않는다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.
답 ①

A020 ㅣ답 ④

[풀이]
지수법칙에 의하여
$-\frac{8}{n}$이 정수가 되는 정수 n은 -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8이다.
그런데 n이 1, 2, 4, 8이면 x는 자연수가 아니고, n이 -8, -4, -2, -1이면 x는 자연수이다.
$n=-8$일 때, $x=2$
$n=-4$일 때, $x=4$
$n=-2$일 때, $x=16$
$n=-1$일 때, $x=256$
따라서 구하는 경우의 수는 4이다.
답 ④

A021 ㅣ답 ②

[풀이]
로그의 밑의 조건에서
$|x|>0$(즉, $x \neq 0$),
$|x| \neq 1$(즉, $x \neq -1$, $x \neq 1$)
로그의 진수의 조건에서
$(x+3)(5-x)>0$
풀면
$-3<x<5$
정수 x는 -2, 2, 3, 4이다.
답 ②

A022 ㅣ답 ①

[풀이]
$100=2^2 5^2$이므로 100의 양의 약수를 모두 쓰면
$2^0 \times 5^0$, $2^1 \times 5^0$, $2^2 \times 5^0$,
$2^0 \times 5^1$, $2^1 \times 5^1$, $2^2 \times 5^1$,
$2^0 \times 5^2$, $2^1 \times 5^2$, $2^2 \times 5^2$
로그의 성질에 의하여
$\therefore \ \log a_1+\log a_2+\log a_3+ \cdots +\log a_9$
$=\log a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_9$
$=\log 2^{3(0+1+2)} \times 5^{3(0+1+2)}$
$=\log 10^9=9$
답 ①

A023 ㅣ답 ④

[풀이]
$\log_2 a=A$, $\log_2 b=B$, $\log_2 c=C$
로 두자.
이때, $a>1$, $b>1$, $c>1$이므로
$A>0$, $B>0$, $C>0$이다.
첫 번째 등식을 변형하자.
로그의 성질에 의하여
$\log_2 a^2 b^3=2\log_2 a+3\log_2 b$
$=2A+3B=6$ $\cdots$㉠
두 번째 등식을 변형하자.
로그의 성질에 의하여
$$3\left(\frac{\log_2 c}{\log_2 a}\right)^2-2\left(\frac{\log_2 c}{\log_2 b}\right)^2=-\left(\frac{\log_2 c}{\log_2 a}\right)\left(\frac{\log_2 c}{\log_2 b}\right)$$
$$\frac{3C^2}{A^2}-\frac{2C^2}{B^2}=-\frac{C^2}{AB}$$
양변을 $C^2(\neq 0)$으로 나누면
$$\frac{3}{A^2}-\frac{2}{B^2}=-\frac{1}{AB}$$
양변에 $A^2B^2(\neq 0)$을 곱하면
$3B^2-2A^2=-AB$
변형하면
$3B^2+AB-2A^2=0$, $(3B-2A)(B+A)=0$
풀면
$B=\frac{2}{3}A$ $(\because B \neq -A)$ $\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하면
$A=\frac{3}{2}$, $B=1$

로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \log_2 ab = \log_2 a + \log_2 b = A + B = \dfrac{5}{2}$

답 ④

A024 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

거듭제곱근의 성질에 의하여

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{a}}} = \sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$

$= \sqrt{\dfrac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}} = \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$

▸ ㄴ. (거짓)

$(\sqrt[3]{a})^4 = \sqrt[3]{a^4} \neq \sqrt[12]{a}$

예를 들어 $a = 8$일 때,

$(\sqrt[3]{a})^4 = 16 \neq \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{a}$

($\because$ 유리수가 무리수일 수 없다. 이 역도 성립한다.)

▸ ㄷ. (참)

$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^4}\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^5}} = \sqrt[6]{a^5}$

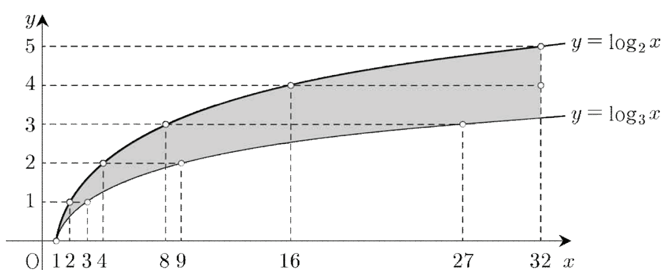
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A025 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 영역을 좌표평면에 표현하면 다음과 같다.



y좌표가 1인 격자점의 개수: $3^1 - 2^1 - 1 = 0$

y좌표가 2인 격자점의 개수: $3^2 - 2^2 - 1 = 4$

y좌표가 3인 격자점의 개수: $3^3 - 2^3 - 1 = 18$

y좌표가 4인 격자점의 개수: $32 - 2^4 - 1 = 15$

따라서 구하는 값은 $0 + 4 + 18 + 15 = 37$이다.

답 ⑤

A026 | 답 ④

[풀이]

역함수의 성질에 의하여

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

즉, $g(x) = \log_a x$ (단, $a > 1$)

문제에서 주어진 그림에서

$a^p = 2$, $a^q = 3$, 즉 $p = \log_a 2$, $q = \log_a 3$

$\therefore\ g(12) = \log_a 12 = 2\log_a 2 + \log_a 3 = 2p + q$

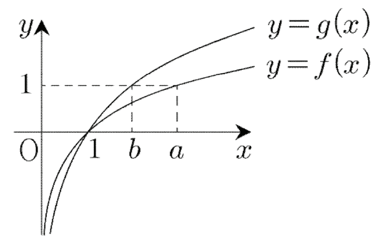
답 ④

A027 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

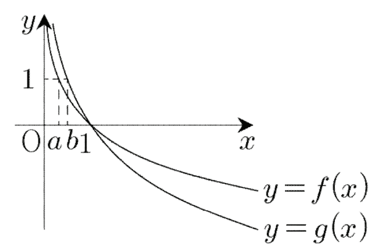
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0 < x < 1$에서 $f(x) > g(x)$이다.

▸ ㄴ. (거짓)

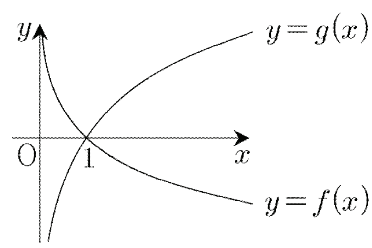
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0 < x < 1$에서 $f(x) < g(x)$이다.

▸ ㄷ. (참)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0 < x < 1$에서 $f(x) > g(x)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A028 | 답 ②

[풀이]

이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=p^2-4q\geq 0$ $\cdots$㉠

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$

로그의 성질에 의하여

$\log_2(\alpha+\beta)=\log_2\frac{\alpha\beta}{2}$,

$\log_2(-p)=\log_2\frac{q}{2}$, 즉

$-p=\frac{q}{2},\ q=-2p$ (단, $p<0,\ q>0$) $\cdots$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$p^2+8p\geq 0 \Leftrightarrow p\leq -8(\because p<0)$

$q-p=-3p$이므로

$\therefore\ q-p\geq 24$

답 ②

A029 | 답 ⑤

[풀이]

$2^x=t(x>0)$로 두면 $x=\log_2 t$이므로

$f(t)=-\log_3(\log_2 t)$ (단, $t>1$)

$t(>1)$가 증가할 때, 양수 $\log_2 t$는 증가하므로

$f(t)$는 감소한다.

그런데 $f(2)=0$이므로 곡선 $y=f(t)$의 x절편은 2이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 ⑤와 같이 그려진다.

답 ⑤

A030 | 답 ④

[풀이]

지수법칙에 의하여

$$\sqrt{\frac{2^a\cdot 5^b}{2}}=2^{\frac{a-1}{2}}5^{\frac{b}{2}},\ \sqrt[3]{\frac{2^a\cdot 5^b}{5}}=2^{\frac{a}{3}}5^{\frac{b-1}{3}}$$

위의 두 수가 모두 자연수이어야 하므로

네 수

$2^{\frac{a-1}{2}},\ 2^{\frac{a}{3}},\ 5^{\frac{b}{2}},\ 5^{\frac{b-1}{3}}$

는 모두 자연수이다.

a는 홀수이면서 3의 배수이므로 a의 최솟값은 3이다.

b는 짝수이면서 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수이므로 b의 최솟값은 4이다.

따라서 $a+b$의 최솟값은 7이다.

답 ④

A031 | 답 ②

[풀이]

지수법칙에 의하여

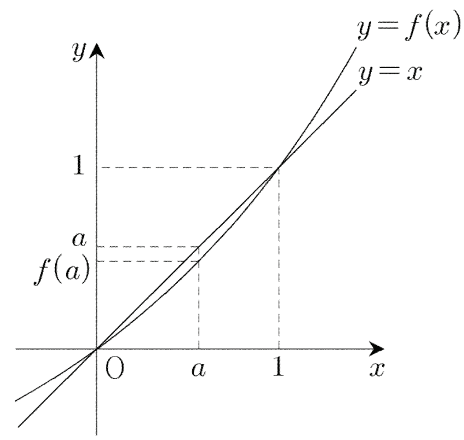
$$a^2b\times\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}=a^2b\times a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=a^{2-\frac{1}{3}}b^{1+\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{3}}$$

답 ②

A032 | 답 ③

[풀이]

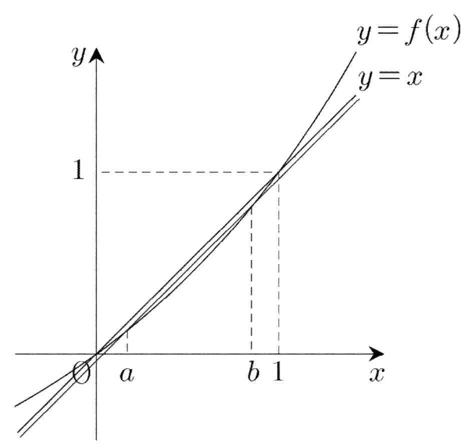
▸ ㄱ. (참)



위의 그림에서

$0<a<1$이면 $f(a)<a$

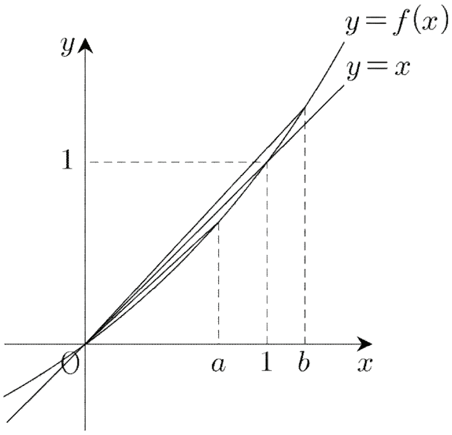
▸ ㄴ. (거짓)



위의 그림처럼 $\frac{2^b-1-(2^a-1)}{b-a}=1$인 두 양의 실수 $a,\ b$ $(a<b<1)$가 존재한다.

이때, $2^b - 2^a = b - a$이므로 보기에서 주어진 부등식이 항상 성립하는 것은 아니다.

▸ ㄷ. (참)



위의 그림처럼

$0 < a < b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$\dfrac{2^a - 1}{a} < \dfrac{2^b - 1}{b}$

양변에 $ab(>0)$을 곱하면

$\therefore\ b(2^a - 1) < a(2^b - 1)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A033 | 답 ②

[풀이]

$f(m) = \log_a m = 2$, $a^2 = m$

$f(n) = \log_a n = 3$, $a^3 = n$

역함수의 성질에 의하여

$f^{-1}(7) = k$로 두면 $f(k) = 7$

$\log_a k = 7$에서 $a^7 = k$

$\therefore\ k = a^7 = a^{2\times 2+3} = (a^2)^2 a^3 = m^2 n$

답 ②

A034 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

점 $(d,\ c)$는 곡선 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 위에 있으므로

$c = \left(\dfrac{1}{2}\right)^d$

▸ ㄴ. (참)

점 $(e,\ d)$는 곡선 $y = \log_2 x$ 위에 있고,

점 $(a,\ e)$는 곡선 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 위에 있으므로

$d = \log_2 e$, $e = \left(\dfrac{1}{2}\right)^a (\Leftrightarrow a = -\log_2 e)$

$\therefore\ a + d = 0$

▸ ㄷ. (참)

$ce = \left(\dfrac{1}{2}\right)^d \left(\dfrac{1}{2}\right)^a = 2^{-(a+d)} = 1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A035 | 답 ③

[풀이]

지수법칙을 적용하여 문제를 해결하자.

▸ ㄱ. (참)

$\sqrt[n]{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{n}} = a^2$

▸ ㄴ. (거짓)

$\sqrt[n]{a}\sqrt[2n]{a} = a^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{2n}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}} = a^{\frac{3}{2n}} = \sqrt[2n]{a^3}$

그런데 모든 자연수 n에 대하여

$\sqrt[2n]{a^3}$와 $\sqrt[3n]{a}$가 같은 것은 아니므로

$\therefore\ \sqrt[n]{a}\sqrt[2n]{a} \neq \sqrt[3n]{a}$

(예를 들어 $n = 2$, $a = 2^{12}$이면

$\sqrt[n]{a}\sqrt[2n]{a} = \sqrt[2n]{a^3} = 2^9$, $\sqrt[3n]{a} = 2^2$이다.)

▸ ㄷ. (참)

$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n+1]{a}$

$= a^{\frac{1}{n}} \div a^{\frac{1}{n+1}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} = a^{\frac{1}{n(n+1)}}$

$= \sqrt[n(n+1)]{a}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A036 | 답 ⑤

[풀이]

우선 아래의 항등식을 만족시키는 두 상수 m, n의 값을 결정하자.

$m(x+2y) + n(x-y) = x + y$

정리하면

$(m+n)x + (2m-n)y = x + y$

$m + n = 1$, $2m - n = 1$

m, n에 대한 연립방정식을 풀면

$m=\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$

지수법칙에 의하여

$\therefore\ 2^{x+y}=(2^{x+2y})^{\frac{2}{3}}\times(2^{x-y})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$

$=\sqrt[3]{a^2b}$

답 ⑤

A037 | 답 ②

[풀이]

거듭제곱근의 성질과 유리수 지수의 정의에 의하여

$b=a^{\frac{1}{2}}$, $c=a^{\frac{1}{3}}$

로그의 밑의 변환의 공식과 로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \log_a b+\log_b c+\log_c a$

$=\frac{\log b}{\log a}+\frac{\log c}{\log b}+\frac{\log a}{\log c}$

$=\frac{\log a^{\frac{1}{2}}}{\log a}+\frac{\log a^{\frac{1}{3}}}{\log a^{\frac{1}{2}}}+\frac{\log a}{\log a^{\frac{1}{3}}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{3}}=\frac{25}{6}$

답 ②

A038 | 답 ③

[풀이]

집합 A에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$2^{x(x-3a)}<2^{a(x-3a)}$

밑이 1보다 크므로

$x(x-3a)<a(x-3a)$

정리하면

$(x-a)(x-3a)<0$

풀면

$a>0$일 때, $a<x<3a$ $\cdots$ ㉠

$a<0$일 때, $3a<x<a$ $\cdots$ ㉡

$a=0$일 때, 부등식은 $x^2<0$이고, 이를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않는다. 왜냐하면 모든 실수 x에 대하여 $x^2\geq 0$이기 때문이다.

따라서 $A=\varnothing$이다. $\cdots$ ㉢

집합 B에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$\log_3(x^2-2x+6)<\log_3 9$

밑이 1보다 크므로

$x^2-2x+6<9$ 즉, $x^2-2x-3<0$

좌변을 인수분해하면

$(x-3)(x+1)<0$

풀면

$-1<x<3$ $\cdots$ ㉣

한편 아래의 필요충분조건이 성립한다.

$A\cap B=A \Leftrightarrow A\subset B$

㉠과 ㉣에서 $-1\leq a$, $3a\leq 3$

정리하면 $0<a\leq 1(\because a>0)$

㉡과 ㉣에서 $-1\leq 3a$, $a\leq 3$

정리하면 $-\frac{1}{3}\leq a<0(\because a<0)$

㉢과 ㉣에서 $a=0$이고, $\varnothing=A\subset B$

따라서 a의 범위는

$-\frac{1}{3}\leq a\leq 1$

답 ③

A039 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$\frac{a}{b}>1$이므로 임의의 양수 n에 대하여

$\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n>1\ \therefore\ f(n)>g(n)$

▸ ㄴ. (거짓)

(반례)

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$, $n=2$이면

$f(n)=\frac{1}{4}$, $g(-n)=8$

이므로 $f(n)<g(-n)$이다.

하지만 $a<1$이다.

▸ ㄷ. (참)

$f(n)=g(-n) \Leftrightarrow a^n=b^{-n} \Leftrightarrow a=b^{-1}$

$\Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}}=b^{-\frac{1}{n}} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=g\left(-\frac{1}{n}\right)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A040 | 답 ⑤

[풀이]

점 P의 좌표를 $(t,\ 2t)$로 두면

$A(t,\ 4^t),\ B(2^{2t},\ 2t)$

이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times t\times(4^t-2t)$

$S_2=\frac{1}{2}\times(2^{2t}-t)\times(4^t-2t)$

$S_3=\frac{1}{2}\times 2t\times(2^{2t}-t)$

$S_1:S_3=3:7$이므로

$\frac{4^t-2t}{2(4^t-t)}=\frac{3}{7}$, 즉 $4^t=8t$

$S_1:S_2=3:k$이므로

$k=\frac{3S_2}{S_1}=\frac{3\times(4^t-t)}{t}=21$

답 ⑤

A041 | 답 64

[풀이] ★

방정식 $x^4=k(>0)$의 네 근 중에서 실수인 두 근은 각각

$-\sqrt[4]{k}\,(=b),\ \sqrt[4]{k}\,(=a)$

방정식 $x^3=k(>0)$의 실근은

$\sqrt[3]{k}\,(=c)$

방정식 $x^3=-k(<0)$의 실근은

$\sqrt[3]{-k}\,(=-\sqrt[3]{k}=d)$

정리하면

$a=\sqrt[4]{k},\ b=-\sqrt[4]{k},\ c=\sqrt[3]{k},\ d=-\sqrt[3]{k}$

문제에서 주어진 등식에 대입하면

$\log_2\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{k}}=\log_2\frac{-\sqrt[4]{k}}{-\sqrt[3]{k}}+1$

지수법칙에 의하여

$\log_2 k^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=\log_2 k^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}+1$

로그의 성질에 의하여

$\frac{1}{12}\log_2 k=-\frac{1}{12}\log_2 k+1$

정리하면

$\log_2 k=6$

로그의 정의에 의하여

$\therefore\ k=2^6=64$

답 64

A042 | 답 ⑤

[풀이]

로그의 성질에 의하여

$\log_a a^2\sqrt[5]{b}=2\log_a a+\frac{1}{5}\log_a b$

$=2+\frac{1}{5}\log_a b=0$에서

$\log_a b=-10$

로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \log_a\frac{1}{ab}$

$=-\log_a a-\log_a b=-1-(-10)=9$

답 ⑤

A043 | 답 81

[풀이]

$ab=12,\ bc=8$을 연립하면

$\frac{ab}{bc}=\frac{12}{8}$에서 $\frac{a}{c}=\frac{3}{2}$

지수법칙에 의하여

$\therefore\ 4^c=4^{\frac{2}{3}a}=(2^a)^{\frac{4}{3}}=3^{3\times\frac{4}{3}}=3^4=81$

답 81

A044 | 답 ②

[풀이]

$x<a$일 때, $f(x)<f(a)$(양수)이므로

함수 $y=2^{f(x)}$는 증가하고, 이 함수의 그래프는 x축을 점근선으로 한다.

$a\le x<0$일 때, $f(0)=0<f(x)\le f(a)$(양수)이므로

함수 $y=2^{f(x)}$는 감소한다.

$x>0$일 때, $f(x)>0=f(0)$이므로

함수 $y=2^{f(x)}$는 증가한다.

따라서 함수 $y=2^{f(x)}$의 그래프는 ②와 같다.

답 ②

A045 | 답 46

[풀이]

문제에서 주어진 집합의 원소만을 모두 쓰면

2^1, 2^2, 2^3, $\cdots$, 2^{20}

$a=2^m$, $b=2^n$으로 두자. (단, m, n은 20 이하의 자연수이고, $m \neq n$이다.)

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\log_a b = \log_{2^m} 2^n = \frac{n}{m}$ (=정수)

$m=1$: $n=2$, 3, 4, $\cdots$, 20 (19개)

$m=2$: $n=4$, 6, 8, $\cdots$, 20 (9개)

$m=3$: $n=6$, 9, 12, $\cdots$, 18 (5개)

$m=4$: $n=8$, 12, $\cdots$, 20 (4개)

$m=5$: $n=10$, 15, 20 (3개)

$m=6$: $n=12$, 18 (2개)

$m=7$: $n=14$ (1개)

$m=8$: $n=16$ (1개)

$m=9$: $n=18$ (1개)

$m=10$: $n=20$ (1개)

$m \geq 11$: 만족하는 n의 값은 없다. (0개)

따라서 구하는 경우의 수는

$19+9+5+4+3+2+1+1+1+1=46$

답 46

A046 | 답 ⑤

[풀이] ★

-2의 제곱근 중에서 실수는 없다.

-1의 제곱근 중에서 실수는 없다.

1의 제곱근 중에서 양의 실수는 1이다.

2의 제곱근 중에서 양의 실수는 $\sqrt{2}$이다.

집합 A는

$A=\{1, \sqrt{2}\}$

-2의 세제곱근 중에서 실수는 $-\sqrt[3]{2}$이다.

-1의 세제곱근 중에서 실수는 -1이다.

1의 세제곱근 중에서 실수는 1이다.

2의 세제곱근 중에서 실수는 $\sqrt[3]{2}$이다.

집합 B는

$B=\{-\sqrt[3]{2}, -1, 1, \sqrt[3]{2}\}$

집합 $A \cup B$는

$A \cup B$

$=\{-\sqrt[3]{2}, -1, 1, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}\}$

이므로 구하는 값은

$2^{2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{6}}$

답 ⑤

A047 | 답 ⑤

[풀이]

a^2은 $x^3=b$의 실근이므로

$(a^2)^3=b$

c^3은 $x^4=b$의 실근이므로

$(c^3)^4=b$

로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \frac{q}{p}=\log_a(a^2)^3+\log_{(c^3)^4}c$

$=\log_a a^6+\log_{c^{12}}c$

$=6+\frac{1}{12}=\frac{73}{12}$

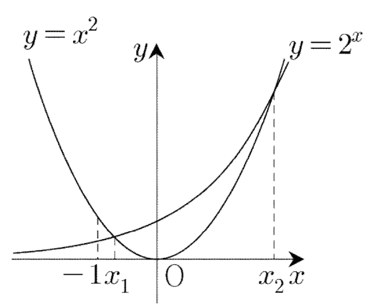
$\therefore\ p+q=85$

답 ⑤

A048 | 답 ③

[풀이]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



▸ ㄱ. (참)

$-1<x_1<0$, $x_2=2$이므로

$x_1+x_2>0$

▸ ㄴ. (거짓)

$-1<x_1y_1=x_1^3<0$이고,

$x_2y_2=2\times4=8$이므로

$x_1y_1+x_2y_2>0$

▸ ㄷ. (참)

$|x_1y_2|-|x_2y_1|$

$=|x_1x_2^2|-|x_2x_1^2|$

$=|x_1x_2|(|x_2|-|x_1|)>0$

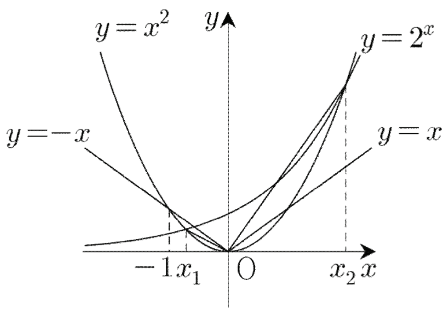
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고]

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 보여도 좋다.

▸ ㄷ. (참)



$|x_1y_2|-|x_2y_1|$

$=|x_1x_2|\left(\left|\dfrac{y_2}{x_2}\right|-\left|\dfrac{y_1}{x_1}\right|\right)>0$

왜냐하면 위의 그림에서 두 점 $(0,\ 0)$, $(x_1,\ y_1)$을 잇는 직선의 기울기의 절댓값은 1보다 작고,

두 점 $(0,\ 0)$, $(x_2,\ y_2)$를 잇는 직선의 기울기는 1보다 크기 때문이다.

A049 | 답 17

[풀이]

지수법칙에 의하여

$$\left\{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6$$

$$=\left(\sqrt{\frac{a^3}{a^{\frac{4}{3}}}}\times\sqrt{a^4}\right)^6$$

$$=\left(a^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{4}{3}\right)}\times a^{\frac{4}{2}}\right)^6$$

$$=a^{6\left(\frac{5}{6}+2\right)}=a^{17}$$

$\therefore\ k=17$

답 17

A050 | 답 ③

[풀이]

진수의 조건에 의하여

$x>0,\ 2x-3y>0\left(\dfrac{x}{y}>\dfrac{3}{2}\right),\ y>0$

로그의 성질에 의하여

$$\log 3x=\log\frac{(2x-3y)^2}{y}$$

로그방정식을 풀면

$$3x=\frac{(2x-3y)^2}{y}$$

정리하면

$4x^2-15xy+9y^2=0$

양변을 $y^2(\neq 0)$으로 나누면

$$4\left(\frac{x}{y}\right)^2-15\frac{x}{y}+9=0$$

$\dfrac{x}{y}=t$로 두면

$4t^2-15t+9=0$

좌변을 인수분해하면

$(4t-3)(t-3)=0$

풀면

$t=3$

$\left(\because\ t=\dfrac{3}{4}<\dfrac{3}{2}\text{이므로 } t=\dfrac{3}{4}\text{은 해가 될 수 없다.}\right)$

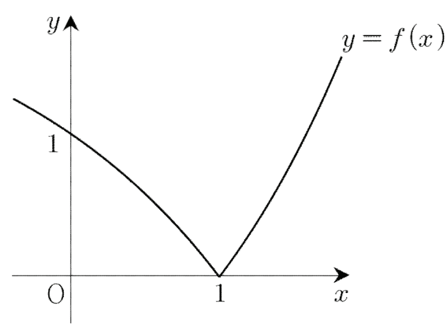
$\therefore\ \dfrac{x}{y}=3$

답 ③

A051 | 답 ⑤

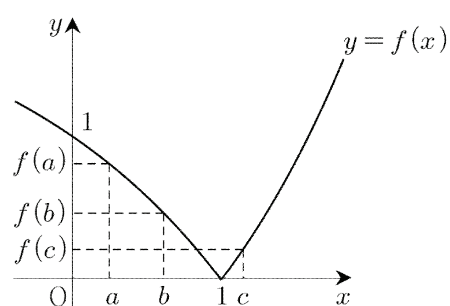
[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

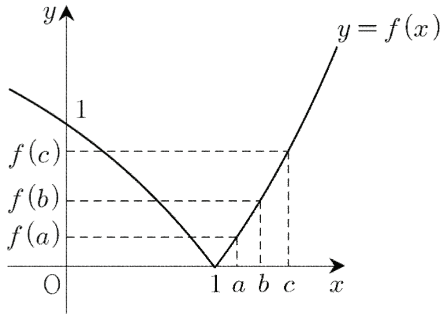


위의 그림과 같이 $0<a<b<1<c$이지만

$f(a) > f(b) > f(c)$일 수 있다.

▸ ㄴ. (참)

$a > 1$이라고 가정하자.



$a < b < c$일 때, $f(a) < f(b) < f(c)$

이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $0 < a \leq 1$이다.

$a = 1$이라고 가정하자.

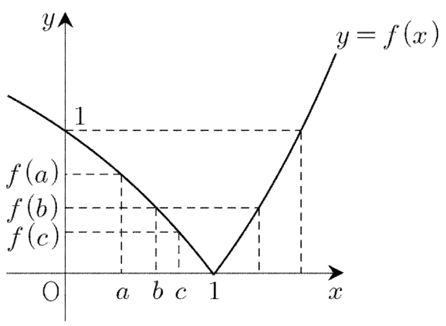
문제에서 주어진 부등식에 대입하면

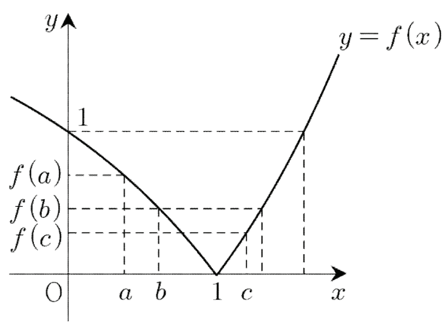
$f(a) = 0 > f(b) > f(c) > 0$

이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $0 < a < 1$이다.

- (1) $b < 1$인 경우





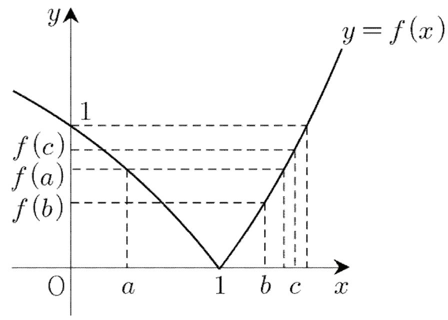
위의 그림과 같으면 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.

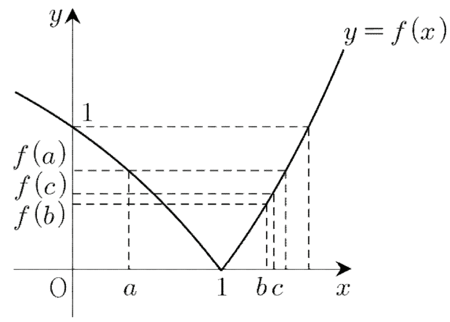
이때, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 범위는

$0 < f(a) < 1$, $0 < f(b) < 1$, $0 \leq f(c) < 1$

이므로 $0 < f(a) + f(b) + f(c) < 3$이다.

- (2) $b > 1$인 경우





구간 $(1, \infty)$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로

$f(b) < f(c)$이다.

이는 문제에서 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

따라서 문제에서 주어진 부등식이 성립하면

보기 ㄴ에서 주어진 부등식이 성립한다.

▸ ㄷ. (참)

$0 < f(a) < 1$이므로 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = f(a)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(x) - a = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A052 | 답 ②

[풀이]

우선 문제에서 주어진 지수부등식을 풀자.

$a > 1$일 때, $x - 1 < 2x + 1$ 풀면 $x > -2$

$0 < a < 1$일 때, $x - 1 > 2x + 1$ 풀면 $x < -2$

따라서 a의 범위는 $0 < a < 1$이다.

이제 로그부등식을 풀자.

진수의 조건에 의하여

$x - 2 > 0$, $4 - x > 0$에서 $2 < x < 4$

$x - 2 > 4 - x$에서 $x > 3$

$\therefore\ 3 < x < 4$

답 ②

A053 | 답 ④

[풀이]

두 방정식 $a^x=3$, $b^x=3$의 실근은 각각

$x=\log_a 3$, $x=\log_b 3$

점 B가 선분 AC의 중점이므로

$\log_b 3=2\log_a 3$, $\log_b 3=\log_{\sqrt{a}} 3$

$b=\sqrt{a}$, 즉 $a=b^2$

$\mathrm{B}(\log_a 3,\ 3)$이고,

$b^{\log_a 3}=b^{\log_{b^2} 3}=b^{\log_b \sqrt{3}}=\sqrt{3}$ 이므로

$\mathrm{D}(\log_a 3,\ \sqrt{3})$

$\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{DH}}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

답 ④

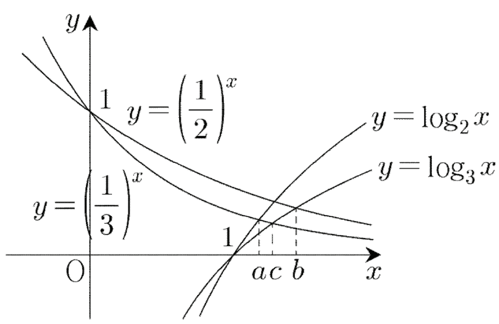
A054 | 답 ②

[풀이]

네 함수

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$

의 그래프를 한 평면 위에 그리면 아래 그림과 같다.

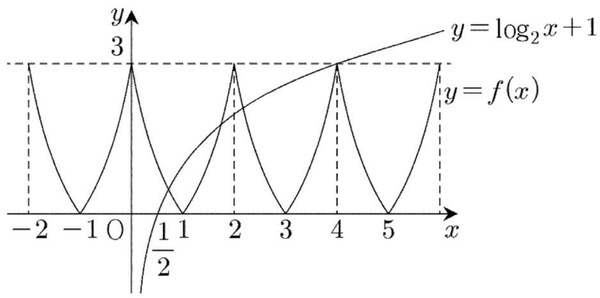


답 ②

A055 | 답 ①

[풀이]

주기가 2인 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프를 한 평면 위에 나타내면 아래 그림과 같다.



위의 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\log_2 x+1$의 교점의 개수는 4이다.

답 ①

A056 | 답 ②

[풀이]

삼각형 OBD의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 4배이므로

두 삼각형 OAC, OBD의 닮음비는 1 : 2이다.

점 A의 좌표를 $(t,\ \log_2 t)$로 두자.

점 A는 선분 OB의 중점이므로

점 B의 좌표는 $(2t,\ \log_2 2t)$이다.

그런데 (점 B의 y좌표)$=2\times$(점 A의 y좌표)

$\log_2 2t=2\log_2 t$, $\log_2 2t=\log_2 t^2$, $2t=t^2$, $t=2$

$m=\dfrac{\log_2 2}{2}=\dfrac{1}{2}$

사각형 ABDC는 등변사다리꼴이므로

두 직선 $y=nx$, $y=mx$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, $mn=1$, $n=2$

$\therefore\ m+n=\dfrac{5}{2}$

답 ②

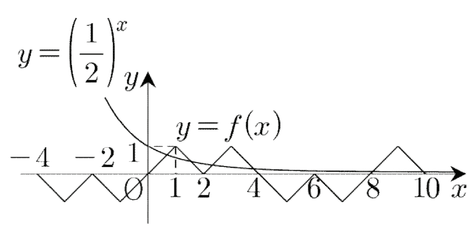
A057 | 답 ⑤

[풀이]

(나) ⇒ 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

(다) ⇒ 함수 $f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



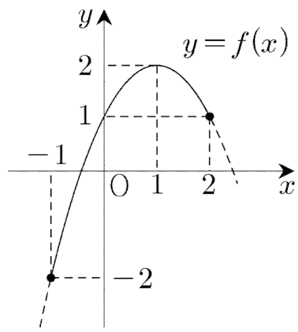
따라서 $-10\le x\le 10$에서 두 그래프의 교점의 개수는 6이다.

답 ⑤

A058 | 답 ①

[풀이]

$-1 \le x \le 2$에서 함수 $f(x)$의 그래프는



• (1) $0 < a < 1$인 경우

$-1 \le x \le 2$일 때,

$-1 < a^2 \le g(x) \le \dfrac{1}{a}$ $\left(\dfrac{1}{a} > 1\right)$이므로

$f(g(x))$의 최댓값은 $2(=f(1))$이다.

$-1 \le x \le 2$일 때,

$-2 \le f(x) \le 2$이므로

$g(f(x))$의 최댓값은 $\dfrac{1}{a^2}$이다.

$\dfrac{1}{a^2}=2$에서 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

• (2) $a > 1$인 경우

$-1 \le x \le 2$일 때,

$0 < \dfrac{1}{a} \le g(x) \le a^2$ $\left(\dfrac{1}{a} < 1,\ a^2 > 1\right)$이므로

$f(g(x))$의 최댓값은 $2(=f(1))$이다.

$-1 \le x \le 2$일 때,

$-2 \le f(x) \le 2$이므로

$g(f(x))$의 최댓값은 a^2이다.

$a^2=2$에서 $a=\sqrt{2}$

따라서 구하는 값은

$\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

답 ①

A059 | 답 25

[풀이]

$5^x=t(t>0)$로 두고

문제에서 주어진 부등식을 정리하면

$t^2-kt+2k+5 \ge 0$ (단, $t>0$)

$f(t)=t^2-kt+2k+5$로 두자.

• (1) $k<0$인 경우

$f(0) \ge 0$, 즉 $2k+5 \ge 0$

$-\dfrac{5}{2} \le k < 0$

• (2) $k \ge 0$인 경우

(판별식)$=(-k)^2-4(2k+5) \le 0$,

즉, $k^2-8k-20 \le 0$, $(k-10)(k+2) \le 0$

$0 \le k \le 10$

(1), (2)에서 k의 범위는

$-\dfrac{5}{2} \le k \le 10$

$\therefore$ $|\alpha\beta|=25$

답 25

A060 | 답 19

[풀이]

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=2^x+1$

$\log_2(a-1)=0$에서 $a=2$이므로 $A_1(2,\ 0)$

$b=g(a)=5$이므로 $A_2(2,\ 5)$

$\log_2(c-1)=b$에서 $c=33$이므로 $A_3(33,\ 5)$

$d=g(c)=2^{33}+1$이므로 $A_4(33,\ 2^{33}+1)$

$\therefore$ $\log_{(b-1)}(c-1)(d-1)$

$=\log_{2^2}2^5\times2^{33}=\dfrac{5+33}{2}=19$

답 19

A061 | 답 ②

[풀이]

$k=2$일 때, 두 점 Q, R이 일치하므로

$a^{2\times2}=2$ 즉, $a^4=2$에서

$a=\sqrt[4]{2}\,(\because a>1)$

▸ ㄱ. (참)

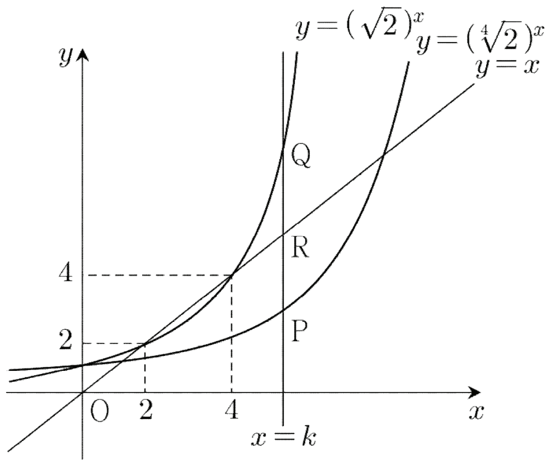
문제에서 주어진 두 지수함수의 방정식은 각각

$y=(\sqrt{2})^x$, $y=(\sqrt[4]{2})^x$

$(\sqrt{2})^4=2^{\frac{1}{2}\times4}=2^2=4$이므로

$k=4$일 때, 두 점 Q, R은 서로 일치한다.

▸ ㄴ. (참)



$k \leq 4$이면 $\overline{\mathrm{PQ}} \leq 2$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=12$이면 $k>4$이어야 한다.

$k>4$일 때, 점 Q의 y좌표는 점 P의 y좌표보다 크므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}=12$

$2^{\frac{k}{4}}=t$로 두고 방정식을 정리하면

$t^2-t-12=0$, $(t-4)(t+3)=0$

풀면

$t=4(\because t>2)$ 즉, $2^{\frac{k}{4}}=4=2^2$

지수방정식을 풀면 $\frac{k}{4}=2$에서 $k=8$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{QR}}=(\sqrt{2})^8-8=16-8=8$

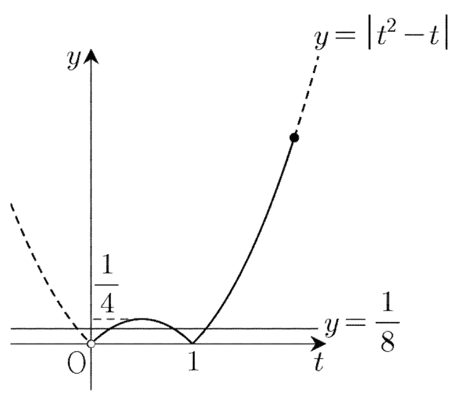
▸ ㄷ. (거짓)

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{8}$이므로 $k \leq 4$이어야 한다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left|2^{\frac{k}{2}}-2^{\frac{k}{4}}\right|=\frac{1}{8}$

$2^{\frac{k}{4}}=t$로 두고 위의 등식을 정리하면

$|t^2-t|=\frac{1}{8}$(단, $0<t\leq 2$)



구간 $(0, 2]$에서 곡선 $y=|t^2-t|$와 직선 $y=\frac{1}{8}$은 서로 다른 세 점에서 만난다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{8}$을 만족시키는 서로 다른 실수 k의 값의 개수는 3이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

A062 | 답 25

[풀이]

문제에서 주어진 방정식을 정리하면

$(\log x)^2+(\log 2+\log 4)\log x$

$+(\log 2)(\log 4)+(\log k)^2=0$

함수 $y=\log x$의 치역은 실수 전체의 집합이므로

$\log x=t$(t는 실수)로 두면

$t^2+(\log 2+\log 4)t+(\log 2)(\log 4)+(\log k)^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(\log 2+\log 4)^2-4\{(\log 2)(\log 4)+(\log k)^2\}>0$

$(\log 2-\log 4)^2-4(\log k)^2>0$

$(\log k^2)^2-(\log 2)^2<0$

$-\log 2<\log k^2<\log 2$

$\frac{1}{2}<k^2<2$

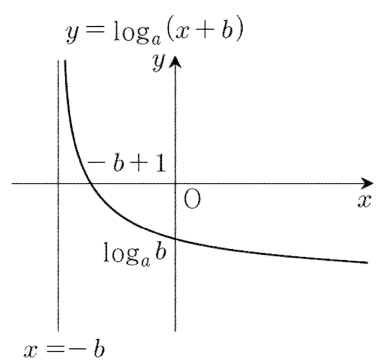
풀면 $\frac{1}{\sqrt{2}}<k<\sqrt{2}$

$\therefore\ 10(\alpha^2+\beta^2)=25$

답 25

A063 | 답 ④

[풀이]



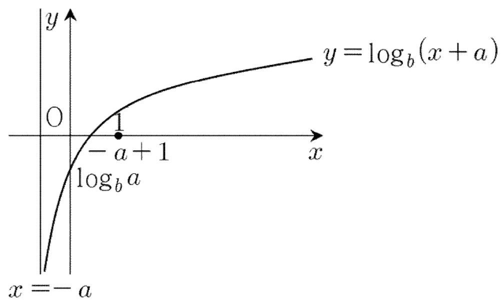
곡선 $y=\log_a(x+b)$의 x절편, y절편은 각각

$-b+1$, $\log_a b$이고, 점근선은 $x=-b$이다.

문제에서 주어진 그림에서

$-b+1<0$, $\log_a b<0$

이므로 $b>1$, $0<a<1$이다.



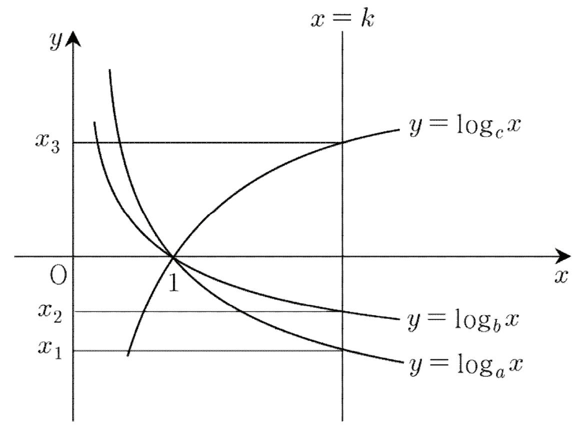
함수 $y=\log_b(x+a)$의 밑은 1보다 크므로, 이 함수는 증가함수이다.
곡선 $y=\log_b(x+a)$의 x절편, y절편은 각각 $-a+1$, $\log_b a$이고, 점근선은 $x=-a$이다.
$0<(x\text{절편})<1$, $(y\text{절편})<0$
이므로 곡선 $y=\log_b(x+a)$의 그래프는 ④와 같다.
답 ④

A064 | 답 4

[풀이]
점 C의 좌표를 $(k,\ 0)$으로 두면
$\overline{OC}:\overline{OD}=1:9$이므로
점 D의 좌표는 $(9k,\ 0)$이다.
두 점 A, B의 좌표는 각각
$A(k,\ \log_3 k)$, $B(9k,\ \log_3 9k)$
(직선 AB의 기울기)
$=\dfrac{\log_3 9k-\log_3 k}{9k-k}=\dfrac{2+\log_3 k-\log_3 k}{8k}$
$=\dfrac{1}{4k}=\dfrac{1}{2}$에서 $k=\dfrac{1}{2}$
$\therefore\ \overline{CD}=8k=4$
답 4

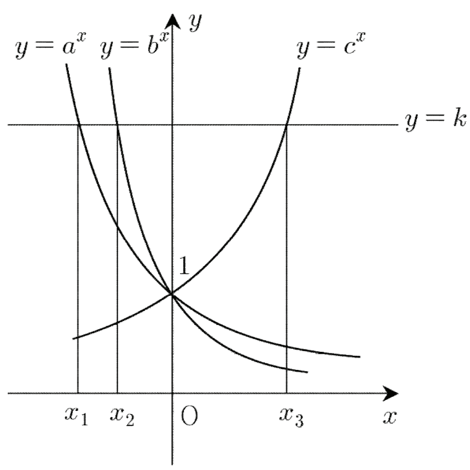
A065 | 답 ⑤

[풀이]



$a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}=k$로 두면 $k>1$이고,
로그의 정의에 의하여
$x_1=\log_a k$, $x_2=\log_b k$, $x_3=\log_c k$
위의 그림에서
$\therefore\ x_3>x_2>x_1$
답 ⑤

[참고]



세 함수 $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$의 방정식과
직선 $y=k(k>1)$의 방정식을 연립하면
$a^x=k$, $b^x=k$, $c^x=k$
지수함수는 일대일대응이므로
위의 세 방정식의 실근은 각각 x_1, x_2, x_3이다.
즉, $a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}=k$
위의 그림에서 $x_3>x_2>x_1$임을 확인할 수 있다.

A066 | 답 ③

[풀이1]

함수 $y=a\cdot 3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동시키면 함수

$-y=a\cdot 3^{-x}$

의 그래프와 일치한다.

함수 $-y=a\cdot 3^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시키면 함수

$-(y-3)=a\cdot 3^{-(x-2)}$

의 그래프와 일치한다.

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ -6)$을 지나므로

$-(-6-3)=a\cdot 3^{-(1-2)}$ 즉, $9=a\cdot 3$

$\therefore\ a=3$

답 ③

[풀이2]

점 $(1,\ -6)$을 y축의 방향으로 -3만큼, x축의 방향으로 -2만큼 평행이동시키면 점 $(-1,\ -9)$와 일치한다.

점 $(-1,\ -9)$를 원점에 대하여 대칭이동시키면 점 $(1,\ 9)$와 일치한다. 점 $(1,\ 9)$는 곡선 $y=a\cdot 3^x$ 위에 있으므로

$9=a\cdot 3^1$

$\therefore\ a=3$

답 ③

A067 | 답 ③

[풀이]

$\log_3 x=X$, $\log_2 y=Y$로 두자.

로그의 밑의 변환의 공식과 로그의 성질에 의하여 주어진 연립방정식은

$$X-Y=1,\ \frac{1}{2}X+\frac{1}{2}-Y=1-\frac{k}{2}$$

정리하면

$X-Y=1,\ X-2Y=1-k$

위의 연립방정식을 풀면

$X=k+1,\ Y=k$

이므로

$x=3^{k+1}(=\alpha),\ y=2^k(=\beta)$

문제에서 주어진 부등식에 대입하면

$3^{k+1}\le 2^k$

변형하면

$$3\le\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

밑이 1 보다 작은 지수함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$는 감소함수이다.

그런데 $x\le -3$이면 $y\ge\frac{27}{8}=3.375$이고,

$x\ge -2$이면 $y\le\frac{9}{4}=2.25$이므로

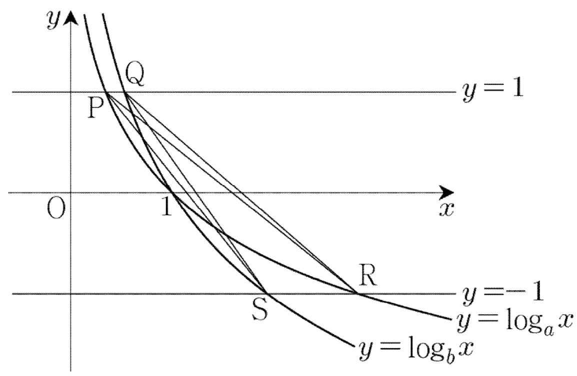
정수 k의 최댓값은 -3이다.

답 ③

A068 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 두 곡선을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



위의 그림에서

$\alpha<\beta,\ \gamma<\delta,\ \gamma<\alpha,\ \delta<\beta$

임을 확인할 수 있다.

따라서 부등식

$\gamma<\alpha<\beta,\ \gamma<\delta<\beta$

이 성립한다.

이제 α, δ의 대소 관계를 밝히자.

네 점 P, Q, R, S의 좌표는 각각

$(a,\ 1),\ (b,\ 1),\ \left(\frac{1}{a},\ -1\right),\ \left(\frac{1}{b},\ -1\right)$

위의 그림에서

$$\alpha=(\text{직선 PS의 기울기})=\frac{-2}{\frac{1}{b}-a}=\frac{-2b}{1-ab}$$

$$\delta=(\text{직선 QR의 기울기})=\frac{-2}{\frac{1}{a}-b}=\frac{-2a}{1-ab}$$

$\alpha-\delta=\frac{2(a-b)}{1-ab}<0$ 즉, $\alpha<\delta$

$\therefore\ \gamma<\alpha<\delta<\beta$

답 ②

A069 | 답 ③

[풀이]

점 A의 x좌표를 t로 두면 점 B의 x좌표는 $2t$이다.

$A(t,\ k\cdot 2^t)$, $B(2t,\ k\cdot 2^{2t})$

점 B의 y좌표는 점 A의 y좌표의 2배이므로

$k\cdot 2^{2t}=2k\cdot 2^t$, $2^{2t}=2^{t+1}$, $2t=t+1$

$\therefore\ t=1$

점 $A(1,\ 2k)$는 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

답 ③

A070 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 등식을 변형하면

$5\log_5 x+3\log_5 y=15$

그런데

$m\log_5 x+15\log_5 y$

$=5\left(\dfrac{m}{5}\log_5 x+3\log_5 y\right)=$(일정)

이므로 $\dfrac{m}{5}=5$임을 알 수 있다.

$\therefore\ m=25$

답 ⑤

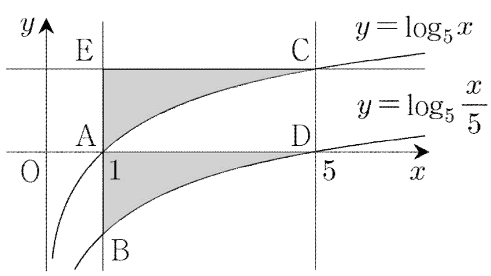
A071 | 답 ②

[풀이]

곡선 $y=\log_5 x$를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면

곡선 $y=\log_5\dfrac{x}{5}=\log_5 x-1$과 일치한다.

점 C에서 직선 $AB(x=1)$에 내린 수선의 발을 E라고 하자.



위의 그림에서 어둡게 색칠된 두 도형의 넓이가 같으므로

$S+T=$(□EADC의 넓이)+(△CAD의 넓이)

$=4\times1+\dfrac{1}{2}\times4\times1=6$

답 ②

A072 | 답 ②

[풀이]

두 점 P, B의 좌표를 구하면

$P(\log_a 3,\ 3)$, $B(\log_{\sqrt[10]{3}}3,\ 0)(B(10,\ 0))$

한편 $\angle PAB=90^\circ$이므로 $\overline{PB}$는 원의 지름이다.

직선 OP가 점 P에서 원에 접하므로

$\overline{OP}\perp\overline{PB}$

(직선 OP의 기울기)×(직선 PB의 기울기)

$=\dfrac{3}{\log_a 3}\times\dfrac{-3}{10-\log_a 3}=-1$

$t=\log_a 3$으로 두고 정리하면

$t^2-10t+9=0$, $(t-1)(t-9)=0$

$t=1$ 또는 $t=9$

$\log_a 3=1$: $a=3$

$\log_a 3=9$: $a=3^{\frac{1}{9}}$

따라서 구하는 값은

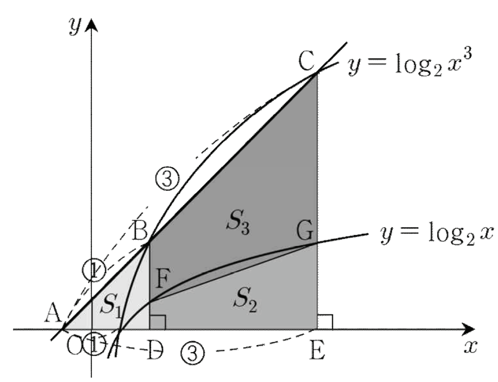
$3\times3^{\frac{1}{9}}=3^{\frac{10}{9}}$

답 ②

A073 | 답 24

[풀이] ★

삼각형 ABD의 넓이를 S_1, 두 사각형 FDEG, BFGC의 넓이를 각각 S_2, S_3이라고 하자.



도형의 닮음비와 넓이비의 관계에 의하여

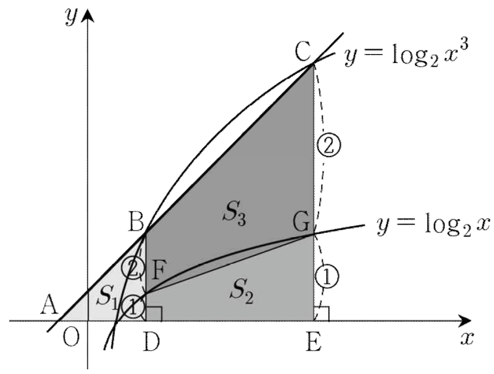
(△ABD의 넓이):(△ACE의 넓이)$=1^2:3^2$

(△ACE의 넓이)$=9\times$(△ABD의 넓이)$=\dfrac{81}{2}$

이므로

(□BDEC의 넓이)

=(△ACE의 넓이)−(△ABD의 넓이)=36



로그의 성질에 의하여 $\log_2 x^3=3\log_2 x$이므로

$t>1$인 임의의 실수 t에 대하여

$\log_2 t^3 : \log_2 t = 3:1$

따라서 두 사각형 BFGC, FDEG에 대하여

$S_2 : S_3 = 1:2$

즉, $S_3=$(□BDEC의 넓이)$\times\dfrac{2}{3}=24$

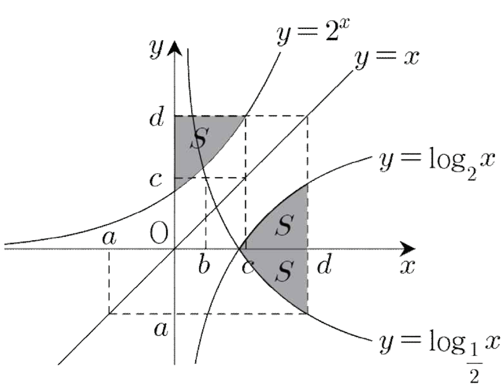
따라서 사각형 BFGC의 넓이는 24이다.

답 24

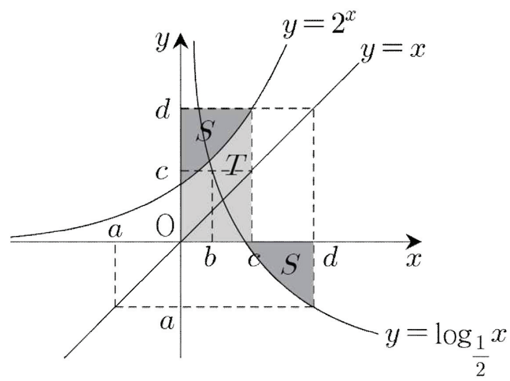
A074 | 답 ⑤

[풀이]

곡선 $y=2^x$을 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 곡선 $y=\log_2 x$와 일치하고, 곡선 $y=\log_2 x$를 x축에 대하여 대칭이동시키면 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 일치한다.



위의 그림에서 어둡게 색칠한 세 도형은 서로 합동이므로 각각의 넓이는 S로 같다.



위의 그림에서 $S+T$의 값은 이웃한 두 변의 길이가 각각 c, d인 직사각형과 일치함을 알 수 있다.

$a=-3$이면 $d=8$, $c=3$이므로

$\therefore\ S+T=24$

답 ⑤

A075 | 답 ①

[풀이]

$\overline{PQ}=2^{-a+3}+4+2^{a-5}+3=2^{-a+3}+2^{a-5}+7$

이므로 정사각형의 넓이를 $S(a)$라고 하자.

산술기하절대부등식에 의하여

$S(a)=\dfrac{(2^{-a+3}+2^{a-5}+7)^2}{2}$

$\geq\dfrac{1}{2}\times\left(2\sqrt{2^{-a+3}\times 2^{a-5}}+7\right)^2$

$=\dfrac{1}{2}\times 8^2=32$

(단, 등호는 $2^{-a+3}=2^{a-5}$, $a=4$일 때 성립한다.)

답 ①

A076 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$0<x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

그런데 함수 $y=2^x$는 증가함수이므로

$2^{f(x_1)}<2^{f(x_2)}$

▸ ㄴ. (참)

$x_1<x_2<0$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

그런데 함수 $y=\log_2 x$은 증가함수이므로

$\log_2 f(x_1)>\log_2 f(x_2)$

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

예를 들어 $x_1=-1$, $x_2=\sqrt{3}$이면

$f(x_1)=2$, $f(x_2)=4$에서

$\log_{\frac{1}{2}} f(x_1)=-1$, $\log_{\frac{1}{2}} f(x_2)=-2$

이므로

$\log_{\frac{1}{2}} f(x_1) > \log_{\frac{1}{2}} f(x_2)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

A077 | 답 ②

[풀이]

함수 $y=2^{2x+a}+b$의 점근선이 $y=2$이므로 $b=2$이다.

함수 $y=2^{2x+a}+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시키면 함수 $y=2^{-2x+a}+2$의 그래프와 일치한다.

즉, $f(x)=2^{-2x+a}+2$

함수 $f(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 10)$을 지나므로

$10=2^{2+a}+2$ 풀면 $a=1$

$\therefore\ a+b=3$

답 ②

A078 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$2^a=\sqrt{5}$에서

$a=\log_2\sqrt{5}=\frac{1}{2}\log_2 5=\log_4 5$

▸ ㄴ. (참)

$2^a=5^b=k$로 두면

$a=\log_2 k$, $b=\log_5 k$

$\frac{a}{b}=\frac{\log_2 k}{\log_5 k}=\frac{\log_k 5}{\log_k 2}=\log_2 5$

$2<\log_2 5<3\,(4<5<8)$이므로

$\therefore\ 2<\frac{a}{b}<3$

▸ ㄷ. (거짓)

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_k 10$인데, $k=10$이면 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$은 1(유리수)이다.

따라서 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$가 항상 무리수인 것은 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

A079 | 답 ①

[풀이]

$(g\circ f)(x)=3^{|x-1|}$이므로

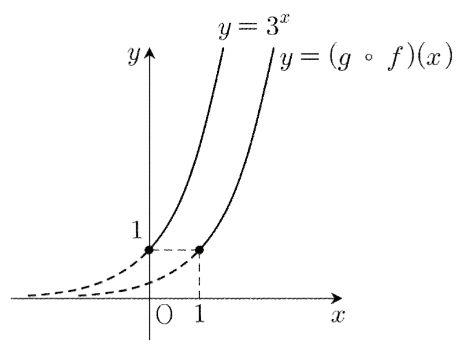
$x\ge 1$일 때, $(g\circ f)(x)=3^{x-1}$ $\cdots$ ㉠

이고,

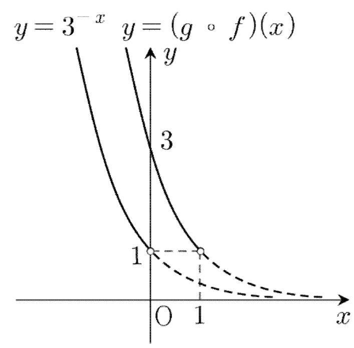
$x<1$일 때, $(g\circ f)(x)=3^{1-x}$ $\cdots$ ㉡

이다.

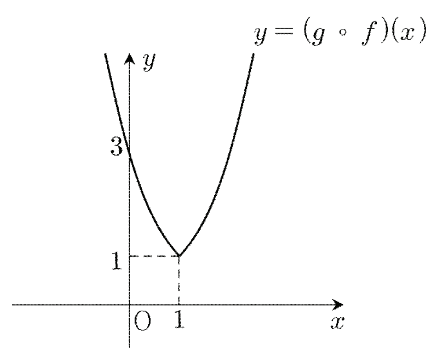
함수 $y=3^x\,(x\ge 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 ㉠과 일치한다.



함수 $y=3^x\,(x\ge 0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 ㉡과 일치한다.



따라서 함수 $(g\circ f)(x)$의 그래프는 ①과 같다.



답 ①

A080 　| 답 5

[풀이]

$y=2^{x-2}+1$을 x에 대하여 풀면

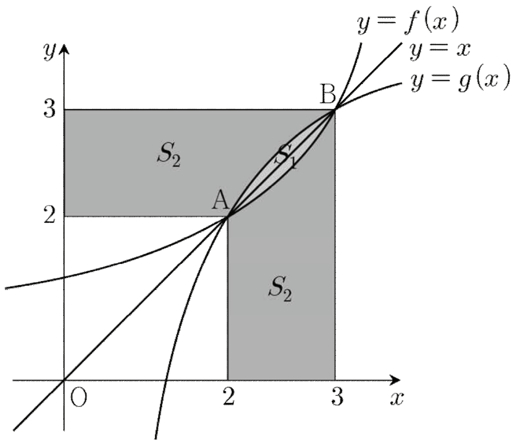
$x=\log_2(y-1)+2$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_2(x-1)+2$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수이므로

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



함수 $f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=2$, $x=3$으로 둘러싸인 도형과 함수 $g(x)$의 그래프와 두 직선 $y=2$, $y=3$으로 둘러싸인 도형은 서로 합동이다. 이때, 두 도형은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 함수 $g(x)$의 그래프와 두 직선 $y=2$, $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 S_2이므로 S_1+2S_2의 값은 한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이에서 한 변의 길이가 2인 정사각형의 넓이를 뺀 값과 같다.

$\therefore\ S_1+2S_2=3^2-2^2=5$

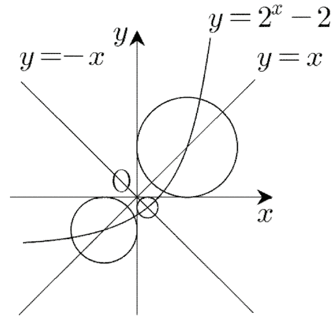
답 5

A081 　| 답 ⑤

[풀이]

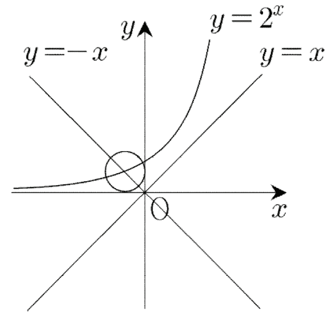
원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있으므로 곡선 $y=2^x+n$과 직선 $y=\pm x$의 교점이 원의 중심이 된다.

- (1) $n=-2$인 경우



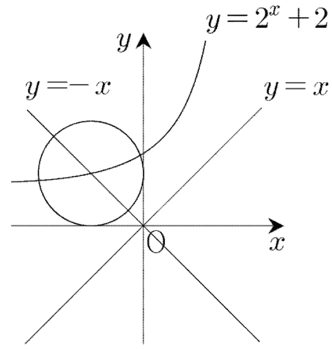
위의 그림에서 $f(-2)=3$

- (2) $n=0$인 경우



위의 그림에서 $f(0)=1$

- (3) $n=2$인 경우



위의 그림에서 $f(2)=1$

이상에서

$\therefore\ f(-2)+f(0)+f(2)=3+1+1=5$

답 ⑤

A082 　| 답 ③

[풀이]

$$f(g(x))=\begin{cases}\log_2(x-2) & (x>2)\\ \log_2(2-x) & (x<2)\end{cases}$$

함수 $f(g(x))$의 그래프는 ③과 같다.

답 ③

A083 ㅣ답 6

[풀이]

두 점 A, B의 좌표는 각각 A$(1,\ 0)$, B$(p,\ 0)$

($\triangle$BDC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}}^2=\dfrac{9}{2}$

($\because$ $\triangle$BDC는 직각이등변삼각형)

풀면 $\overline{\mathrm{BD}}=3(=\overline{\mathrm{CD}})$, C$(8,\ 3)$, $p=5$

($\triangle$ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times(5-1)\times3=6$

답 6

A084 ㅣ답 10

[풀이]

방정식 $f(x)=g(x)$는

$2^x=10-2^{4-x}$

$2^x=t$로 두고 정리하면

$t=10-\dfrac{16}{t}$, $t^2-10t+16=0$, $(t-8)(t-2)=0$

$t=2$ 또는 $t=8$이므로 $x=1$ 또는 $x=3$

A$(1,\ 2)$, B$(3,\ 8)$, C$(1,\ 0)$, D$(3,\ 0)$

$\therefore$ (사다리꼴 ACDB의 넓이)

$=\dfrac{2+8}{2}\times2=10$

답 10

A085 ㅣ답 4

[풀이]

두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 원 $x^2+y^2=8$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

원 $x^2+y^2=8$의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 정삼각형의 A, B가 아닌 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ -2)$이다.

점 O는 정삼각형의 무게중심이므로 점 O와 직선 AB 사이의 거리는 $\sqrt{2}$이다. 이때, 선분 AB의 중점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로, 직선 AB의 방정식은 $y=2-x$이다.

원 $x^2+y^2=8$과 직선 $y=2-x$의 방정식을 연립하면

$x^2+(2-x)^2=8$, $x^2-2x-2=0$

$x=1\pm\sqrt{3}$

따라서 점 A의 x좌표는 $1+\sqrt{3}$이다.

$\therefore$ $p+q=4$

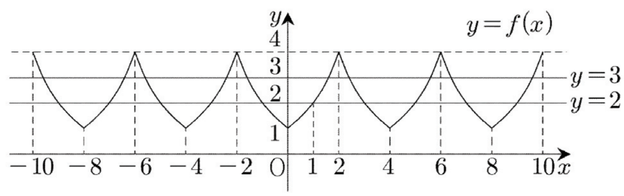
답 4

A086 ㅣ답 ④

[풀이]

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이고,

조건 (다)에 의하여 함수 $f(x)$의 주기는 4이다.



$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{f(x)}\geq\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$, $f(x)\leq3$

위의 그림에서 이 부등식을 만족시키는 정수 x는

-10, -6, -2, 2, 6, 10

이 아닌 -10 이상 10 이하의 정수이다.

따라서 문제에서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 $21-6=15$이다.

답 ④

A087 ㅣ답 ②

[풀이]

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=a^{m-x}$

이때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $x=\dfrac{m}{2}$에 대하여 대칭이다.

조건 (가)에 의하여

$\dfrac{m}{2}=1$, 즉 $m=2$

조건 (나)에 의하여

$a^3=16\cdot a^{2-3}$, $a=2$

$\therefore$ $a+m=4$

답 ②

A088 ㅣ답 9

[풀이]

조건 (나)에 의하여

$\dfrac{\log_n(m+1)-\log_n m}{m+1-m}=\log_n\dfrac{m+1}{m}\leq\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{m+1}{m}\leq n^{\frac{1}{3}}$, $(m+1)^3\leq m^3\cdot n$

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2022 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2022 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통 〉

- 공통 1 : 문제를 보자마자 a^2-b^2이 떠올라야 함. 1번부터 '이 시험은 교과서/기출문제를 풀었던 기억으로 푼다.' 를 의도적으로 말하고 있음. 즉, '정해진 풀이를 따르지 않으면 망한다.' 를 노골적으로 표현.
- 공통 8 : 이차함수의 정적분 → 대칭축을 생각한다.
- 공통 13 : 그림을 그릴 수 없으니, 처음부터 끝까지 계산. 로그문제에서 a^b이 나오면 $\log a^b = b\log a$ 생각이 들어야.
- 공통 14 : x축에서 점 P를 움직이는게 우선.
- 공통 15 : 역대 평가원 기출 중에서 " 코사인법칙에 의하여 " 란 문구가 등장한 첫 번째 문제. 어떤 공식을 써야 하는지 알려 주었는데. 어려운 문제일리 없다. 읽는데 4점.
- 공통 21 : $2+2^2+2^3<2^4$과 같은 계산을 해보았는가? '기하급수적으로 빨라진다.' 의 의미를 아는가를 평가.
- 공통 22 : $f(1)=f(4)$에서 $f(x)$의 그래프의 개형이 바로 나와야 함. 삼차함수의 비율관계.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 28 : 분할, 여사건 모두 가능. 이 문제 보다 경우 구분이 많은 함수 개수 세는 문제는 기출에 널려있음.
- 확률과 통계 29 : 적분 기호 쓰면 좀 더 편하긴 한데. $y=k$ 그리면 더 단순하게 해결 가능.
- 확률과 통계 30 : 답을 맞히기 상당히 어려운, 실수하기 딱 좋은 문제. 수형도 그냥 다 그리는 편이 나음.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 : 평행이동/대칭성 & 기출을 풀었던 경험. 풀이 중간 과정에서 답을 바로 알 수 있음.
- 미적분 29 : 계산이 복잡하니. 극한의 근사적 계산으로 접근하면 실수 없이 빠르게 계산 가능.
- 미적분 30 : (나)의 항등식에 $x=1$, 2, 4 대입하여 점찍고, 확대해서 그리면 끝. 역함수의 정적분 계산 말고, 그림으로 해결.

〈 기하 〉

- 기하 26 : 동일하게 쌍곡선으로 수능에 출제된 적이 있음. 원 밖의 점에서 접선 2개 그으면 합동인 직각삼각형 2개 찾는다.
- 기하 28 : 빗변 주면, 직각삼각형 그리고. 기울기 없으니, 피타 쓰고. 포물선의 정의대로 선분 그으면 직각 안에 수선 그려지니 닮음 쓰고.
- 기하 29 : 문제에서 원 위의 점 주었으니. (나)는 직선(선분)일 수밖에. 이 유형의 문제 중에서도 중급 수준.
- 기하 30 : 평가원 기출 중, 구/직선 정사영 내려서 점의 이동 관찰하는 문제의 확장판. 풀다보면 이면각 보다는 정사영이 좀 더 편하긴 하지만. 이면각의 정의에 의한 풀이도 계산이 거의 없음. 기존 공도 기출과 비교하여 중급 수준.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

구 성

▸ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 수학Ⅱ'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 273개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2021년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2022학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2022학년도 (학년도 기준)

▸ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▸ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
대단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

▸ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

수학 II

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

D 함수의 극한과 연속

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함

○ 합성함수의 극한과 연속성 관련 문제 제외 (미적분(이과)에 포함됨)

D. 함수의 극한과 연속

D001

○○○
(2005(7)고3-가형11)

다음은 세 변의 길이가 모두 다른 예각삼각형에서 각 변을 같은 길이만큼 짧게 했을 때, 짧아진 세 선분을 각 변으로 하는 직각삼각형이 존재함을 증명한 것이다.

〈증명〉
예각삼각형의 세 변의 길이를 a, b, $c(a<b<c)$로 놓으면
$a^2+b^2>c^2$이다.
그런데 x만큼 짧아진 삼각형의 세 변의 길이는
$a-x$, $b-x$, $c-x$이므로 $0<x<\boxed{(가)}$이다.
따라서 등식 $(a-x)^2+(b-x)^2=(c-x)^2$을 만족시키는
실수 x가 $0<x<\boxed{(가)}$에서 존재함을 보이면 된다.
$f(x)=(a-x)^2+(b-x)^2-(c-x)^2$으로 놓으면
$f(x)$는 연속함수이고,
$f(0)\boxed{(나)}0$, $f(\boxed{(가)})\boxed{(다)}0$이므로
사이값 정리에 의해 $0<x<\boxed{(가)}$에서 $f(x)=0$
인 x가 존재한다.
그러므로 짧아진 세 선분을 각 변으로 하는 직각삼각형이 존재한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$a+b-c$	$<$	$>$
②	$a+b-c$	$>$	$<$
③	$a+b+c$	$<$	$>$
④	a	$<$	$>$
⑤	a	$>$	$<$

D002

○○
(2005(4)고3-가형23)

$f(x)$가 다항함수일 때, 모든 실수에서 연속인 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-x^2}{x-1} & (x\neq 1) \\ k & (x=1) \end{cases}$$

로 정의하자. $\lim_{x\to\infty} g(x)=2$일 때, $k+f(3)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

D003

○○
(2005(7)고3-가형5)

$a>1$일 때, $\lim_{x\to 1}\dfrac{|x-a|-(a-1)}{x-1}$의 값은? [3점]

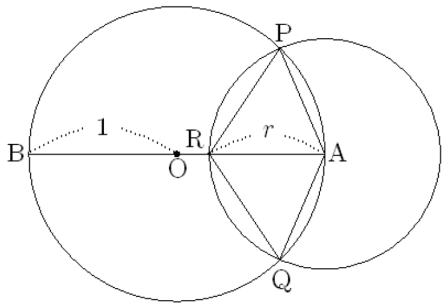
① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 0
④ -1 ⑤ -2

D004

○○
(2006(4)고3-가형16)

반지름의 길이가 1인 원 O 위에 한 점 A가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 원 O와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 원 O의 지름 AB와 만나는 점을 R라 하자. 사각형 APRQ의 넓이를 $S(r)$라 할 때,

$\lim\limits_{r \to 2-} \dfrac{S(r)}{\sqrt{2-r}}$의 값은? (단, $0<r<2$) [4점]



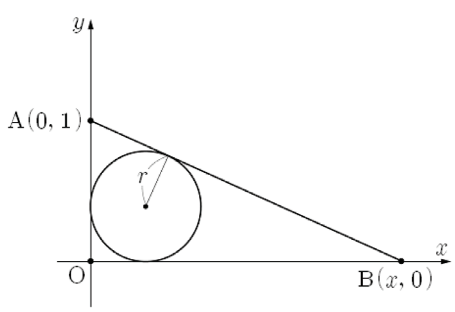
① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

D005

○○
(2007(7)고3-가형9)

그림과 같이 세 점 A(0, 1), O(0, 0), B(x, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 그 삼각형에 내접하는 원이 있다. 점 B가 x축을 따라 원점에 한없이 가까워질 때, △AOB에 내접하는 원의 반지름의 길이 r에 대하여 $\dfrac{r}{x}$의 극한값은?

(단, $x>0$) [3점]



① $\dfrac{1}{6}$　　② $\dfrac{1}{5}$　　③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{1}{3}$　　⑤ $\dfrac{1}{2}$

D006

○○
(2008사관(1차)-이과26)

$x \neq 2$인 모든 실수 x에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $\lim\limits_{x \to 2}\{2f(x)+g(x)\}=1$
(나) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)=\infty$

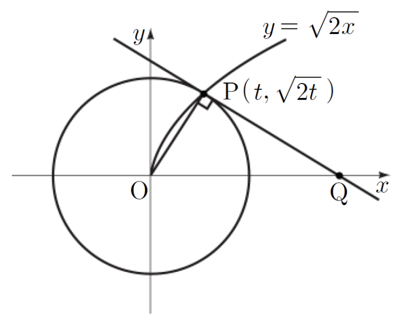
이때, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4f(x)-40g(x)}{2f(x)-g(x)}$의 값을 구하시오. [3점]

D007

○○○
(2011(4)고3-나형19)

그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점 P $(t,\ \sqrt{2t})$가 있다. 원점 O를 중심으로 하고 선분 OP를 반지름으로 하는 원을 C, 점 P에서의 원 C의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 원 C의 넓이를 $S(t)$라 할 때,

$\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{S(t)}{\overline{OQ}-\overline{PQ}}$의 값은? (단, $t>0$) [4점]



① $\sqrt{2}\pi$　　② 2π　　③ $2\sqrt{2}\pi$
④ 4π　　⑤ $4\sqrt{2}\pi$

D008

○○ (2012(4)고3-나형13)

이차함수 $f(x)$와 다항함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=2$$

를 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$

④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

D009

○○ (2013(7)고3-A형28)

함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-2} & (x\neq 2)\\ 1 & (x=2)\end{cases}$와 이차함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

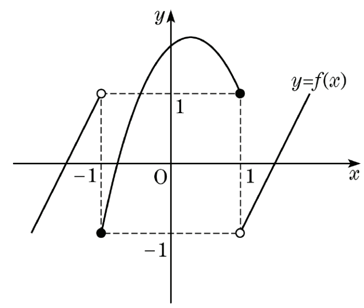
(가) $g(0)=8$
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

이때 $g(6)$의 값을 구하시오. [4점]

D010

○○ (2013(10)고3-A형16)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=0$
ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to1}f(-x)$는 존재한다.
ㄷ. 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.

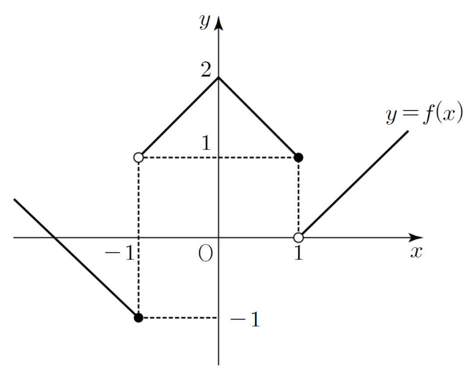
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D011

○ (2013(11)고2-B형5)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(-x)$의 값은? [3점]



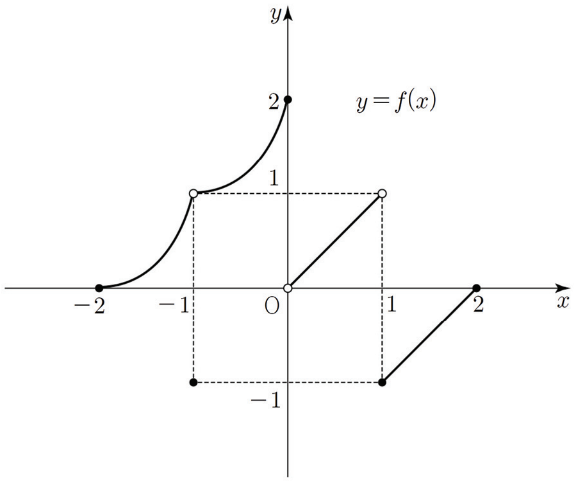
① -2　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2

D012

○
(2013(4)고3-A형11)

정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때, $\lim_{x\to-1} f(x) + \lim_{x\to1+} f(x-1)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

D013

○○
(2014(7)고3-A형18)

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=k$$

를 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 2) \\ 2-x & (x>2) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

D014

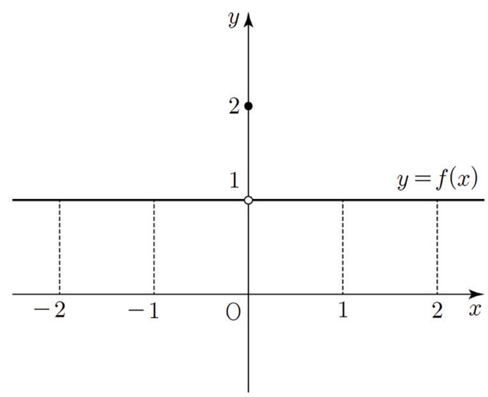
○○○
(2013(4)고3-A형21)

실수 t에 대하여 열린구간 $(t-1,\ t+1)$에서 함수

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x\ne 0) \\ 2 & (x=0) \end{cases}$$

의 불연속인 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $g(0)=1$
ㄴ. $\lim_{x\to1-} g(x) + \lim_{x\to-1+} g(x) = 2$
ㄷ. 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=0$에서 연속이다.

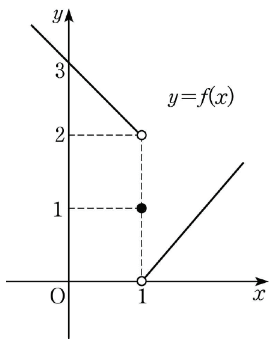


① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D015

(2014(10)고3-A형14)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



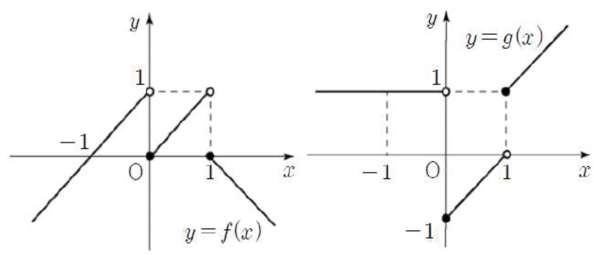
일차함수 $g(x)$에 대하여 $g(0)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)$이고,
$f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,
$g(-1)$의 값은? [4점]

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

D016

교육청 기출

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



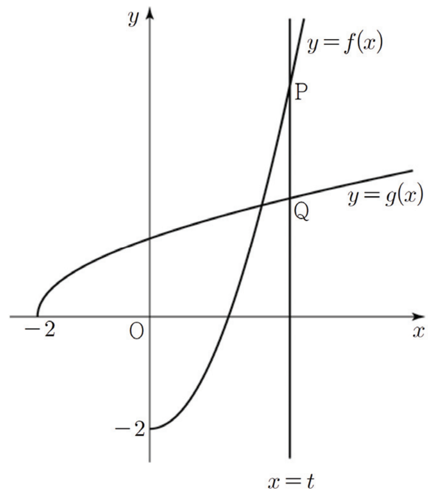
ㄱ. $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$
ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=0$
ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D017

(2015(6)고2-가형20)

함수 $f(x)=x^2-2(x\geq0)$의 역함수 $g(x)$라 하고, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 직선 $x=t(t>2)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이를 $h(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to2+}\dfrac{h(t)}{t-2}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{7}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{11}{4}$
④ $\dfrac{13}{4}$ ⑤ $\dfrac{15}{4}$

D018

(2015(4)고3-A형29)

함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (|x|\leq2)\\ -2x+3 & (|x|>2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. [4점]

D019

○○○
(2015(9)고2-나형29)

실수 전체의 집합에서 연속인 함수

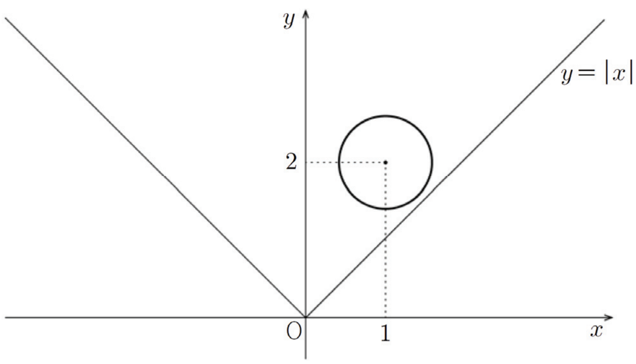
$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+3 & (x \ge 1) \\ -x^2+2bx-3 & (x<1) \end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $3a+2b$의 최댓값을 구하시오. [4점]

D020

○○○
(2015(6)고2-나형19)

양수 r에 대하여 함수 $y=|x|$의 그래프와 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$이 만나는 점의 개수를 $f(r)$라 하자. 함수 $f(r)$가 불연속인 점의 개수는? [4점]

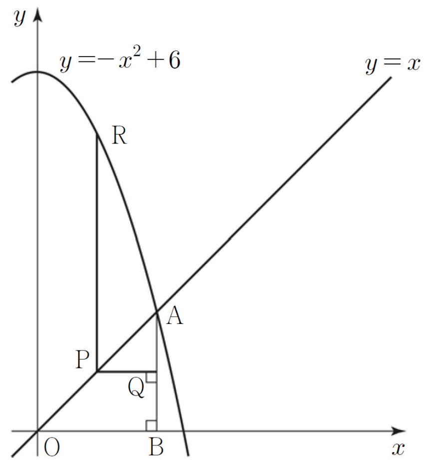


① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

D021

○○
(2015(4)고3-A형18)

그림과 같이 곡선 $y=-x^2+6$과 직선 $y=x$가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 직선 $y=x$ 위의 점 P$(a,\ a)$에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=-x^2+6$과 만나는 점을 R라 할 때, $\lim_{a\to 2-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}$의 값은? (단, $0<a<2$) [4점]



① $\frac{2}{15}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{4}{15}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{5}$

D022

○○
(2015사관(1차)-A형9)

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1$
(나) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+g(x)}{x^3}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{2}{5}$　③ $\dfrac{3}{5}$

④ $\dfrac{4}{5}$　⑤ 1

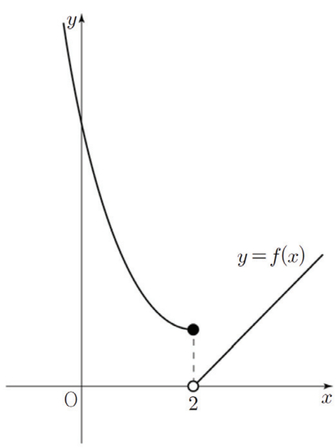
D023

○○
(2016(6)고2-가형16)

함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+5 & (x\le 2)\\ x-2 & (x>2)\end{cases}$$

와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(5)$의 값은? [4점]



① 7　② 8　③ 9

④ 10　⑤ 11

D024

○○○
(2016(4)고3-나형30)

함수 $f(x)=x^2-8x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}2x+5a & (x\ge a)\\ f(x+4) & (x<a)\end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. [4점]

(가) 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

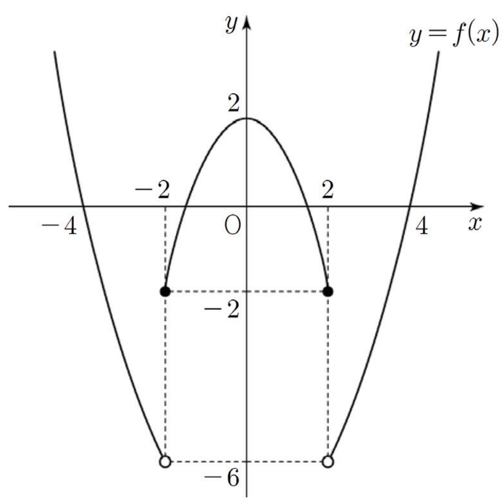
D025

○○
(2016(9)고2-가형17)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-8 & (|x|>2)\\ -x^2+2 & (|x|\le 2)\end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같다.



함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 k의 값의 곱은? [4점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2

④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

D026

○○○
(2016(11)고2-가형21)

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x\le -1) \\ 1 & (-1<x\le 1) \\ x-1 & (x>1) \end{cases}$$

이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 함수 $f(x)g(x+k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 k가 존재한다. (단, $k\neq 0$)

$g(0)<0$일 때, $g(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

D027

○○○
(2016(11)고2-나형21)

실수 t에 대하여 두 함수

$$f(x)=(x-t)^2-1,\ g(x)=\begin{cases} -x & (x\le 1) \\ x+2 & (x>1) \end{cases}$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim_{t\to -1+} h(t)=3$
ㄴ. 함수 $h(t)$는 $t=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속이 되는 모든 a의 값의 합은 $\frac{15}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D028

○○○
(2016(6)고2-가형21)

함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2+a-1 & (x<0)\\ -x^2+a+7 & (x\ge 0)\end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 점 $(0,\ 5)$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은? [4점]

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

D029

○○
(2017(10)고3-나형17)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}|x|\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}=a,\ \ \lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=3$$

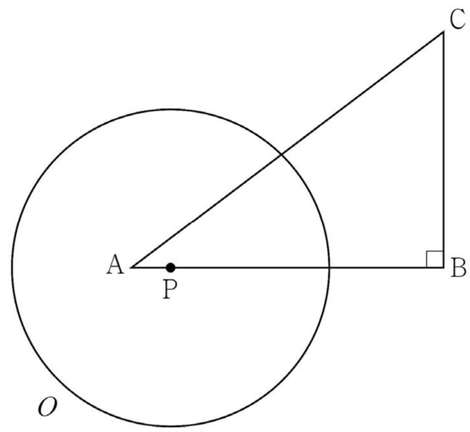
을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

D030

○○○
(2017(4)고3-나형29)

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 삼각형 ABC의 변 AB 위를 움직이는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 O가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}=x(0<x<4)$라 할 때, 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이 되는 모든 실수 a의 값의 합은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



D031

○○○
(2017(6)고2-가형28)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

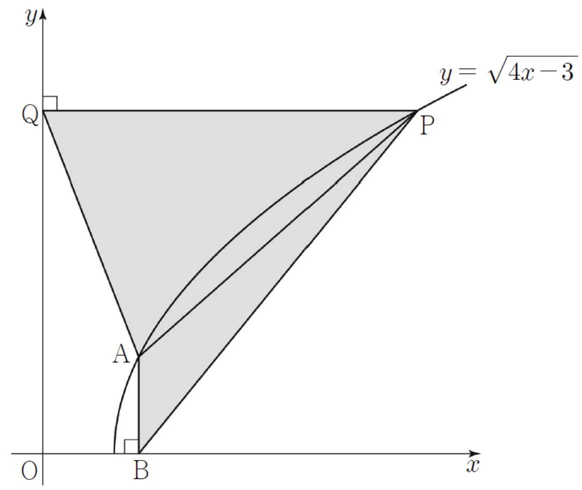
(가) 모든 실수 a에 대하여
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-5x}{x^2-4}$의 값이 존재한다.
(나) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)}-3x+1)$의 값이 존재한다.

$f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

D032

○○
(2018(11)고2-나형28)

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{4x-3}$ 위의 두 점 A$(1,\ 1)$과 P$(t,\ \sqrt{4t-3})$이 있다. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B, 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 삼각형 PAB와 삼각형 PQA의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$라 하자. $\lim_{t\to1+}\frac{T(t)}{S(t)}$의 값을 구하시오. (단, $t>1$) [4점]



D033

★★★
(2018(4)고3-나형30)

두 실수 a, b에 대하여 정의역이 $\{x|x \geq 0\}$인 함수

$$f(x)=\frac{-ax-b+1}{ax+b}\,(ab>0)$$

이 있다. 실수 k에 대하여 정의역이 $\{x|x \geq 0\}$인 함수

$$g(x)=\begin{cases}2k-f(x) & (f(x)<k)\\ f(x) & (f(x)\geq k)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\frac{1}{2}$
> (나) $|g(0)|=1$
> (다) 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 두 점 $\left(\frac{1}{28},\ -k\right)$, $(\alpha,\ -k)$에서만 만난다. (단, $\alpha>\frac{1}{28}$)

직선 $y=m(x-4\alpha)+\frac{3}{4}$이 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(m)$이라 할 때, 함수 $h(m)$이 불연속이 되는 모든 실수 m의 값의 합은 M이다. $252M$의 값을 구하시오. [4점]

D034

○○○
(2019(9)고2-가형30)

실수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases}2^{x-2} & (x<2)\\ 2^{-x+2} & (x\geq 2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-k|+k$라 하자. 직선 $y=2k$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(k)$라 할 때, $\lim_{k\to\frac{1}{4}-}\left\{h(k)h\left(k+\frac{1}{4}\right)\right\}$의 값을 구하시오. [4점]

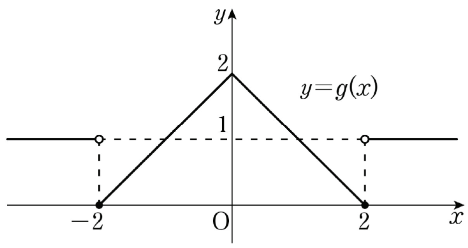
D035

○○ (2019(10)고3-나형14)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}-|x|+2 & (|x|\le 2)\\ 1 & (|x|>2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y=f(x-a)g(x)$의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? [4점]



① -16 ② -12 ③ -8
④ -4 ⑤ -1

D036

●●● (2019(11)고2-가형21)

세 실수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-|2x+a| & (x<0)\\ x^2+bx+c & (x\ge 0)\end{cases}$$

이고, 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 각각 $g(t)$, $h(t)$라 할 때, 두 함수 $g(t)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 치역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.
(나) $\lim_{t\to 2-} h(t)\times\lim_{t\to 2+} h(t)=12$

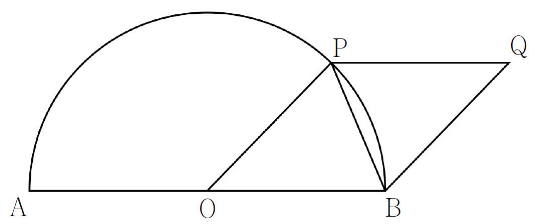
$f(-2)+f(6)$의 값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

D037

○○ (2019(11)고2-가형19)

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 선분 AB의 중점 O가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선과 점 B를 지나고 직선 OP와 평행한 직선이 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{BP}}=t$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{3-\overline{\mathrm{AQ}}}{t^2}$의 값은? (단, $0<t<\sqrt{2}$) [4점]



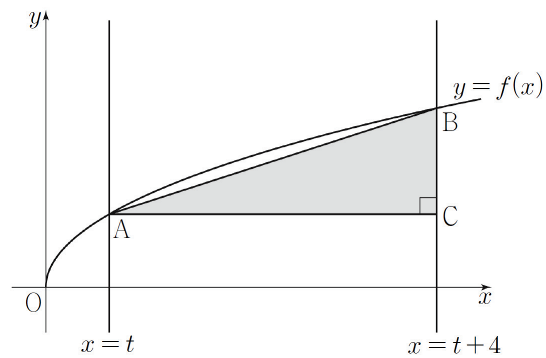
① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{6}$

D038

○○ (2019(11)고2-나형16)

그림과 같이 좌표평면에서 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=\sqrt{x}$의 그래프가 두 직선 $x=t$, $x=t+4$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 A에서 직선 $x=t+4$에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{t}\times S(t)}{2}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$

④ 2　⑤ $2\sqrt{2}$

D039

○○ (2020사관(1차)-나형11)

함수

$$f(x)=\begin{cases} a & (x<1) \\ x+3 & (x\ge 1)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $(x-a)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [3점]

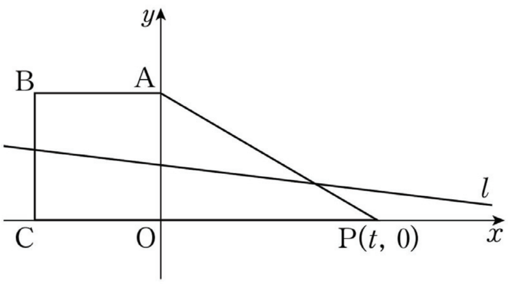
① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

D040

●●● (2020(3)고3-가형20)

그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$, $\mathrm{C}(-2,\ 0)$과 점 $\mathrm{P}(t,\ 0)(t>0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 OABC의 넓이와 직각삼각형 AOP의 넓이를 각각 이등분한다. 양의 실수 t에 대하여 직선 l의 y절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0+} f(t)$의 값은? [4점]



① $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$

D041

○○○ (2020(4)고3-나형21)

좌표평면에 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(\sqrt{2},\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ \sqrt{2})$가 있다. 점 O를 중심으로 하는 원 C의 반지름의 길이가 t일 때, 삼각형 ABP의 넓이가 자연수인 원 C 위의 점 P의 개수를 함수 $f(t)$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 P는 직선 AB 위에 있지 않다.) [4점]

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

ㄴ. $\lim_{t \to 1+} f(t) \neq f(1)$

ㄷ. $0<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D042

○○○
(2020(11)고2–공통20)

양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=\left|\dfrac{kx}{x-1}\right|$라 하자. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가

$$\lim_{t\to 0+} g(t)+\lim_{t\to 2-} g(t)+g(4)=5$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 6 ② $\dfrac{15}{2}$ ③ 9 ④ $\dfrac{21}{2}$ ⑤ 12

D043

●●●
(2020(11)고2–공통29)

5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=x^2-2ax+a^2-a+1,$$

$$g(x)=\begin{cases} x+b & (1<x<3) \\ 7-b & (x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 3) \end{cases}$$

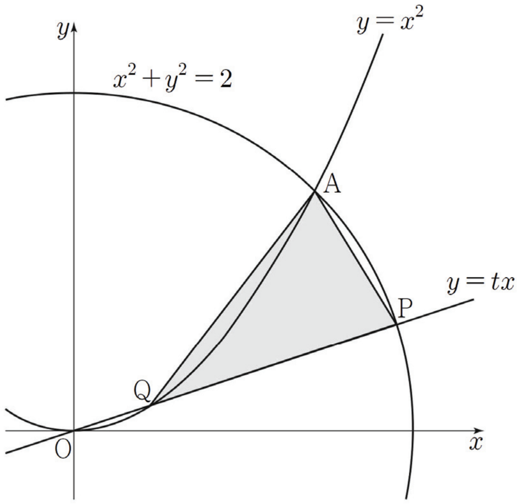
이라 하자. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

D044

○○○
(2020(11)고2-공통28)

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=2$와 곡선 $y=x^2$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 실수 $t(0<t<1)$에 대하여 직선 $y=tx$가 원 $x^2+y^2=2$, 곡선 $y=x^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

삼각형 PAQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}=k$이다. $20k$의 값을 구하시오. [4점]



D045

○○
(2021사관(1차)-나형26)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-10 & (x\le a) \\ \dfrac{x^2+ax+4a}{x-a} & (x>a) \end{cases}$$

가 $x=a$에서 연속일 때, $f(2a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

D046

○○○
(2021(3)고3-확률과통계20/미적분20/기하20)

실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오. [4점]

D047

(2022경찰대(1차)-공통8)

자연수 n과 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=2$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ \frac{1}{n} & (f(x)=0)\end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 n의 최솟값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

D048

(2022경찰대(1차)-공통24)

좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C와 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 3)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$이 있다.
실수 t $(0<t\leq 4)$에 대하여 $f(t)$를 집합
$\{\mathrm{X} \mid \mathrm{X}$는 원 C 위의 점이고, 삼각형 ABX의 넓이는 $t\}$
의 원소의 개수라 하자. 함수 $f(t)$가 연속하지 않은 모든 t의 값의 합을 구하시오. [4점]

D049

★★★ (2021(9)고2-공통30)

세 실수 $a(a\neq 0)$, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+(2b-3)x+a^2-3 & (x<k) \\ -\dfrac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1 & (x\geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수

$$g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$

에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 임의의 실수 α에 대하여 $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$가 존재한다.
>
> (나) 두 함수 $y=g(x)$와 $y=-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 5이다.

$k=p+q\sqrt{17}$일 때, $16(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

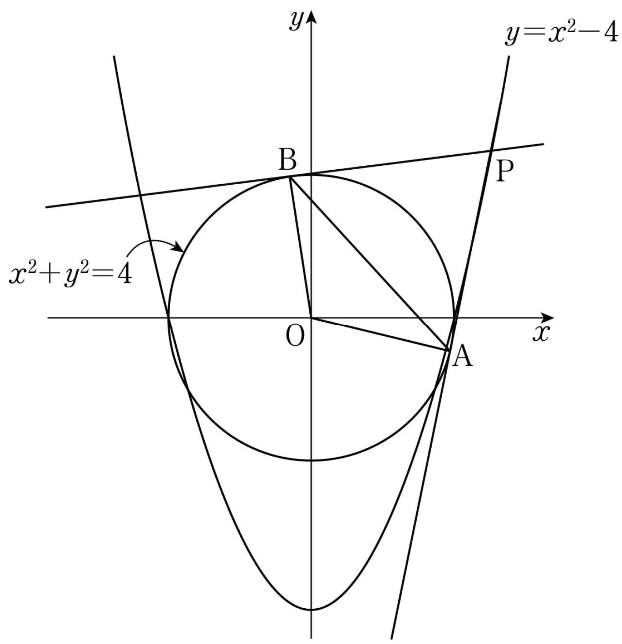
D050

●●● (2021(10)고3-확률과통계12/미적분12/기하12)

곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이를 $T(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

의 값은? (단, O는 원점이고, $t>2$이다.) [4점]



① 1 ② $\dfrac{5}{4}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $\dfrac{7}{4}$ ⑤ 2

D051

○○○ (2021(11)고2-공통13)

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\frac{1}{2}x^2+2x<f(x)<x^2+2x$$

를 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)+5x}{2f(x)-x}$의 값은? [3점]

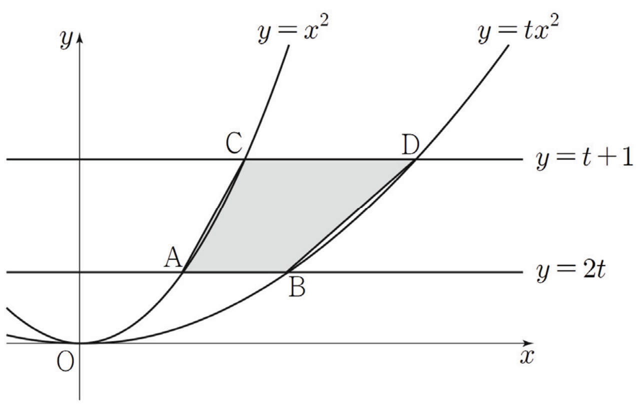
① $\dfrac{5}{3}$ ② 2 ③ $\dfrac{7}{3}$

④ $\dfrac{8}{3}$ ⑤ 3

D052

○○○ (2021(11)고2-공통18)

그림과 같이 실수 $t(0<t<1)$에 대하여 직선 $y=2t$가 두 곡선 $y=x^2$, $y=tx^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=t+1$이 두 곡선 $y=x^2$, $y=tx^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABDC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{S(t)}{(1-t)^2}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

D053

★★★ (2021(11)고2-공통30)

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=x^2-2ax+b$라 할 때, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x+a) & (x\le a) \\ |f(x)| & (x>a) \end{cases}$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$k\ge24$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$10a+b$의 값을 구하시오. [4점]

E 미분

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록

E. 미분

E001

○○ (2002사관(1차)-문과10)

$f(1)=2$, $f'(1)=3$을 만족하는 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{axf(x)-2a}{x-1} & (x\neq 1) \\ 9 & (x=1) \end{cases}$$

로 정의하자. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

E002

○○ (2002(11)고2-인문계21)

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) 극댓값과 극솟값의 차는 6이다.
(나) 극대점과 극소점의 중점이 $(1,\ 2)$이다.
(다) $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3,\ -1)$을 지난다.

이때, 방정식 $f'(x)=0$의 두 근의 곱은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

E003

○○○ (2002(10)고3-인문계11)

다항함수 $y=f(x)$가 세 실수 a, b, $c(a<b<c)$에 대하여 다음 부등식을 만족한다.

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}<0<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

이때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $f(c)<f(a)<f(b)$
ㄴ. 함수 $y=f(x)$는 구간 $(a,\ c)$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f'(c)<f'(b)<f'(a)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

E004

○○ (2005(10)고3-가형24)

삼차함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ m-f(x) & (a\leq x<b) \\ n+f(x) & (x\geq b) \end{cases}$$

로 정의한다. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 상수 a, b와 m, n의 값을 정할 때, $m+n$의 값을 구하시오. [4점]

E005

○○
(2005(10)고3-가형6)

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-5$이다.

이때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{f\left(2+\frac{1}{3n}\right)-f(2)\right\}$의 값은? [3점]

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

E006

○○
(2005(7)고3-가형13)

등식 $x^2+3y^2=9$를 만족시키는 실수 $x,\ y$에 대하여 x^2+xy^2의 최솟값은? [4점]

① $-\frac{5}{3}$　② -1　③ $-\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ 2

E007

○○
(2005(7)고3-가형15)

원점 O를 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 t분 후의 좌표를 각각 $x_1,\ x_2$라 하면

$$x_1=2t^3-9t^2,\ x_2=t^2+8t$$

이다. 선분 PQ의 중점을 M이라 할 때, 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 4분 동안 세 점 P, Q, M이 움직이는 방향을 바꾼 횟수를 각각 $a,\ b,\ c$라고 하자. 이때, $a+b+c$의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

E008

○○○
(2006사관(1차)-이과18)

삼차함수 $f(x)$에 대하여 두 함수 $g(x),\ h(x)$를

$$g(x)=f'(x),\ h(x)=g'(x)$$

로 정의하자. $g(0)=h(0)=0$이고 $f(0)h'(0)<0$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근에 대한 설명으로 옳은 것은? [3점]

① 서로 다른 세 개의 양의 실근을 갖는다.
② 서로 다른 세 개의 음의 실근을 갖는다.
③ 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 갖는다.
④ 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖는다.
⑤ 한 개의 양의 실근을 갖는다.

E009

○○○
(2006사관(1차)-이과15)

정의역이 실수 전체의 집합인 다항함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)$이다.

함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & (x \neq 0) \\ f'(0) & (x=0) \end{cases}$$

으로 정의하자. 보기에서 함수 $g(x)$에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=g(x)$이다.
ㄷ. 함수 $g(x)$는 일차함수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

E010

○○
(2006(10)고3-가형4)

두 함수

$f(x)=x+x^3+x^5$, $g(x)=x^2+x^4+x^6$

에 대하여

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h}$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

E011

○○
(2007(7)고3-가형13)

사차함수 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}(a+1)x^3-ax$가 $x=\alpha$, γ에서 극소, $x=\beta$에서 극대일 때, 실수 a의 값의 범위는? (단, $\alpha<0<\beta<\gamma<3$) [4점]

① $-\dfrac{9}{2}<a<-4$ ② $-4<a<-\dfrac{7}{2}$

③ $-\dfrac{7}{2}<a<-3$ ④ $-3<a<-\dfrac{5}{2}$

⑤ $-\dfrac{5}{2}<a<-2$

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

D 함수의 극한과 연속

1	②	2	15	3	④	4	④	5	⑤
6	21	7	④	8	④	9	32	10	③
11	④	12	④	13	②	14	②	15	③
16	⑤	17	⑤	18	16	19	12	20	③
21	②	22	③	23	③	24	56	25	③
26	⑤	27	③	28	②	29	④	30	19
31	60	32	2	33	19	34	4	35	①
36	①	37	②	38	④	39	⑤	40	②
41	⑤	42	①	43	7	44	15	45	6
46	8	47	①	48	5	49	28	50	②
51	①	52	④	53	44				

E 미분

1	⑤	2	③	3	④	4	118	5	②
6	①	7	③	8	⑤	9	③	10	⑤
11	①	12	②	13	⑤	14	45	15	⑤
16	⑤	17	①	18	③	19	①	20	③
21	③	22	①	23	③	24	①	25	54
26	①	27	②	28	①	29	②	30	③
31	11	32	②	33	④	34	①	35	③
36	⑤	37	30	38	196	39	17	40	④
41	③	42	9	43	⑤	44	①	45	②
46	130	47	23	48	②	49	48	50	56
51	⑤	52	480	53	60	54	④	55	①
56	⑤	57	64	58	⑤	59	②	60	59
61	④	62	⑤	63	20	64	36	65	82
66	③	67	39	68	①	69	32	70	①
71	②	72	3	73	②	74	19	75	④
76	⑤	77	④	78	24	79	16	80	③
81	②	82	30	83	③	84	⑤	85	①
86	①	87	②	88	35	89	①	90	160
91	⑤	92	34	93	④	94	③	95	①
96	36	97	③	98	①	99	64	100	③
101	①	102	③	103	③	104	④	105	①
106	①	107	108	108	③	109	18		

F 적분

1	−1	2	③	3	②	4	⑤	5	④
6	50	7	③	8	④	9	26	10	③
11	16	12	⑤	13	①	14	27	15	①
16	12	17	54	18	②	19	④	20	③
21	①	22	④	23	⑤	24	③	25	200
26	⑤	27	17	28	⑤	29	4	30	28
31	①	32	⑤	33	⑤	34	②	35	64
36	④	37	②	38	②	39	27	40	②
41	32	42	①	43	⑤	44	250	45	④
46	20	47	⑤	48	⑤	49	20	50	①
51	36	52	137	53	③	54	20	55	④
56	⑤	57	②	58	⑤	59	⑤	60	⑤
61	9	62	⑤	63	35	64	①	65	57
66	⑤	67	②	68	⑤	69	25	70	⑤
71	21	72	340	73	80	74	②	75	④
76	③	77	⑤	78	②	79	⑤	80	12
81	37	82	③	83	432	84	②	85	80
86	②	87	①	88	②	89	50	90	21
91	③	92	②	93	8	94	⑤	95	41
96	④	97	②	98	13	99	④	100	④
101	17	102	16	103	251	104	②	105	②
106	⑤	107	290	108	②	109	56	110	⑤
111	2								

해설 목차

수학 II

D 함수의 극한과 연속

1	②	2	15	3	④	4	④	5	⑤
6	21	7	④	8	④	9	32	10	③
11	④	12	④	13	②	14	②	15	③
16	⑤	17	⑤	18	16	19	12	20	③
21	②	22	③	23	③	24	56	25	③
26	⑤	27	③	28	②	29	④	30	19
31	60	32	2	33	19	34	4	35	①
36	①	37	②	38	④	39	⑤	40	②
41	⑤	42	①	43	7	44	15	45	6
46	8	47	①	48	5	49	28	50	②
51	①	52	④	53	44				

D001 ㅣ답 ②

[풀이]

〈증명〉

예각삼각형의 세 변의 길이를 a, b, $c(a<b<c)$로 놓으면 $a^2+b^2>c^2$이다.

그런데 x만큼 짧아진 삼각형의 세 변의 길이는

$a-x$, $b-x$, $c-x$이므로 $0<x<\boxed{a+b-c}$이다.

$(\because a-x+b-x>c-x$에서 $x<a+b-c)$

따라서 등식 $(a-x)^2+(b-x)^2=(c-x)^2$을 만족시키는 실수 x가 $0<x<\boxed{a+b-c}$에서 존재함을 보이면 된다.

$f(x)=(a-x)^2+(b-x)^2-(c-x)^2$으로 놓으면

$f(x)$는 연속함수이고,

$f(0)\boxed{>}0$, $f(\boxed{a+b-c})\boxed{<}0$이므로

$(\because f(0)=a^2+b^2-c^2>0$,

$f(a+b-c)=(c-b)^2+(c-a)^2-(2c-a-b)^2$

$=B^2+A^2-(A+B)^2=-2AB<0$

(단, $A=c-a$, $B=c-b$))

사이값 정리에 의해 $0<x<\boxed{a+b-c}$에서 $f(x)=0$인 x가 존재한다.

그러므로 짧아진 세 선분을 각 변으로 하는 직각삼각형이 존재한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 각각

(가): $a+b-c$

(나): $>$

(다): $<$

답 ②

D002 ㅣ답 15

[풀이1] 시험장

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=2$$

$\Rightarrow f(x)-x^2=2x+c$ (단, c는 상수)

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$$\lim_{x\to1} g(x)=g(1),\ 즉\ \lim_{x\to1}\frac{2x+c}{x-1}=k$$

$\Rightarrow c=-2$, $k=2$

$\therefore\ k+f(3)=2+13=15$

답 15

[풀이2]

만약 $f(x)$가 3차 이상의 다항함수이면

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_3x^3+(a_2-1)x^2+a_1x+a_0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_3x^2+(a_2-1)x+a_1+\frac{a_0}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$=\infty$

$(\leftarrow f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0(a_3\neq0)$으로 둔 것이다.)

이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$는 일차함수 또는 이차함수이다.

만약 $f(x)$가 일차함수이면

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+a_1x+a_0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+a_1+\frac{a_0}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$=-\infty$

$(\leftarrow f(x)=a_1x+a_0(a_1\neq0)$으로 둔 것이다.)

이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$는 이차함수이다.

$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$으로 두자.

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-1)x^2+bx+c}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{bx+c}{x-1}$$

(이때, 수렴하기 위해서는 $a=1$이어야 한다.)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{b+\frac{c}{x}}{1-\frac{1}{x}} = b = 2$$

$a=1$, $b=2$이므로 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = x^2+2x+c$

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$

이므로

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+c}{x-1} = k \quad \cdots ㉠$$

함수의 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 1}(2x+c) = \lim_{x\to 1}\frac{2x+c}{x-1}\times(x-1)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x+c}{x-1}\times\lim_{x\to 1}(x-1) = k\times 0 = 0$$

즉, $2+c=0$에서 $c=-2$

이를 ㉠에 대입하여 k의 값을 구하면

$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2 = k$ 즉, $k=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

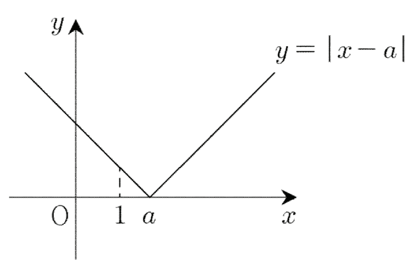
$f(x) = x^2+2x-2$

$\therefore\ k+f(3) = 2+13 = 15$

답 15

D003 |답 ④

[풀이]



$x\to 1$일 때, $a > x$이므로

$|x-a| = a-x$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x-a|-(a-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{a-x-(a-1)}{x-1}$$

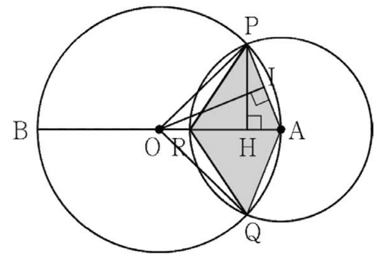
$$= \lim_{x\to 1}\frac{-x+1}{x-1} = -1$$

답 ④

D004 |답 ④

[풀이]

점 P에서 선분 RA에 내린 수선의 발을 H, 점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



원의 정의에 의하여

$\overline{OP}=1$, $\overline{IP} = \frac{1}{2}\overline{AP} = \frac{r}{2}$

직각삼각형 OIP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{OI} = \frac{\sqrt{(2+r)(2-r)}}{2}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle\, OAP$ 의 넓이$) = \frac{1}{2}\overline{OA}\,\overline{PH} = \frac{1}{2}\overline{OI}\,\overline{PA}$

$$\frac{1}{2}\times 1\times\overline{PH} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{(2+r)(2-r)}}{2}\times r$$

정리하면

$$\overline{PH} = \frac{r\sqrt{(2+r)(2-r)}}{2}$$

$$S(r) = 2\times\frac{1}{2}\overline{RA}\,\overline{PH} = \frac{r^2\sqrt{(2+r)(2-r)}}{2}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{r\to 2-}\frac{S(r)}{\sqrt{2-r}}$$

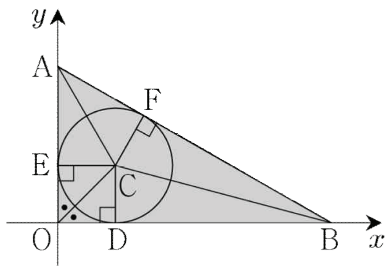
$$= \lim_{r\to 2-}\frac{r^2\sqrt{2+r}}{2} = 4$$

답 ④

D005 |답 ⑤

[풀이1]

삼각형 AOB의 중심을 C, 점 C에서 x축, y축, 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자.



(단, ●$=45°$)

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{x^2+1}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle AOB$의 넓이)=($\triangle CAO$의 넓이)+($\triangle COB$의 넓이)+($\triangle CBA$의 넓이)

$$\frac{x}{2}=\frac{1+x+\sqrt{x^2+1}}{2}r$$

정리하면

$$r=\frac{x}{x+1+\sqrt{x^2+1}}$$

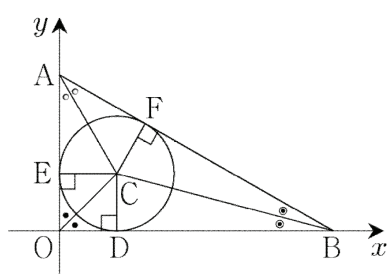
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{r}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

[참고]

r을 다음과 같이 유도해도 좋다.



(단, ●$=45°$)

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB}=\sqrt{x^2+1}$

사각형 CEOD는 한 변의 길이가 r인 정사각형이므로

$\overline{AE}=\overline{AO}-\overline{EO}=1-r$,

$\overline{DB}=\overline{OB}-\overline{OD}=x-r$

그런데 $\overline{AF}=\overline{AE}$, $\overline{FB}=\overline{BD}$이므로

($\because \triangle CAE\equiv\triangle CAF$, $\triangle CBF\equiv\triangle CBD$)

$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{FB}=\overline{AE}+\overline{BD}$

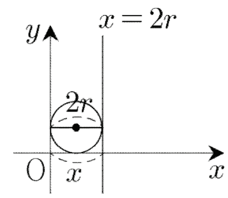
즉, $\sqrt{x^2+1}=x+1-2r$

정리하면

$$r=\frac{x+1-\sqrt{x^2+1}}{2}=\frac{x}{x+1+\sqrt{x^2+1}}$$

[풀이2] 시험장

$x\to 0+$일 때, 직선 AB는 '점 B를 지나고 y축에 평행한 직선' 에 한없이 가까워진다.



위의 그림처럼 $x\to 0+$일 때,

$x\approx 2r$이므로 $\frac{r}{x}\to\frac{1}{2}$이다.

답 ⑤

D006 | 답 21

[풀이]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 2}g(x)\left\{2\frac{f(x)}{g(x)}+1\right\}=1$(←조건(가))

$x\to 2$일 때, $g(x)\to\infty$(←조건(나))이므로

$2\frac{f(x)}{g(x)}+1\to 0$ 즉, $2\frac{f(x)}{g(x)}\to -1$이다.

$(\because \lim_{x\to 2}\left\{2\frac{f(x)}{g(x)}+1\right\}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)+g(x)}{g(x)}=\frac{1}{\infty}=0)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{1}{2}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{4f(x)-40g(x)}{2f(x)-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4\frac{f(x)}{g(x)}-40}{2\frac{f(x)}{g(x)}-1}$$

$$=\frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-40}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1}=21$$

답 21

D007 | 답 ④

[풀이1]

원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+2t}$

원 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$tx+\sqrt{2t}\,y=t^2+2t$

$y=0$을 대입하면 $x=t+2$, 즉 $\overline{\mathrm{OQ}}=t+2$

한편

($\triangle\mathrm{POQ}$의 넓이)

$=\frac{1}{2}(t+2)\sqrt{2t}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+2t}\times\overline{\mathrm{PQ}}$

이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2t+4}$

함수의 극한의 성질에 의하여

$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{\pi(t^2+2t)}{(t+2)-\sqrt{2t+4}}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{\pi t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t+2}-\sqrt{2}}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{\pi t\sqrt{t+2}(\sqrt{t+2}+\sqrt{2})}{t}$

$=\lim_{t\to 0+}\{\pi\sqrt{t+2}(\sqrt{t+2}+\sqrt{2})\}=4\pi$

답 ④

[풀이2] 시험장

원 $x^2+y^2=t^2+2t$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$tx+\sqrt{2t}\,y=t^2+2t$

이므로 $\mathrm{Q}(t+2,\ 0)$

$S(t)=\pi\overline{\mathrm{OP}}^2$이므로

$t\to 0+$일 때,

$\frac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}$

$=\frac{\pi\overline{\mathrm{OP}}^2(\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{PQ}})}{(\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}})(\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{PQ}})}$

$=\frac{\pi\overline{\mathrm{OP}}^2(\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{PQ}})}{\overline{\mathrm{OP}}^2}$

$=\pi(\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{PQ}})$

$\approx 2\pi\overline{\mathrm{OQ}}$ $(\because \overline{\mathrm{OQ}}\approx\overline{\mathrm{PQ}})$

$\approx 4\pi$

답 ④

D008 | 답 ④

[풀이1]

$h(x)=2f(x)-3g(x)$로 두면

$3g(x)=2f(x)-h(x)$이고, $\lim_{x\to\infty}h(x)=2$이다.

함수의 극한의 성질에 의하여

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6f(x)+h(x)}{2f(x)-h(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{h(x)}{f(x)}}{2-\frac{h(x)}{f(x)}}=\frac{6+0}{2-0}=3$

($\because x\to\infty$일 때,

이차함수 $f(x)\to\infty$ 또는 $f(x)\to-\infty$)

답 ④

[풀이2] 시험장

문제에서 주어진 등식에서

$\lim_{x\to\infty}3f(x)\left\{\frac{2}{3}-\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=2$

이때, $f(x)\to\pm\infty$이므로

$\frac{2}{3}-\frac{g(x)}{f(x)}\to 0$, 즉 $\frac{g(x)}{f(x)}\to\frac{2}{3}$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{8}{3}\frac{f(x)}{g(x)}-1\right\}=\frac{8}{3}\times\frac{3}{2}-1=3$

답 ④

D009 | 답 32

[풀이]

함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

조건 (가)에 의하여

$g(0)=c=8$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=ax^2+bx+8$

함수 $f(x)g(x)$의 방정식은

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{2ax^2+2bx+16}{x-2} & (x\neq 2)\\ ax^2+bx+8 & (x=2)\end{cases}$$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 연속이어야 한다.

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to2}\frac{2ax^2+2bx+16}{x-2}$

$=4a+2b+8=f(2)g(2)$ $\cdots(*)$

함수의 극한의 성질에 의하여

$\lim_{x\to2}(2ax^2+2bx+16)$

$=\lim_{x\to2}\frac{2ax^2+2bx+16}{x-2}\times(x-2)$

$=(4a+2b+8)\times0=0$

즉, $8a+4b+16=0$

정리하면 $b=-2a-4$ $\cdots㉠$

이를 (*)에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{2ax^2-(4a+8)x+16}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(ax-4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}2(ax-4)=4a-8=0$

풀면

$a=2$

이를 ㉠에 대입하면

$b=-8$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=2x^2-8x+8$

$\therefore\ g(6)=32$

답 32

D010 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1+(-1)=0$

▸ ㄴ. (거짓)

$\lim_{x\to1}f(-x)=\lim_{t\to-1}f(t)$의 값은 존재하지 않는다.

왜냐하면 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 좌극한(1)과 우극한(-1)이 같지 않기 때문이다.

▸ ㄷ. (참)

$f(1)f(-1)=1\times(-1)=-1$

$x\to1-$일 때, $f(x)f(-x)\to1(-1)=-1$

$x\to1+$일 때, $f(x)f(-x)\to(-1)1=-1$

이므로 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

D011 | 답 ④

[풀이]

$x=-t$로 두면 $x\to1-$일 때, $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to1-}f(-x)=\lim_{x\to-1+}f(t)=1$

$\therefore\ \lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(-x)$

$=0+1=1$

답 ④

D012 | 답 ④

[풀이]

$\lim_{x\to1+}f(x-1)=\lim_{t\to0+}f(t)=0$

$\therefore\ \lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x-1)=1+0=1$

답 ④

D013 | 답 ②

[풀이1]

$f(x)$가 상수함수이거나 일차함수이면

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$

이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$의 2차 이상의 다항함수이다.

$f(x)$가 3차 이상의 다항함수이면

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\infty$ ($\leftarrow f(x)$의 최고차항의 계수가 양수)

또는

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=-\infty$ ($\leftarrow f(x)$의 최고차항의 계수가 음수)

이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)$는 이차함수이다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=ax^2+bx+c$ (단, $a\neq0$)

함수의 극한의 성질에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)$

$=a+0+0=a=1$ $\cdots㉠$

함수의 극한의 성질에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\times(x-1)=k\times0=0$

다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(1)=0$ …ⓛ

함수 $h(x)$의 $x=2$에서의 우극한은

$\lim_{x\to2+}h(x)=\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=f(2)\times0=0$

함수 $h(x)$의 $x=2$에서의 함숫값은

$h(2)=f(2)g(2)=3f(2)$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to2+}h(x)=h(2)$ 즉, $0=3f(2)$

풀면

$f(2)=0$ …ⓒ

ⓖ, ⓛ, ⓒ에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)(x-2)$

$\therefore\ k=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)=-1$

답 ②

[풀이2] 시험장

문제에서 주어진 두 등식에서 다음을 빠르게 유도할 수 있다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1 \Rightarrow f(x)=x^2+\cdots$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=k \Rightarrow f(1)=0,\ f'(1)=k$

이제 $f(2)=0$임을 보이자.

$f(x)$: 연속

$g(x)$: $x=2$에서만 불연속

(단, $x=2$에서의 좌극한, 우극한, 함숫값은 모두 존재)

$h(x)$: 연속

$\Rightarrow f(2)=0$

이상을 정리하면

$f(x)=x^2+\cdots,\ f(1)=0,\ f(2)=0,$

$f'(1)=k$

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)(x-2)$

$f'(x)=2x-3,\ f'(1)=-1=k$

$\therefore\ k=-1$

답 ②

D014 | 답 ②

[풀이]

▶ ㄱ. (참)

구간 $(-1,\ 1)$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로

$g(0)=1$

▶ ㄴ. (참)

$x\to1-$일 때, 구간 $(x-1,\ x+1)((0-,\ 2-))$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로

$g(x)\to1$

$x\to-1+$일 때, 구간 $(x-1,\ x+1)((-2+,\ 0+))$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로

$g(x)\to1$

$\therefore\ \lim_{x\to1-}g(x)+\lim_{x\to-1+}g(x)=2$

▶ ㄷ. (거짓)

$\frac{g(0)}{f(0)}=\frac{1}{2},$

$x\to0+$일 때, 구간 $(x-1,\ x+1)((-1+,\ 1+))$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로

$\frac{g(x)}{f(x)}\to\frac{1}{1}=1$

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{f(x)}\neq\frac{g(0)}{f(0)}$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

D015 | 답 ③

[풀이1]

다항함수는 연속함수이므로 일차함수 $g(x)$는 연속함수이다.

함수 $f(x)$가 두 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 연속이므로, 함수 $f(x)g(x)$는 두 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 연속이다.

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 우극한은

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=0\times g(1)=0$

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 좌극한은

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=2\times g(1)=2g(1)$

함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 함숫값은

$f(1)g(1)=g(1)$

함수의 연속의 정의에 의하여

$0=2g(1)=g(1)$ 즉, $g(1)=0$ …ⓖ

$g(0) = \lim_{x \to 1-} f(x) = 2$ ⋯㉡

함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x) = ax + b(a \neq 0)$

㉠, ㉡에 의하여

$g(1) = a + b = 0$, $g(0) = b = 2$

연립방정식을 풀면

$a = -2$, $b = 2$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x) = -2x + 2$

$\therefore\ g(-1) = 4$

답 ③

[풀이2] 시험장

$g(0) = 2$ ⋯㉠

$g(x)$: 연속

$f(x)$: $x = 1$에서만 불연속

(단, $x = 1$에서의 좌극한, 함숫값, 우극한 존재함)

$f(x)g(x)$: 연속

$\Rightarrow g(1) = 0$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서

$g(0) = 2$, $g(1) = 0$

$g(x) = -2x + 2$

$\therefore\ g(-1) = 4$

답 ③

D016 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$x \to 0+$일 때, $f(x)$는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 수렴하므로

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$

▸ ㄴ. (참)

$x \to 1-$일 때, $f(x)$는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 수렴하므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$

$x \to 1-$일 때, $g(x)$는 0보다 작은 값을 가지면서 0에 수렴하므로

$\lim_{x \to 1-} g(x) = 0$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x \to 1-} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$

▸ ㄷ. (참)

보기 ㄴ과 마찬가지의 방법으로

$\lim_{x \to 1+} f(x)g(x) = 0 \times 1 = 0$

$f(1)g(1) = 0 \times 1 = 0$

$\lim_{x \to 1} f(x)g(x) = f(1)g(1)$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x = 1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

D017 | 답 ⑤

[풀이]

$g(x) = \sqrt{x+2}$ 이므로

두 점 P, Q의 좌표는 각각

$\mathrm{P}(t,\ t^2 - 2)$, $\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{t+2})$

$\overline{\mathrm{PQ}} = t^2 - 2 - \sqrt{t+2}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{t \to 2+} \frac{h(t)}{t-2}$$

$$= \lim_{t \to 2+} \frac{t^2 - 2 - \sqrt{t+2}}{t-2}$$

$$= \lim_{t \to 2+} \frac{t^2 - 4 - (\sqrt{t+2} - 2)}{t-2}$$

$$= \lim_{t \to 2+} \left(t + 2 - \frac{t-2}{(t-2)(\sqrt{t+2} + 2)} \right)$$

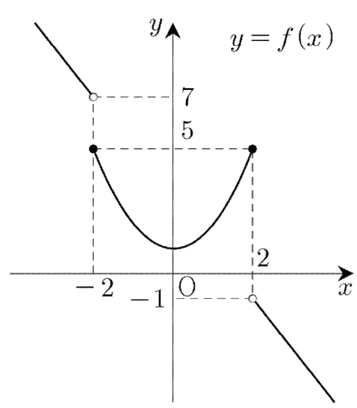
$$= 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

답 ⑤

D018 | 답 16

[풀이]

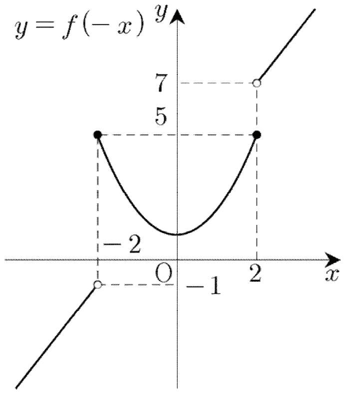
함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

함수 $f(-x)$의 그래프와 일치한다.

함수 $f(-x)$의 그래프는



$\lim_{x \to 2+} f(-x)\{f(x)+k\} = 7 \times (k-1)$

$f(-2)\{f(2)+k\} = 5 \times (k+5)$

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x \to 2+} f(-x)\{f(x)+k\} = f(-2)\{f(2)+k\}$

이므로

$7 \times (k-1) = 5 \times (k+5)$

풀면

$\therefore \ k = 16$

답 16

D019 | 답 12

[풀이]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

$x \geq 1$일 때, $x^2 - ax + 3 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 3 - \frac{a^2}{4}$

에서 $\frac{a}{2} \leq 1$, 즉 $a \leq 2$ $\cdots$ ㉠

$x < 1$일 때, $-x^2 + 2bx - 3 = -(x-b)^2 + b^2 - 3$

에서 $b \geq 1$ $\cdots$ ㉡

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$, 즉 $2b - 4 = 4 - a$, $a + 2b = 8$

$b = \frac{8-a}{2} \geq 1$ ($\because$ ㉡)에서 $a \leq 6$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉢에서 a의 범위는 $a \leq 2$이므로

$3a + 2b = 8 + 2a \leq 12$

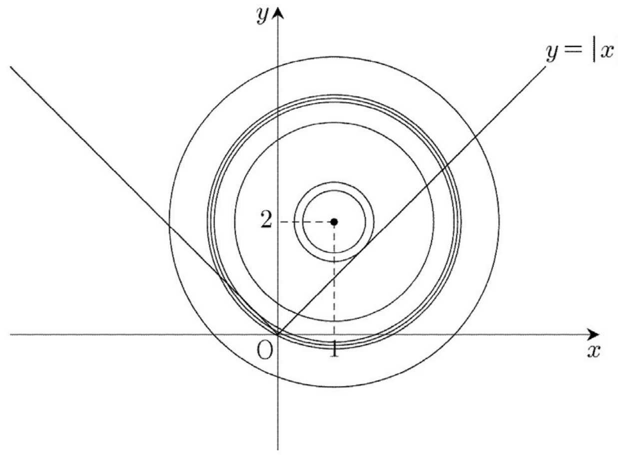
(단, 등호는 $a = 2(b = 3)$일 때 성립한다.)

답 12

D020 | 답 ③

[풀이]

r의 값을 크게 하면서 함수 $y=|x|$의 그래프와 중심이 $(1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 위치 관계를 관찰하자.



점 $(1,\ 2)$와 직선 $y=x$ 사이의 거리를 d_1,

점 $(1,\ 2)$와 직선 $y=-x$ 사이의 거리를 d_2,

두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$ 사이의 거리를 d_3이라고 하자.

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $d_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$

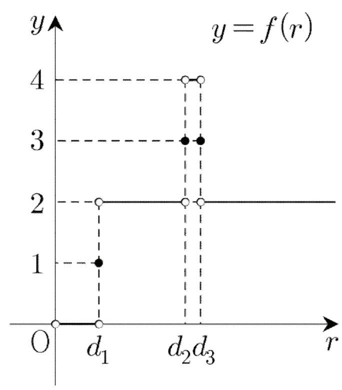
두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$d_3 = \sqrt{5}$

함수 $f(r)$의 방정식은

$$f(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < d_1) \\ 1 & (r = d_1) \\ 2 & (d_1 < r < d_2) \\ 3 & (r = d_2) \\ 4 & (d_2 < r < d_3) \\ 3 & (r = d_3) \\ 2 & (r > d_3) \end{cases}$$

함수 $f(r)$의 그래프는



따라서 함수 $f(r)$이 불연속이 되는 점의 개수는 3이다.

답 ③

D021 ㅣ답 ②

[풀이1]

문제에서 주어진 곡선과 직선의 방정식을 연립하면

$-x^2+6=x$

정리하면

$x^2+x-6=0$

좌변을 인수분해하면

$(x+3)(x-2)=0$

풀면

$x=-3$ 또는 $x=2$

점 A는 제1사분면에 속하므로

$A(2,\ 2)$

세 점 B, Q, R의 좌표는

$B(2,\ 0)$, $Q(2,\ a)$, $R(a,\ -a^2+6)$

두 선분 PQ, PR의 길이는

$\overline{PQ}=2-a$, $\overline{PR}=-a^2-a+6$

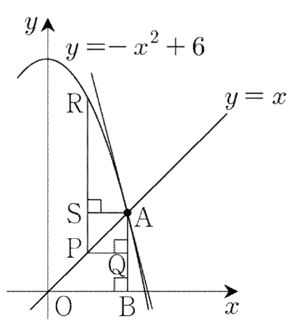
함수의 극한의 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{a\to2-}\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}=\lim_{a\to2-}\frac{2-a}{-a^2-a+6}$$

$$=\lim_{a\to2-}\frac{2-a}{(a+3)(2-a)}=\lim_{a\to2-}\frac{1}{a+3}=\frac{1}{5}$$

답 ②

[풀이2] 시험장



$a\to2-$일 때,

$\dfrac{\overline{RS}}{\overline{SA}}\to$ |점 A에서의 접선의 기울기|

$=4$ $(\because y'=-2x)$

이므로

$a\to2-$일 때,

$$\therefore \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}=\frac{1}{\dfrac{\overline{RS}+\overline{SP}}{\overline{SA}}}=\frac{1}{\dfrac{\overline{RS}}{\overline{SA}}+1}\to\frac{1}{5}$$

답 ②

D022 ㅣ답 ③

[풀이]

조건 (가)에서 다항함수 $f(x)-2g(x)$는 이차함수이다.

조건 (나)에서 다항함수 $f(x)+3g(x)$는 삼차함수이다.

$f(x)+3g(x)-(f(x)-2g(x))$

$=$(3차식)$-$(2차식)$=$(3차식)$=5g(x)$

이므로 $g(x)$는 삼차함수이다.

$f(x)-2g(x)=f(x)-$(3차식)$=$(2차식)

이므로 $f(x)$는 삼차함수이다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq0)$

$g(x)=a'x^3+b'x^2+c'x+d'\,(a'\neq0)$

로 두자.

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-2a')x^3+\cdots}{x^2}=1$$

에서 $a-2a'=0$이다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+3a')x^3+\cdots}{x^3}=1$$

에서 $a+3a'=1$이다.

연립방정식을 풀면

$a=\dfrac{2}{5}$, $a'=\dfrac{1}{5}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{5}x^3+\cdots}{x^3}=\frac{3}{5}$$

답 ③

D023 ㅣ답 ③

[풀이]

함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x)=x^2+ax+b$

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 방정식은

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4x+5} & (x\le2)\\[2ex] \dfrac{x^2+ax+b}{x-2} & (x>2)\end{cases}$$

(이때,

$x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$

임을 상기하자.)

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}$,

$\dfrac{g(2)}{f(2)}=4+2a+b$

에서

$\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=4+2a+b$ $\cdots$ ㉠

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\displaystyle\lim_{x\to 2+}(x^2+ax+b)$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}\times(x-2)$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}\times\lim_{x\to 2+}(x-2)$

$=(4+2a+b)\times 0=0$

즉,

$\displaystyle\lim_{x\to 2+}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

에서 $b=-2a-4$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$\displaystyle\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2+}(x+2+a)$

$=4+a=0$ 즉, $a=-4$, $b=4$

함수 $g(x)$의 방정식은

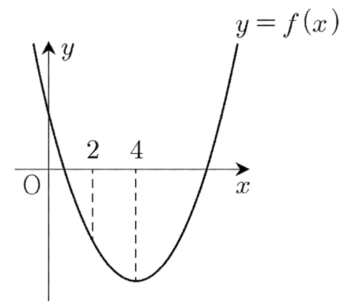
$g(x)=x^2-4x+4$

$\therefore\ g(5)=9$

답 ③

D024 | 답 56

[풀이]



조건 (가)에 의하여 $f(0)f(2)<0$이어야 한다.

($\because$ 사이값 정리)

$f(0)f(2)=a(a-12)<0$

풀면

$0<a<12$ $\cdots$ ㉠

$f(x)=(x-4)^2+a-16$이므로

$f(x+4)=x^2+a-16$이다.

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=\begin{cases}2x+5a & (x\ge a)\\ x^2+a-16 & (x<a)\end{cases}$

$\displaystyle\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=f(a)(a^2+a-16)$

$f(a)g(a)=f(a)7a$

함수의 연속의 정의에 의하여

$\displaystyle\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=f(a)g(a)$

이므로

$f(a)(a^2+a-16)=f(a)7a$

정리하면

$f(a)(a-8)(a+2)=0$

$\Leftrightarrow$

$f(a)=0$ 또는 $(a-8)(a+2)=0$

$\Leftrightarrow$

$a(a-7)=0$ 또는 $(a-8)(a+2)=0$

풀면

$a=0$ 또는 $a=7$ 또는 $a=8$ 또는 $a=-2$

이 중에서 ㉠을 만족시키는 a는 7, 8이다.

따라서 구하는 값은 56이다.

답 56

D025 | 답 ③

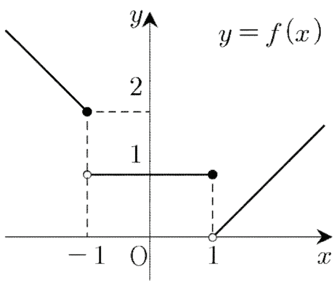
[풀이]

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 모두 존재하지만 연속이 아니므로

함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속일 필요충분조건은
$f(2k)=0$이다. (이때, 함수 $f(x)$는 $x=2k$에서 연속이다.)
방정식 $f(x)=0$을 풀면
$x=\pm 4,\ x=\pm\sqrt{2}$
$2k=\pm 4,\ \pm\sqrt{2}$에서 $k=\pm 2,\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
따라서 구하는 값은
$2(-2)\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2$
답 ③

D026 |답 ⑤

[풀이]
함수 $f(x)$의 그래프는



조건 (가)에서 다음과 같은 결과를 얻는다.
함수 $f(x)$는 $x=-1,\ x=1$에서 불연속이고
함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1,\ x=1$에서 연속이므로
$g(-1)=g(1)=0$
이어야 한다.
조건 (나)에서 다음과 같은 결과를 얻는다.
함수 $f(x)$는 $x=-1,\ x=1$에서 불연속이고
함수 $f(x)g(x+k)$는 $x=-1,\ x=1$에서 연속이므로
$g(-1+k)=g(1+k)=0$
이어야 한다.
함수 $g(x)$는 삼차함수이므로 네 수
$-1,\ 1,\ -1+k,\ 1+k$ $\cdots$ ㉠
가 모두 다를 수 없다. 다시 말하면 어떤 두 수는 서로 같아야 한다.
$-1+k=1$이면 $k=2$ (←경우1)
$1+k=-1$이면 $k=-2$ (←경우2)

- (경우1) $k=2$인 경우

㉠을 다시 쓰면
$-1,\ 1,\ 1,\ 3$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$
그런데 $g(0)=3>0$이므로
문제에서 주어진 조건이 성립하지 않는다.

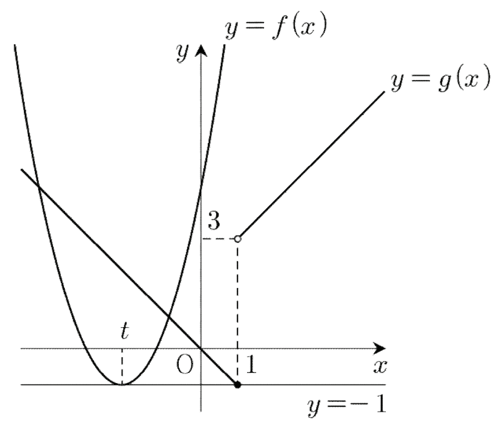
- (경우2) $k=-2$인 경우

㉠을 다시 쓰면
$-1,\ 1,\ -3,\ -1$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=(x+1)(x-1)(x+3)$
$g(0)=-3<0$이므로
문제에서 주어진 조건이 성립한다.
따라서 함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=(x+1)(x-1)(x+3)$
$\therefore\ g(2)=15$
답 ⑤

D027 |답 ③

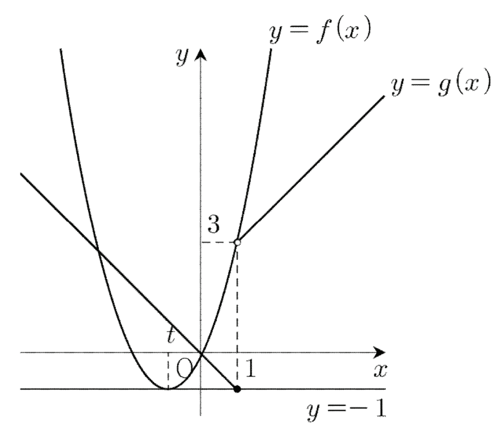
[풀이]
t의 값을 변화시키면서 두 함수 $f(x),\ g(x)$의 그래프의 교점의 개수를 세자.

- $t<-1$인 경우



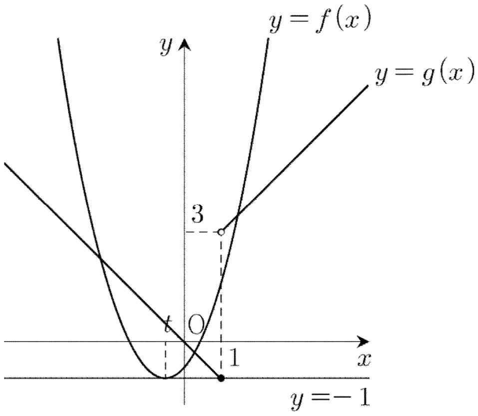
두 함수 $f(x),\ g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

- $t=-1$인 경우



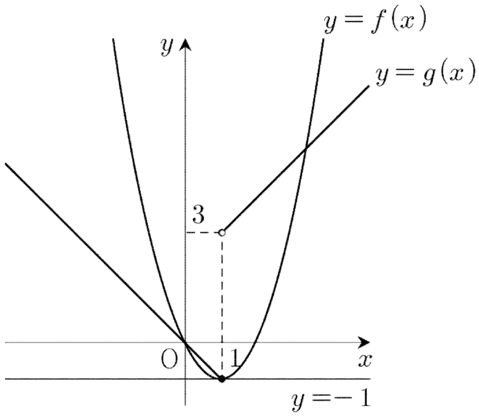
두 함수 $f(x),\ g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

- $-1<t<1$인 경우



두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 3이다.

- $t=1$인 경우



두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 3이다.

- $1<t<\dfrac{5}{4}$인 경우

곡선 $y=f(x)$의 방정식과 직선 $y=-x$의 방정식을 연립하면

$(x-t)^2-1=-x$

정리하면

$x^2-(2t-1)x+t^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2t-1)^2-4(t^2-1)=-4t+5$

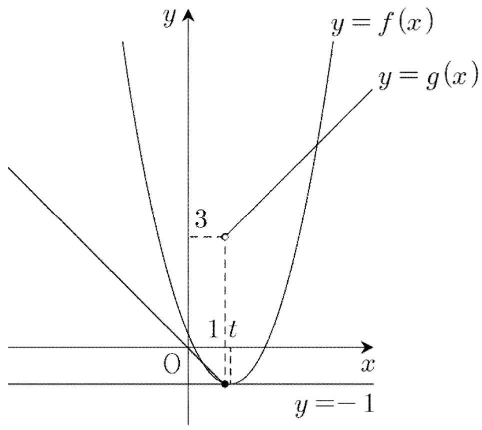
$D=0$에서 $t=\dfrac{5}{4}$

이때, 이차방정식은

$x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{16}=0$ 즉, $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2=0$

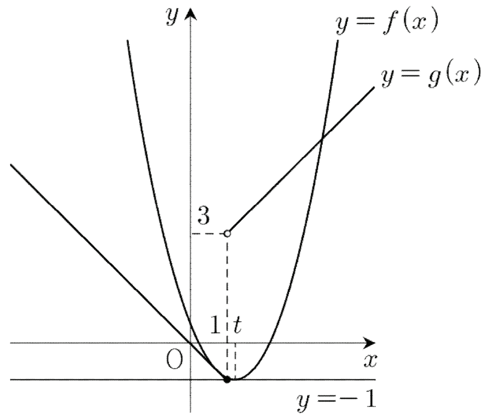
풀면 $x=\dfrac{3}{4}$

따라서 $t=\dfrac{5}{4}$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$는 접한다. 이때, 접점의 x좌표는 $\dfrac{3}{4}$이며, $\dfrac{3}{4}$는 구간 $(0,\ 1)$에 속한다.



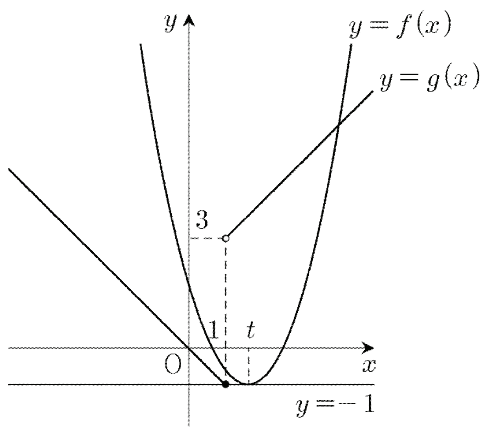
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 3이다.

- $t=\dfrac{5}{4}$인 경우



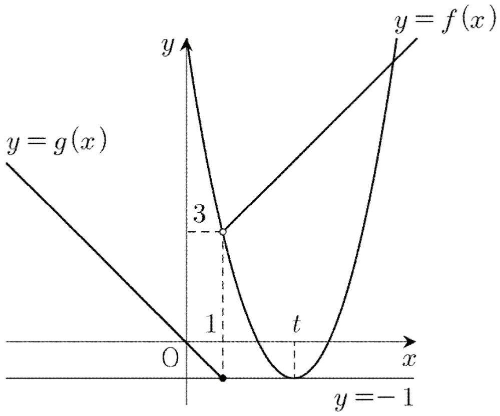
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

- $\dfrac{5}{4}<t<3$인 경우



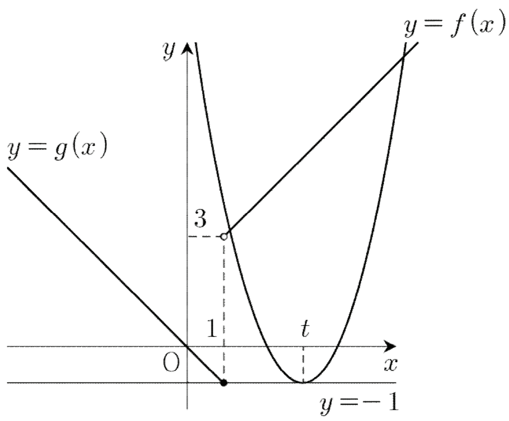
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

- $t=3$인 경우



두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

• $t>3$인 경우

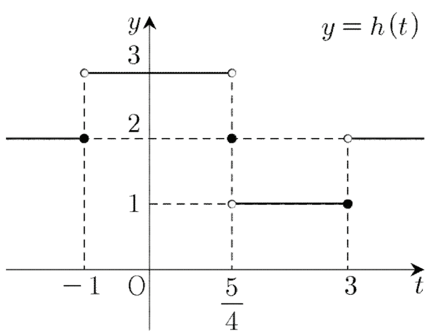


두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

이상에서 함수 $h(t)$의 방정식은

$$h(t)=\begin{cases} 2 & (t\le -1) \\ 3 & \left(-1<t<\frac{5}{4}\right) \\ 2 & \left(t=\frac{5}{4}\right) \\ 1 & \left(\frac{5}{4}<t\le 3\right) \\ 2 & (t>3) \end{cases}$$

함수 $h(t)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

$t\to -1+$일 때, 함수 $h(t)$는 3의 값을 가지므로

$\lim_{t\to -1+} h(t)=3$

▸ ㄴ. (참)

구간 $\left(-1,\ \frac{5}{4}\right)$에서 $h(t)=3$이므로 함수 $h(t)$는 $t=1$에서 연속이다.

▸ ㄷ. (거짓)

함수 $h(t)$가 불연속인 t의 값은 -1, $\frac{5}{4}$, 3이다.

따라서 함수 $h(t)$가 불연속이 되는 모든 t의 값만의 합은 $\frac{13}{4}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

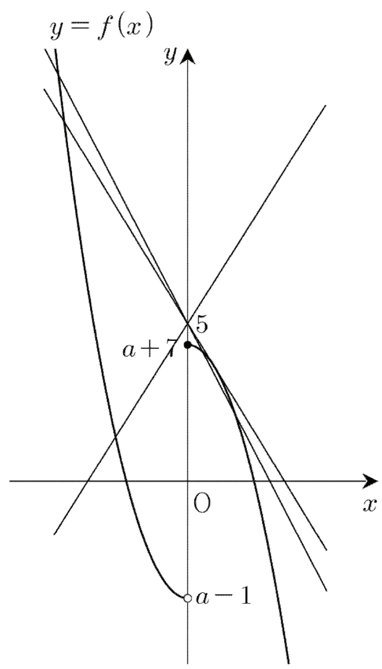
D028 | 답 ②

[풀이]

점 $(0,\ 5)$를 지나고 기울기가 t인 직선의 방정식은

$y=tx+5$ $\cdots(*)$

• (1) $a<-2$인 경우



직선 (*)이 곡선 $y=-x^2+a+7(x\ge 0)$에 접할 때의 t의 값을 구하자.

곡선과 직선의 방정식을 연립하면

$-x^2+a+7=tx+5$

정리하면

$x^2+tx-a-2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=t^2-4(-a-2)=0$

풀면 $t=-2\sqrt{-a-2}$

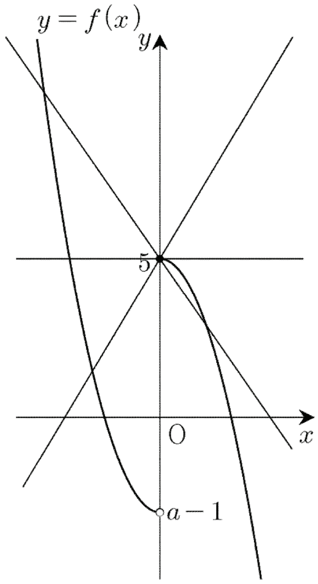
직선 (*)의 기울기를 변화시키면서 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 (*)의 교점의 개수를 세면 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t>-2\sqrt{-a-2})\\ 2 & (t=-2\sqrt{-a-2})\\ 3 & (t<\ -2\sqrt{-a-2})\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=-2\sqrt{-a-2}$에서 불연속이다.

따라서 함수 $g(t)$는 연속함수가 아니다.

- (2) $a=-2$인 경우



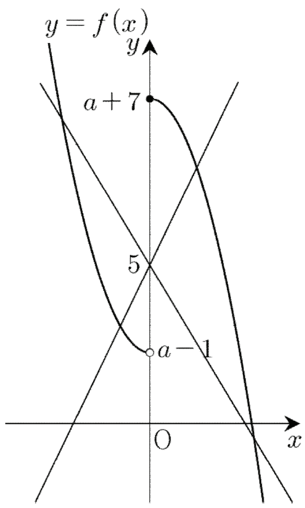
직선 (*)의 기울기를 변화시키면서 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 (*)의 교점의 개수를 세면 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}2 & (t\ge 0)\\ 3 & (t<0)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 함수 $g(t)$는 연속함수가 아니다.

- (3) $-2<a<6$인 경우



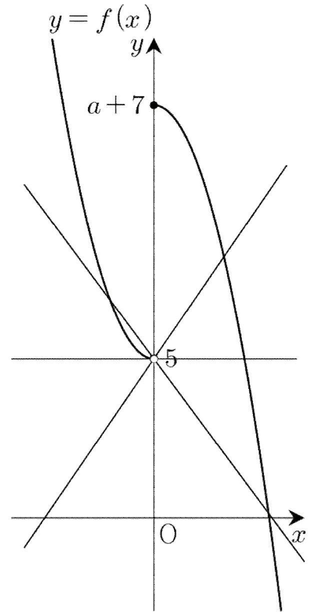
직선 (*)의 기울기를 변화시키면서 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 (*)의 교점의 개수를 세면 다음과 같다.

$g(t)=2$

상수함수는 연속함수이므로

함수 $g(t)$는 연속함수이다.

- (4) $a=6$인 경우



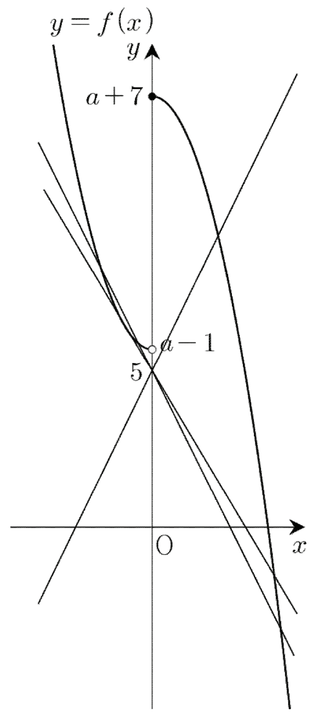
직선 (*)의 기울기를 변화시키면서 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 (*)의 교점의 개수를 세면 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t\ge 0)\\ 2 & (t<0)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 함수 $g(t)$는 연속함수가 아니다.

- (5) $a>6$인 경우



직선 (*)이 곡선 $y=x^2+a-1(x\ge 0)$에 접할 때의 t의 값을 구하자.

곡선과 직선의 방정식을 연립하면

$x^2+a-1=tx+5$

정리하면

$x^2-tx+a-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D = (-t)^2 - 4(a-6) = 0$

풀면 $t = -2\sqrt{a-6}$

직선 (*)의 기울기를 변화시키면서 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 (*)의 교점의 개수를 세면 다음과 같다.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t > -2\sqrt{a+6}) \\ 2 & (t = -2\sqrt{a+6}) \\ 3 & (t < \ -2\sqrt{a+6}) \end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t = -2\sqrt{a-6}$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $g(t)$는 연속함수가 아니다.

(1)~(5)에서 함수 $g(t)$가 연속함수가 되는 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이다.

따라서 구하는 값은 14이다.

답 ②

D029 | 답 ④

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x) = x^2 + ax + b$(단, a, b는 상수이다.)

$x = \dfrac{1}{t}$로 두면

$x \to 0+$일 때 $t \to \infty$이고,

$x \to 0-$일 때 $t \to -\infty$이다.

$$\lim_{x \to 0+} |x| \left\{ f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right\}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{f(t) - f(-t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{2at}{t} = 2a,$$

$$\lim_{x \to 0-} |x| \left\{ f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right\}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{f(t) - f(-t)}{-t} = \lim_{t \to -\infty} \frac{2at}{-t} = -2a$$

이므로 $2a = -2a = a$에서 $a = 0$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = x^2 + b$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x \to \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2} + b\right) = b = 3$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = x^2 + 3$

$\therefore\ f(2) = 7$

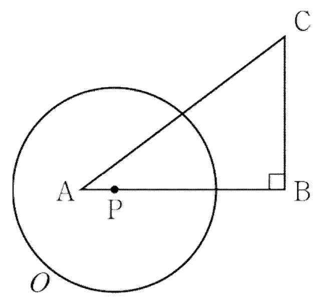
답 ④

D030 | 답 19

[풀이]

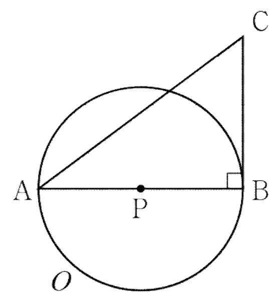
점 P를 움직이면서 함수 $f(x)$가 갖는 값의 변화를 관찰하자.

- $0 < x < 2$인 경우



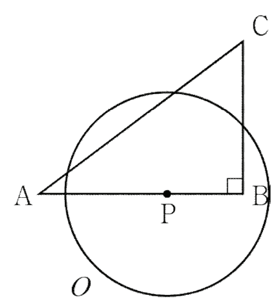
위의 그림에서 $f(x) = 2$이다.

- $x = 2$인 경우



위의 그림에서 $f(x) = 3$이다.

- $2 < x < \dfrac{10}{3}$인 경우



위의 그림에서 $f(x) = 4$이다.

- $x = \dfrac{10}{3}$인 경우

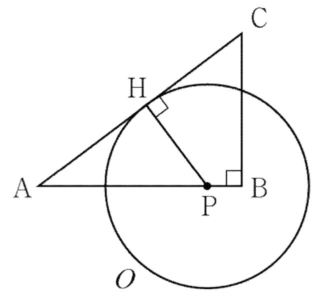
원 O가 선분 AC에 접하는 경우이다. x의 값은 다음과 같이 구하면 된다.

원 O가 선분 AC 위의 점 H에서 이 선분에 접한다고 하자.

서로 닮음인 두 직각삼각형 ABC, AHP에 대하여

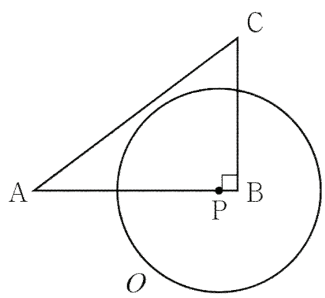
$\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{CB}} = \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PH}}$

즉, $5 : 3 = \overline{\mathrm{AP}} : 2$에서 $\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{10}{3} (= x)$



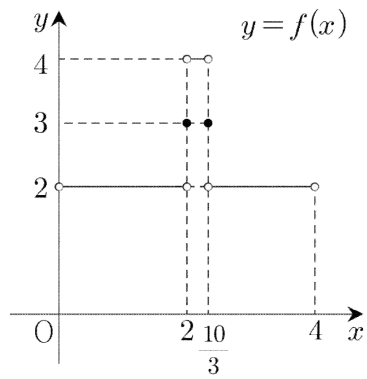
위의 그림에서 $f(x)=3$이다.

• $\frac{10}{3}<x<4$인 경우



위의 그림에서 $f(x)=2$이다.

이상에서 함수 $f(x)$의 방정식은



$\frac{q}{p}=2+\frac{10}{3}=\frac{16}{3}$

$\therefore\ p+q=19$

답 19

D031 | 답 60

[풀이1] 시험장

(가) ⇒ $a=2$이면 $f(2)=10$이고,

$a=-2$이면 $f(-2)=-10$

(만약 $a\neq\pm 2$이면 (분모)$\neq 0$이므로 항상 극한값이 존재한다.)

(나) ⇒ $x\to\infty$일 때, $\sqrt{(3x)^2+\ \cdots}\ -3x+1$이어야 극한값이 존재할 가능성이 있다.

$f(x)=9x^2+px+q$로 두면

$f(2)=36+2p+q=10$,

$f(-2)=36-2p+q=-10$

풀면 $p=5$, $q=-36$

$f(x)=9x^2+5x-36$

$\therefore\ f(3)=60$

답 60

[풀이2]

조건 (가)에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-5x}{x^2-4}=b$$

(단, b는 a에 의하여 결정되는 상수이다.)

로 두자.

함수의 극한의 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}\{f(x)-5x\}$

$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-5x}{x^2-4}\times\lim_{x\to a}(x^2-4)$

$=b\times(a^2-4)$

다항함수 $f(x)-5x$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(a)-5a=b\times(a^2-4)$

위의 등식은 a에 대한 항등식이다.

$a=2$: $f(2)-10=0$

즉, $f(2)=10$ …㉠

$a=-2$: $f(-2)+10=0$

즉, $f(-2)=-10$ …㉡

조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)}-3x+1)=c$$

(단, c는 a에 의하여 결정되는 상수이다.)

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)}-3x+1)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(3x-1)^2}{\sqrt{f(x)}+3x-1}\quad\cdots(*)$$

$f(x)$가 1차이면

(분자)$=2$차, (분모)$=1$차이므로 (*)는 발산한다.

$f(x)$가 3차 이상이면

(분모의 차수)<(분자의 차수)이므로 (*)는 발산한다.

따라서 $f(x)$는 이차식이다.(←귀류법)

$f(x)$가 2차이면

(분자)$=2$차 또는 1차, (분모)$=1$차이다.

(*)가 수렴하기 위해서는

$f(x)-(3x-1)^2$이 일차식이 되어야 하므로

$f(x)$의 최고차항의 계수는 9이다.

이제 함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=9x^2+px+q$

㉠, ㉡에 의하여

$f(2)=36+2p+q=10$

$f(-2)=36-2p+q=-10$

연립방정식을 풀면

$p=5,\ q=-36$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=9x^2+5x-36$

$\therefore\ f(3)=60$

답 60

D032 | 답 2

[풀이]

$S(t)=\frac{1}{2}\times 1\times(t-1)=\frac{t-1}{2}$

$T(t)=\frac{1}{2}\times t\times(\sqrt{4t-3}-1)=\frac{t(\sqrt{4t-3}-1)}{2}$

함수의 극한의 성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{t\to 1+}\frac{T(t)}{S(t)}=\lim_{t\to 1+}\frac{t(\sqrt{4t-3}-1)}{t-1}$

$=\lim_{t\to 1+}\frac{4t}{(\sqrt{4t-3}+1)}=\frac{4}{2}=2$

답 2

D033 | 답 19

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식을 다시 쓰면

$f(x)=-1+\frac{1}{ax+b}(ab>0)$

이 유리함수의 두 점근선은 각각

$x=-\frac{b}{a}(<0),\ y=-1$

$x\to\infty$일 때, $g(x)=f(x)$라고 가정하자.

함수의 극한의 성질에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=-1$

이므로

$\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}|f(x)|=1\neq\frac{1}{2}$

이는 가정에 모순이다.(조건 (가)를 만족시키지 않는다.)

따라서 $x\to\infty$일 때, $g(x)=2k-f(x)$이다.

함수의 극한의 성질에 의하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=-1$

이므로

$\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}|f(x)|=|2k+1|=\frac{1}{2}$

풀면

$k=-\frac{1}{4}$ 또는 $k=-\frac{3}{4}$

이제 다음의 네 가지의 경우를 생각할 수 있다.

경우1: $a>0(b>0),\ k=-\frac{1}{4}$

경우2: $a<0(b<0),\ k=-\frac{1}{4}$

경우3: $a>0(b>0),\ k=-\frac{3}{4}$

경우4: $a<0(b<0),\ k=-\frac{3}{4}$

▸ (경우1) $a>0(b>0),\ k=-\frac{1}{4}$

$-1<f(0)=-1+\frac{1}{b}<-\frac{1}{4}$이면

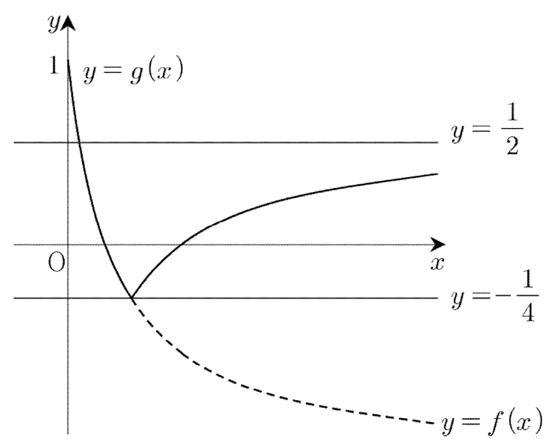
$\frac{1}{4}<|f(0)|<1$이므로 $|f(0)|\neq 1$이다.

따라서 $-\frac{1}{4}<f(0)=-1+\frac{1}{b}$이어야 한다.

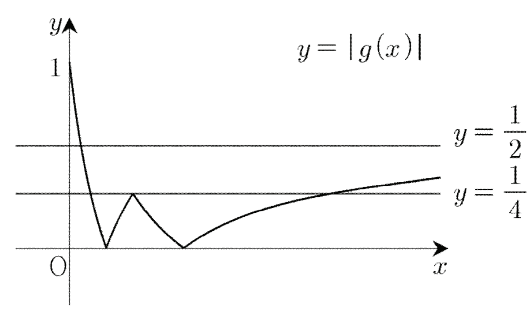
$|g(0)|=|f(0)|=\left|-1+\frac{1}{b}\right|=1$

풀면 $b=\frac{1}{2}$이다. 이때, $f(0)=1$이다.

두 함수 $f(x),\ g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $|g(x)|$의 그래프는

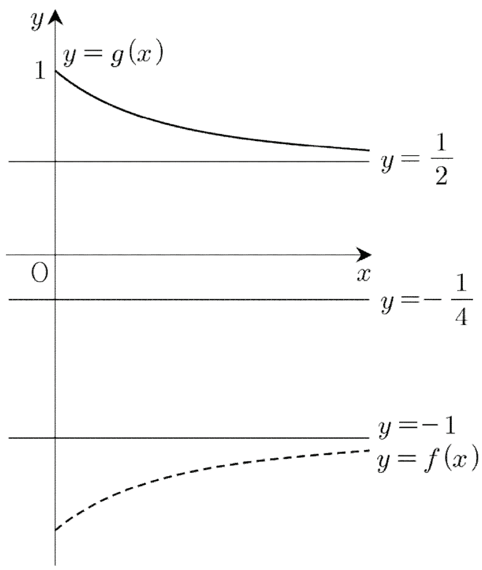


함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$의 교점의 개수는 3이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

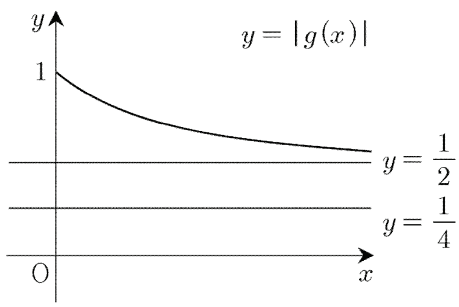
▸ (경우2) $a<0(b<0),\ k=-\frac{1}{4}$

$f(0)=-1+\dfrac{1}{b}<-1$이므로

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $|g(x)|$의 그래프는



함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$의 교점의 개수는 0이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

▸ (경우3) $a>0(b>0)$, $k=-\dfrac{3}{4}$

$-1<f(0)=-1+\dfrac{1}{b}<-\dfrac{3}{4}$이면

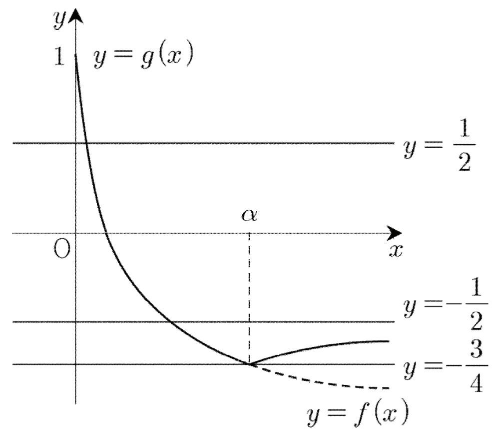
$\dfrac{3}{4}<|f(0)|<1$이므로 $|f(0)|\neq 1$이다.

따라서 $-\dfrac{3}{4}<f(0)=-1+\dfrac{1}{b}$이어야 한다.

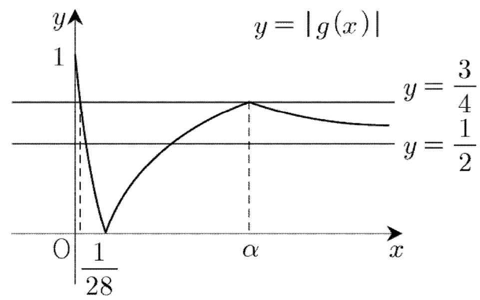
$|g(0)|=|f(0)|=\left|-1+\dfrac{1}{b}\right|=1$

풀면 $b=\dfrac{1}{2}$이다. 이때, $f(0)=1$이다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $|g(x)|$의 그래프는



함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$의 교점의 개수는 2이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

조건 (다)에서 주어진 조건에 의하여

$$f\left(\frac{1}{28}\right)=\frac{-a\times\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{2}}{a\times\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

풀면

$a=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\dfrac{-4x+1}{4x+1}$

$f(\alpha)=\dfrac{-4\alpha+1}{4\alpha+1}=-\dfrac{3}{4}$

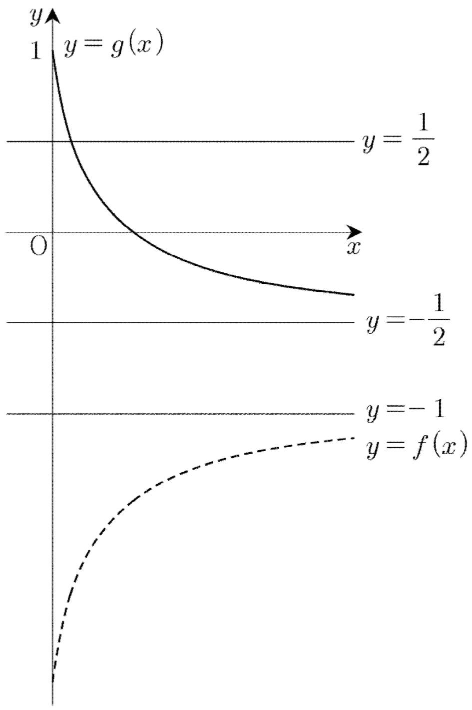
풀면 $\alpha=\dfrac{7}{4}$

그리고 함수 $f(x)$의 x절편은 $\dfrac{1}{4}$이다.

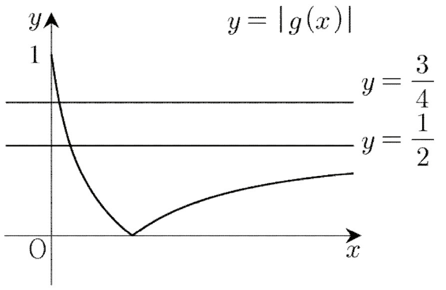
▸ (경우4) $a<0(b<0)$, $k=-\dfrac{3}{4}$

$f(0)=-1+\dfrac{1}{b}<-1$이므로

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $|g(x)|$의 그래프는



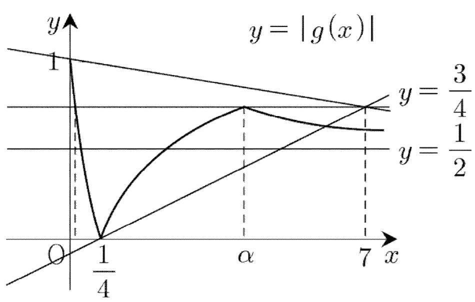
함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$의 교점의 개수는 1이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

이상에서 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시키는 경우는 (경우3)뿐이다.

직선

$$y=m(x-4\alpha)+\frac{3}{4}=m(x-7)+\frac{3}{4} \qquad \cdots (*)$$

는 점 $\left(7,\ \frac{3}{4}\right)$을 항상 지나고 기울기가 m이다.



직선 (*)이 점 $(0,\ 1)$을 지날 때,

$m=-\frac{1}{28}$

직선 (*)이 점 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$을 지날 때,

$m=\frac{1}{9}$

마지막으로 근의 분리를 하면

$$h(m)=\begin{cases} 1 & \left(m<-\frac{1}{28}\right) \\ 2 & \left(-\frac{1}{28}\le m\le 0\right) \\ 3 & \left(0<m<\frac{1}{9}\right) \\ 2 & \left(m=\frac{1}{9}\right) \\ 1 & \left(m>\frac{1}{9}\right) \end{cases}$$

함수 $h(m)$이 불연속이 되는 실수 m의 값은

$-\frac{1}{28},\ 0,\ \frac{1}{9}$이므로 $M=\frac{19}{252}$

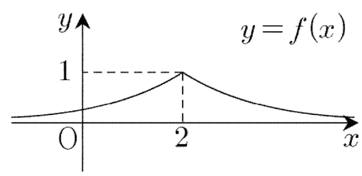
따라서 $252M=19$이다.

답 19

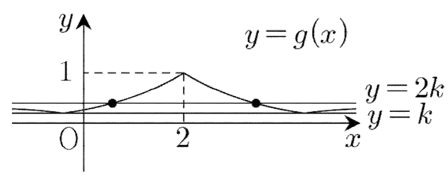
D034 | 답 4

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는



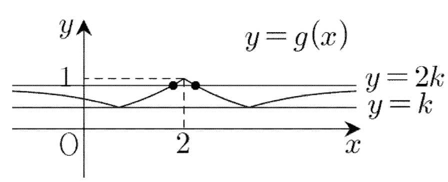
$k\to\frac{1}{4}-$일 때, 함수 $g(x)$의 그래프는



곡선 $y=g(x)$의 점근선은 $y=2k$이므로

$h(k)=2$

$k\to\frac{1}{2}-$일 때, 함수 $g(x)$의 그래프는



곡선 $y=g(x)$의 점근선은 $y=2k$이므로

$h(k)=2$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\therefore \lim_{k \to \frac{1}{4}-} \left\{ h(k)h\left(k+\frac{1}{4}\right) \right\} = 2 \times 2 = 4$

답 4

D035 | 답 ①

[풀이]

함수 $g(x)$는 $x=\pm 2$에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 모두 존재하지만 연속이 아니므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=\pm 2$에서 연속일 필요충분조건은 $f(-2)=0$, $f(2)=0$이다.

인수정리에 의하여

$f(x)=(x+2)(x-2)$

함수 $f(x)$의 그래프는 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면 함수 $f(x-a)$의 그래프와 일치하므로 다음이 성립한다.

$a=4$이면 함수 $f(x-a)g(x)$는 $x=2$에서 연속이지만, $x=-2$에서 불연속이다.

$a=-4$이면 함수 $f(x-a)g(x)$는 $x=-2$에서 연속이지만, $x=2$에서 불연속이다.

따라서 구하는 값은

$4 \times (-4) = -16$

답 ①

D036 | 답 ①

[풀이]

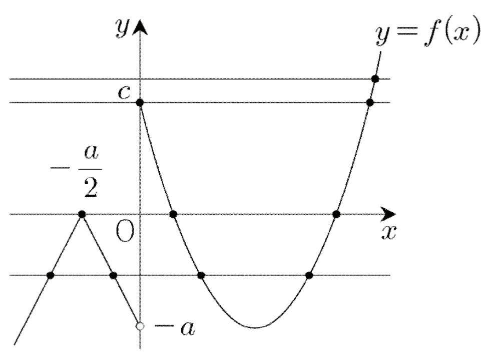
우선 조건 (가)에 대하여 생각하자.

$x \to -\infty$일 때, $f(x) \to -\infty$이고,

$x \to \infty$일 때, $f(x) \to \infty$이므로

$t \to \infty$ 또는 $t \to -\infty$이면 $g(t)=1$이다.

구간 $(-\infty, 0)$에서 함수 $y=-|2x+a|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수의 최댓값은 2, 구간 $(0, \infty)$에서 함수 $y=x^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수의 최댓값은 2이므로 아래 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프가 그려져야 한다. ($\because$ 조건(가)) 이때, 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=0$(x축)의 교점의 개수가 3임을 알 수 있다.

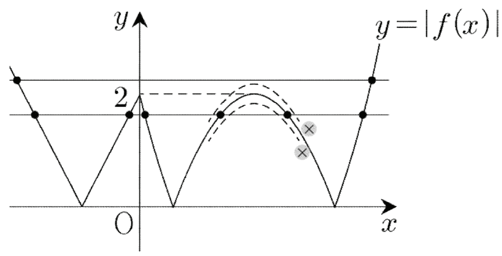


함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0-} |f(x)| = |f(0)|$, 즉 $|a|=|c|$, $a=c$

위의 그림에서 조건 (가)가 성립함을 알 수 있다.

이제 조건 (나)에 대하여 생각하자.



0에 매우 가까운 양수 t에 대하여 함수 $|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 6이다.

$t \to \infty$일 때, 함수 $|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이다.

$6 \times 2 = 12$이므로 조건 (나)에서

$\lim_{t \to 2-} h(t) = 6$, $\lim_{t \to 2+} h(t) = 2$

임을 알 수 있다.

이때, 위의 그림처럼 $a=c=2$이어야 한다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x) = \begin{cases} -|2x+2| & (x<0) \\ x^2-4x+2 & (x \ge 0) \end{cases}$$

$\therefore f(-2)+f(6) = -2+14 = 12$

답 ①

D037 | 답 ②

[풀이]

$\angle \mathrm{POB} = \theta$로 두자. ($\angle \mathrm{OBQ} = \pi - \theta$)

삼각형 POB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}t^2$

삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AQ}}^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos(\pi - \theta)$

$= 5 - 4 \times \left(\frac{1}{2}t^2 - 1\right) = 9 - 2t^2$

$\overline{\mathrm{AQ}} = \sqrt{9-2t^2}$

함수의 극한의 성질에 의하여

$\therefore \lim_{t \to 0+} \frac{3 - \overline{\mathrm{AQ}}}{t^2}$

$= \lim_{t \to 0+} \frac{3 - \sqrt{9-2t^2}}{t^2}$

$= \lim_{t \to 0+} \frac{2}{(3+\sqrt{9-2t^2})}$

$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

답 ②

D038 | 답 ④

[풀이]

세 점 A, B, C의 좌표는 각각

A$(t,\ \sqrt{t})$, B$(t+4,\ \sqrt{t+4})$, C$(t+4,\ \sqrt{t})$

$S(t) = 2(\sqrt{t+4} - \sqrt{t})$

함수의 극한의 성질에 의하여

$\therefore \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}\times S(t)}{2}$

$= \lim_{t\to\infty} \sqrt{t}(\sqrt{t+4} - \sqrt{t})$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{t+4}+\sqrt{t}} = \frac{4}{1+1} = 2$

답 ④

D039 | 답 ⑤

[풀이]

• (1) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속인 경우

$f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x)$, $4 = a$

함수 $(x-a)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

• (2) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속인 경우 $(a \neq 4)$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 좌극한, 우극한, 함숫값을 갖지만 불연속이므로 함수 $(x-a)f(x)$가 $x=1$에서 연속일 필요충분조건은 $a=1$이다. 왜냐하면 $a=1$일 때, 함수 $y=x-a$의 $x=1$에서의 극한값과 함숫값은 모두 0이기 때문이다.

(1), (2)에서 구하는 값은

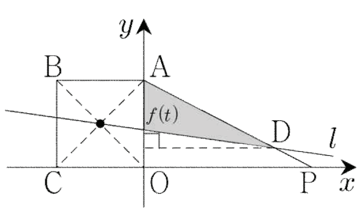
$4+1=5$

답 ⑤

D040 | 답 ②

[풀이]

두 직선 AP, l의 교점을 D라고 하자.



직선 l은 정사각형 OABC의 넓이를 이등분하므로 점 $(-1,\ 1)$을 지나야 한다.

이때, 이 점은 두 대각선 AC, OB의 교점이다.

직선 l의 방정식을 다음과 같이 두자.

l: $y = m(x+1)+1$ (단, $m<0$)

이때, $m+1 = f(t)$이므로

l: $y = (f(t)-1)x + f(t)$

이제 점 D의 좌표를 구하자.

두 직선 l, $\frac{x}{t} + \frac{y}{2} = 1$(AP)의 방정식을 연립하면

$x = \frac{2t - tf(t)}{tf(t) - t + 2}$ (점 D의 x좌표이다.)

위의 그림에서 어둡게 색칠된 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\triangle$AOP의 넓이$) = \frac{1}{2}t$

$= \frac{1}{2}\frac{2t-tf(t)}{tf(t)-t+2}(2-f(t))$

정리하면

$(f(t))^2 - (t+4)f(t) + t + 2 = 0$

$f(t) = \frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2} (<2)$

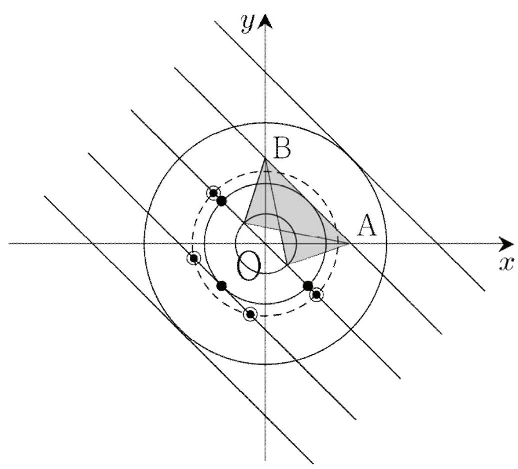
함수의 극한의 성질에 의하여

$\therefore \lim_{t\to 0+} f(t) = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$

답 ②

D041 | 답 ⑤

[풀이]



위의 그림에서 그려진 직선들의 기울기는 모두 -1이고, y절편은 각각

$-2\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$

이다. 이때, 서로 이웃한 두 직선 사이의 거리는 항상 1이다.

▸ ㄱ. (참)

위의 그림에서 삼각형 ABP의 넓이가 자연수가 되는 점 P의 개수는 2임을 알 수 있다. (어둡게 색칠한 두 삼각형)

$\therefore\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$

▸ ㄴ. (참)

위의 그림에서

$t \to 1+$일 때, $f(t)=4$ (점 P가 ◉인 경우)

$t=1$일 때, $f(t)=3$ (점 P가 ●인 경우)

$\therefore\ \lim_{t\to 1+} f(t) \neq f(1)$

▸ ㄷ. (참)

ㄴ과 마찬가지의 방법으로

구간 $(0,\ 4)$에서 $f(t)$가 불연속이 되는 t의 값을 모두 쓰면

$t=1,\ t=2,\ t=3$

뿐이다.

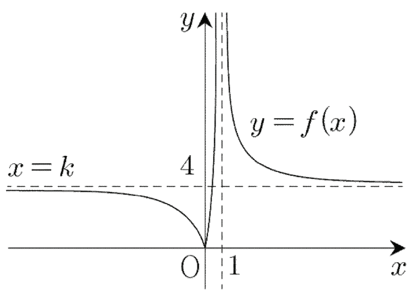
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

D042 | 답 ①

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는



$k(>0)$의 값에 관계없이

$t\to 0+$일 때, $g(t)=2$이고

$x\neq k$일 때, $g(t)=2$이므로

$\lim_{t\to 0+} g(t)+\lim_{t\to 2-} g(t)+g(4)$

$=2+2+1=5$

가 되어야 한다.

즉, $g(4)=1$에서 $k=4$

$\therefore\ f(3)=\left|\dfrac{4\times 3}{3-1}\right|=6$

답 ①

D043 | 답 7

[풀이]

함수 $g(x)$가

$x=1$에서 연속: $1+b=7-b,\ b=3$

$x=3$에서 연속: $3+b=7-b,\ b=2$

• (1) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속인 경우

함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로

$f(3)=0$, 즉 $f(3)=a^2-7a+10=0$

$(a-2)(a-5)=0,\ a=2$ 또는 $a=5$

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 3),\ (5,\ 3)$

• (2) 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속인 경우

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로

$f(1)=0$, 즉 $f(1)=a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0,\ a=1$ 또는 $a=2$

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 2),\ (2,\ 2)$

• (3) 함수 $g(x)$가 $x=1,\ x=3$에서 모두 불연속인 경우

함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=\dfrac{1+3}{2}=2=a$이고,

$f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$에서

$f(1)=f(3)=0$

이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5)$

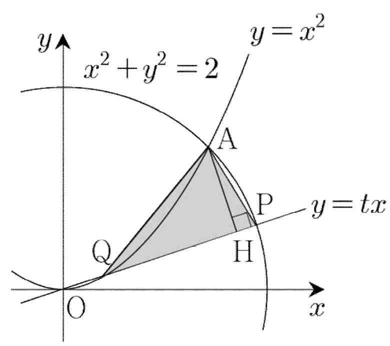
(1), (2), (3)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 7이다.

답 7

D044 | 답 15

[풀이]

점 A에서 직선 $y=tx$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



곡선 $y=x^2$과 직선 $y=tx$의 방정식을 연립하면

$x^2=tx,\ x=t,\ \mathrm{Q}(t,\ t^2)$

곡선 $y=x^2$과 원 $x^2+y^2=2$의 방정식을 연립하면

$x^2+x^4=2,\ x^2=1,\ x=1,\ \mathrm{A}(1,\ 1)$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1-t}{\sqrt{t^2+1}}$

직선 $y=tx$와 원 $x^2+y^2=2$의 방정식을 연립하면

$x^2+t^2x^2=2,\ x=\sqrt{\dfrac{2}{1+t^2}}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{\frac{2}{1+t^2}}-t\right)$$

$$S(t)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}\,\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}(1-t)\left(\sqrt{\frac{2}{1+t^2}}-t\right)$$

함수의 극한의 성질에 의하여

$$k=\lim_{t\to 1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to 1-}\frac{1}{2(1-t)}\times\frac{\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$=\lim_{t\to 1-}\frac{(t^2+2)(t+1)}{2\sqrt{1+t^2}(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2})}$$

$$=\frac{6}{2\times\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{3}{4}$$

$\therefore\ 20k=15$

답 15

D045 | 답 6

[풀이]

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$, 즉

$$\lim_{x\to a+}\frac{x^2+ax+4a}{x-a}=a^2-10$$

좌변에서 (분자)$=2a^2+4a=0$

풀면 $a=0$ 또는 $a=-2$

• (1) $a=0$인 경우

$$f(x)=\begin{cases}x^2-10 & (x\le 0)\\ x & (x>0)\end{cases}$$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속일 수 없다.

• (2) $a=-2$인 경우

$$f(x)=\begin{cases}x^2-10 & (x\le -2)\\ x-4 & (x>-2)\end{cases}$$

이상에서 $a=-2$이다.

$\therefore\ f(2a)=f(-4)=6$

답 6

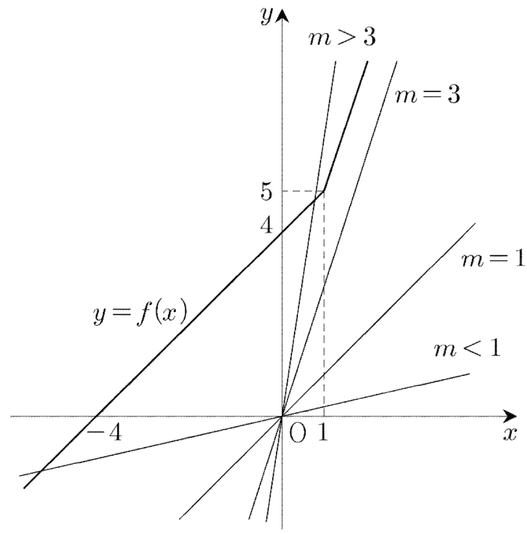
D046 | 답 8

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & (x\ge 1)\\ x+4 & (x<1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx$를 한 평면 위에 나타나면 다음과 같다.



함수 $g(m)$의 방정식은

$$g(m)=\begin{cases}1 & (m<1,\ m>3)\\ 0 & (1\le m\le 3)\end{cases}$$

함수 $g(m)$은 $m=1$, $m=3$에서 불연속이므로

$h(x)=(x-1)(x-3)$

이면 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때, $h(1)=h(3)=0$이다.

$\therefore\ h(5)=8$

답 8

D047 | 답 ①

[풀이]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=2\text{에서}$$

$f(x)-x^3=2x^2+ax+b$

즉, $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$

삼차방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 가진다. 이때, 실근을 α라고 하면

$$\lim_{x\to\alpha}g(x)=\lim_{x\to\alpha}\frac{x-1}{f(x)}=\frac{1}{n}$$

에서 (분모)$=f(\alpha)\to 0$이므로 (분자)$=\alpha-1=0$이어야 한다.

즉, $\alpha=1$

$f(1)=3+a+b=0$, $b=-3-a$

$f(x)=(x-1)(x^2+3x+a+3)$

만약 $f(x)=0$이 α 이외의 실근 β를 가지면

$x\to\beta$일 때, $\dfrac{x-1}{f(x)}$는 발산하므로 함수 $g(x)$는 연속일 수 없다.

따라서 이차방정식

$x^2+3x+a+3=0$

은 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

$D=3^2-4(a+3)<0$, $a>-\dfrac{3}{4}$

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=g(1)$, 즉

$\lim_{x\to1}\dfrac{1}{x^2+3x+a+3}=\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{a+7}=\dfrac{1}{n}$

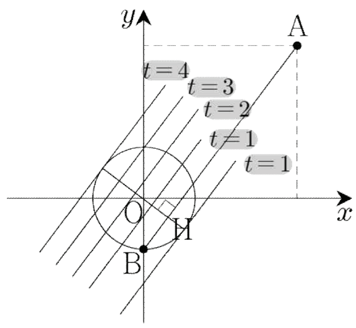
$n=a+7>\dfrac{25}{4}$에서 자연수 n의 최솟값은 7이다.

답 ①

D048 |답 5

[풀이]

점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



직선 AB의 방정식은

$4x-3y-3=0$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{3}{5}$

삼각형 ABX의 높이를 $h(t)$라고 하면

($\triangle$ABX의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}h(t)=\dfrac{5}{2}h(t)=t$

즉, $h(t)=\dfrac{2}{5}t$

위의 그림에서 점 X의 개수는 각각

$h(1)=\dfrac{2}{5}$: 3개

$h(2)=\dfrac{4}{5}$: 2개

$h(3)=\dfrac{6}{5}$: 2개

$h(4)=\dfrac{8}{5}$: 1개

함수 $h(t)$의 방정식은

$$h(t)=\begin{cases}4 & (0<t<1)\\3 & (t=1)\\2 & (1<t<4)\\1 & (t=4)\end{cases}$$

함수 $h(t)$가 연속하지 않은 모든 t의 값의 합은

$1+4=5$

이다.

답 5

D049 |답 28

[풀이]

$f(t)>0$이면 $\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=1$,

$f(t)<0$이면 $\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=-1$

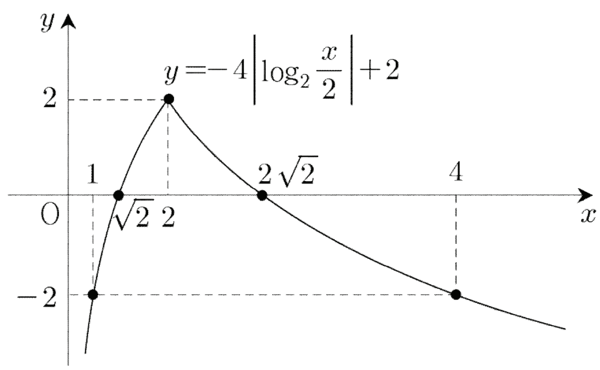
이므로 $g(x)$가 가질 수 있는 값은

$1-1=0$, $1-(-1)=2$,

$-1-(-1)=0$, $-1-1=-2$

즉, -2, 0, 2 뿐이다.

조건 (나)에서 주어진 두 번째 함수의 그래프는



위의 그림에서 •이 교점으로 가능하다.

이때, 다섯 개의 교점의 x좌표를 모두 쓰면

1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4

이다.

$g(1)=g(4)=-2=-1-1$

이므로 $f(x)$의 부호는 $x=1(x=4)$의 좌우에서 양(+)에서 음(−)으로 바뀐다.

$g(\sqrt{2})=g(2\sqrt{2})=0=1-1=-1-(-1)$

이므로 $f(x)$의 부호는 $x=\sqrt{2}(x=2\sqrt{2})$의 좌우에서 변함이 없다.

$g(2)=2=1-(-1)$

이므로 $f(x)$의 부호는 $x=2$의 좌우에서 음(−)에서 양(+)으로 바뀐다.

이상에서

$f(1)=f(2)=f(4)=0$,

$f(\sqrt{2})<0$, $f(2\sqrt{2})>0$

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2022 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2022 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통 〉

- 공통 1 : 문제를 보자마자 a^2-b^2이 떠올라야 함. 1번부터 '이 시험은 교과서/기출문제를 풀었던 기억으로 푼다.'를 의도적으로 말하고 있음. 즉, '정해진 풀이를 따르지 않으면 망한다.'를 노골적으로 표현.
- 공통 8 : 이차함수의 정적분 → 대칭축을 생각한다.
- 공통 13 : 그림을 그릴 수 없으니, 처음부터 끝까지 계산. 로그문제에서 a^b이 나오면 $\log a^b = b\log a$ 생각이 들어야.
- 공통 14 : x축에서 점 P를 움직이는게 우선.
- 공통 15 : 역대 평가원 기출 중에서 " 코사인법칙에 의하여 " 란 문구가 등장한 첫 번째 문제. 어떤 공식을 써야 하는지 알려 주었는데. 어려운 문제일리 없다. 읽는데 4점.
- 공통 21 : $2+2^2+2^3<2^4$과 같은 계산을 해보았는가? '기하급수적으로 빨라진다.'의 의미를 아는가를 평가.
- 공통 22 : $f(1)=f(4)$에서 $f(x)$의 그래프의 개형이 바로 나와야 함. 삼차함수의 비율관계.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 28 : 분할, 여사건 모두 가능. 이 문제 보다 경우 구분이 많은 함수 개수 세는 문제는 기출에 널려있음.
- 확률과 통계 29 : 적분 기호 쓰면 좀 더 편하긴 한데. $y=k$ 그리면 더 단순하게 해결 가능.
- 확률과 통계 30 : 답을 맞히기 상당히 어려운, 실수하기 딱 좋은 문제. 수형도 그냥 다 그리는 편이 나음.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 : 평행이동/대칭성 & 기출을 풀었던 경험. 풀이 중간 과정에서 답을 바로 알 수 있음.
- 미적분 29 : 계산이 복잡하니. 극한의 근사적 계산으로 접근하면 실수 없이 빠르게 계산 가능.
- 미적분 30 : (나)의 항등식에 $x=1,\ 2,\ 4$ 대입하여 점찍고, 확대해서 그리면 끝. 역함수의 정적분 계산 말고, 그림으로 해결.

〈 기하 〉

- 기하 26 : 동일하게 쌍곡선으로 수능에 출제된 적이 있음. 원 밖의 점에서 접선 2개 그으면 합동인 직각삼각형 2개 찾는다.
- 기하 28 : 빗변 주면, 직각삼각형 그리고. 기울기 없으니, 피타 쓰고. 포물선의 정의대로 선분 그으면 직각 안에 수선 그려지니 닮음 쓰고.
- 기하 29 : 문제에서 원 위의 점 주었으니. (나)는 직선(선분)일 수밖에. 이 유형의 문제 중에서도 중급 수준.
- 기하 30 : 평가원 기출 중, 구/직선 정사영 내려서 점의 이동 관찰하는 문제의 확장판. 풀다보면 이면각 보다는 정사영이 좀 더 편하긴 하지만. 이면각의 정의에 의한 풀이도 계산이 거의 없음. 기존 공도 기출과 비교하여 중급 수준.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

구 성

▸ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 확률과 통계'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 2015 **개정 교육과정에 맞는 283개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2021년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2022학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2022학년도 (학년도 기준)

▸ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▸ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
대단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

▸ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

확률과 통계

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

○ 순열, 조합, 분할(정수/자연수) 관련 문제 모두 제외

J 경우의 수

- 2015개정 교육과정

○ 순열, 조합, 분할(정수/자연수) 관련 문제 모두 제외

J. 경우의 수

J001

○○
(2005(7)고3-가형27이산수학)

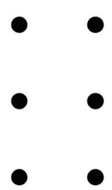
7개의 바둑돌이 담긴 주머니에서 한 번에 한 개 또는 두 개의 바둑돌을 꺼내기로 하였다. 주머니 안의 바둑돌이 모두 없어질 때까지 바둑돌을 꺼내는 방법의 수는? [3점]

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

J002

○○
(2005(7)고3-가형30이산수학)

시각장애인을 위한 문자 체계의 하나인 브라유 점자는 그림과 같은 6개의 점으로 구성되어 있으며, 이 점들 중 볼록하게 튀어나온 점들의 개수와 위치로 한 문자를 결정한다. 이 때, 적어도 하나의 점은 튀어나와야 한다. 브라유 점자 체계에서 표현가능한 문자의 개수를 구하시오. [4점]



J003

○○
(2005(4)고3-가형25)

집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족시키는 U의 부분집합 A의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $\{1,\ 2,\ 3\}\cap A=\{1,\ 2\}$
(나) 집합 A의 원소의 개수는 6개 이상이다.

J004

○○○
(2005(3)고3-가형9)

그림과 같은 6개의 빈칸에 $2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6$의 6개의 수를 하나씩 써 넣으려고 한다. 1열, 2열, 3열의 숫자들의 합을 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3$라 할 때, $a_1<a_2<a_3$이 되도록 빈칸을 채우는 경우의 수는? [4점]

1열	2열	3열

① 90 ② 120 ③ 150
④ 180 ⑤ 210

J005

○○○
(2005(7)고3-가형25/나형25)

철수는 국가대표팀의 축구 경기를 시청하고 있었다. 그런데 우리나라 국가대표팀이 전반전 경기를 $1:0$으로 이기고 난 후 중간 휴식 시간에 갑자기 철수네 집이 정전이 되어 후반전 경기를 시청할 수 없었다.
다음날 친구들로부터 후반전 경기까지 마친 결과 $5:3$으로 우리나라 국가대표팀이 승리하였다는 사실을 알게 되었지만, 두 팀이 골을 넣는 순서는 알 수 없었다. 철수는 〈표1〉과 같은 표를 만들어 후반전 경기에서 두 팀이 공을 넣어 가는 상황 중 한 가지를 〈표2〉와 같이 적어 보았다.

〈표1〉

구분	국가 대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전		
최종 득점 결과	5	3

〈표2〉

구분	국가 대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전	2	0
	2	1
	2	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	3
최종 득점 결과	5	3

이와 같이 철수가 〈표1〉의 어두운 부분을 완성할 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]

J006

○○
(2005(7)고3-가형26이산수학)

원소의 개수가 6인 집합을 공집합이 아닌 두 개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는? [3점]

① 31　② 32　③ 33
④ 34　⑤ 35

J007

○○○
(2005(10)고3-가형26확률통계)

다음을 이용하여
$({}_{12}C_0)^2+({}_{12}C_1)^2+({}_{12}C_2)^2+\cdots+({}_{12}C_{12})^2$
을 간단히 하면? [4점]

(가) $(1+x)^{24}=(1+x)^{12}(1+x)^{12}$
(나) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$(n은 자연수, r은 정수, $0\le r\le n$)

① 2^{12}　② ${}_{24}P_{12}$　③ ${}_{24}C_{12}$
④ $({}_{24}P_{12})^2$　⑤ $({}_{24}C_{12})^2$

J008

○○
(2005(7)고3-나형26)

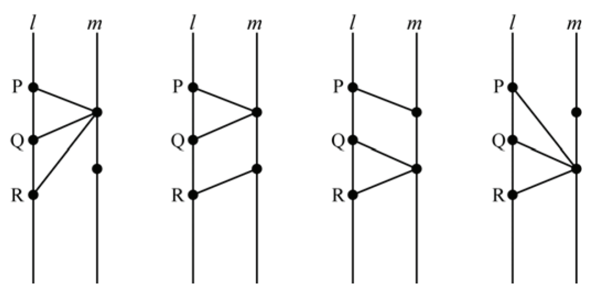
다음 중 $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$의 전개식에서 x^5의 계수와 같은 것은? [3점]

① $16\times{}_7\mathrm{C}_2$ ② $16\times{}_7\mathrm{C}_3$ ③ $8\times{}_7\mathrm{C}_3$
④ $8\times{}_7\mathrm{C}_2$ ⑤ $4\times{}_7\mathrm{C}_2$

J009

○○○
(2005(10)고3-가형30이산수학)

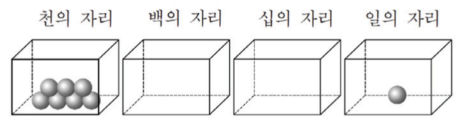
평면 위에 평행한 두 직선 l, m과 직선 l위의 서로 다른 세 점 P, Q, R가 있다. 직선 l 위의 세 점 P, Q, R에서 각각 하나의 선분으로 직선 m 위의 점을 연결할 때, 세 선분이 교차하지 않는 경우의 수를 구하려고 한다. 예를 들어, 그림과 같이 직선 m 위에 두 점이 있을 때, 구하는 모든 경우의 수는 4(가지)이다. 직선 m 위에 10개의 점이 있을 때, 위와 같이 세 선분이 교차하지 않는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]



J010

○○
(2005(7)고3-가형29이산수학)

7001의 각 자리의 숫자의 합은 8이 된다. 이때, 각 자리를 상자로 생각하면 7001은 네 개의 상자에 그림과 같이 8개의 공을 넣는 것으로 생각할 수 있다.



이를 이용하여 0부터 9999까지의 정수 중에서 각 자리의 숫자의 합이 8이 되는 정수의 개수를 구하면? [4점]

① 162 ② 165 ③ 168
④ 171 ⑤ 174

J011

○○
(2006(11)고2-가형20)

서로 다른 세 종류의 음료수 A, B, C가 있다. A가 3개, B가 2개, C가 1개 있을 때, 이 6개의 음료수 중에서 5명의 학생이 1개씩 마실 수 있는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 음료수끼리는 구별하지 않는다.) [4점]

① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

J012

○○○
(2006경찰대(1차)–공통20)

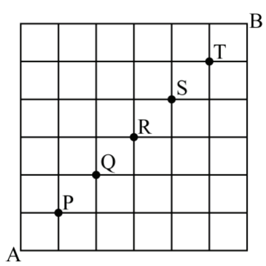
각 자리의 숫자가 1, 2, 3만으로 이루어지고 3의 배수인 4 자리 자연수의 개수는?

① 23　② 25　③ 27
④ 29　⑤ 31

J013

○○○
(2006(3)고3–가형25)

그림과 같은 직선 도로망이 있다. 5개의 지점 P, Q, R, S, T 중 어느 한 지점도 지나지 않고 A지점에서 B 지점까지 최단거리로 갈 수 있는 모든 경로의 수를 구하시오. [4점]



J014

○○○
(2007(11)고2–가형30)

1, 2, 3, 4, 5 다섯 개의 숫자가 있다. 중복을 허락하여 이 숫자로 세 자리의 자연수를 만들 때, 3의 배수의 개수를 구하시오. [4점]

J015

○○
(2007(10)고3–가형13)

다음은 등식 ${}_nC_r + {}_nC_{r+1} = {}_{n+1}C_{r+1}$을 이용하여

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

을 증명한 것이다.

〈증명〉

2 이상인 자연수 k에 대하여

$k^2 = \boxed{\text{(가)}} + 2\cdot{}_kC_2$로 나타낼 수 있으므로

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$= {}_1C_1 + ({}_2C_1 + 2\cdot{}_2C_2) + ({}_3C_1 + 2\cdot{}_3C_2)$

$+ \cdots + ({}_nC_1 + 2\cdot\boxed{\text{(나)}})$

$= ({}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + \cdots + {}_nC_1)$

$+ 2({}_2C_2 + {}_3C_2 + \cdots + \boxed{\text{(나)}})$

$= {}_{n+1}C_2 + 2\cdot\boxed{\text{(다)}}$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

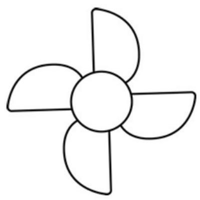
위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	${}_kC_1$	${}_nC_2$	${}_nC_3$
②	${}_kC_1$	${}_nC_2$	${}_{n+1}C_3$
③	${}_kC_1$	${}_{n+1}C_2$	${}_nC_3$
④	${}_{k+1}C_1$	${}_nC_2$	${}_nC_3$
⑤	${}_{k+1}C_1$	${}_{n+1}C_2$	${}_{n+1}C_3$

J016

○○○
(2007(3)고3-가형15)

A, B, C, D 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 그림과 같은 프로펠러의 중앙 부분과 4개의 날개 부분을 모두 칠하려고 한다. 인접한 중앙 부분과 날개 부분은 서로 다른 색으로 칠하기로 할 때, 칠할 수 있는 방법의 수는? (단, 4개의 날개는 모두 합동이고, 회전하여 같은 경우에는 한 가지의 방법으로 한다.) [4점]



① 60 ② 72 ③ 84
④ 96 ⑤ 108

J017

○○
(2007(3)고3-가형21)

동주는 5개의 서로 다른 알사탕과 5개의 똑같은 박하사탕을 가지고 있다. 이 중에서 5개를 택하여 진서에게 주는 방법의 수를 구하시오. [3점]

J018

○○
(2007(4)고3-가형19)

일곱 개의 문자 A, A, A, B, C, D, E 중에서 3개의 문자를 뽑아 일렬로 나열할 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. [3점]

J019

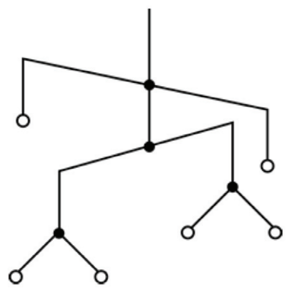
○○
(2007(4)고3-가형22)

x, y에 대한 식 $\left(x^2-\dfrac{3}{x}+2y\right)^6$을 전개할 때, x^6의 개수를 구하시오. [3점]

J020

○○○
(2007(3)고3-가형30)

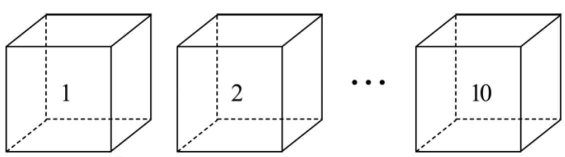
좌우 대칭인 ⊓ 모양과 ∧ 모양의 철사가 각각 두 개씩 있다. 그림과 같이 각 철사의 가운데를 서로 연결한 후, 여섯 군데의 고리에 서로 다른 6개의 인형 A, B, C, D, E, F를 매달아 회전모빌을 만들려고 한다. 이때 만들 수 있는 서로 다른 회전모빌의 개수를 구하시오. (단, 그림의 •부분은 회전 가능하고, ∧ 모양의 두 철사는 합동이다.) [4점]



J021

○○
(2007(10)고3-가형30)

1부터 10까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 10개의 상자가 있다. 똑같은 구슬 3개를 상자에 넣는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 상자에 들어가는 구슬의 개수에는 제한이 없다.) [3점]



J022

○○○
(2008(4)고3-가형29이산수학)

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 모두 만족할 때, 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는? [4점]

(가) $1 \not\in A \cap B$
(나) 집합 $A-B$의 원소의 개수는 2이다.

① 864 ② 891 ③ 918 ④ 945 ⑤ 972

J023

●●● (2008(10)고3-가형23)

갑, 을 두 사람이 어떤 게임을 해서 다음과 같은 규칙에 따라 사탕을 갖는다고 한다.

(가) 이긴 사람은 3개, 진 사람은 1개의 사탕을 갖는다.
(나) 비기면 두 사람이 각각 2개씩 사탕을 갖는다.

갑, 을 두 사람이 이 게임을 다섯 번 해서 20개의 사탕을 10개씩 나누어 갖게 되는 경우의 수를 구하시오. (단, 사탕은 서로 구별되지 않는다.) [3점]

J024

○○○ (2008(10)고3-가형14)

다음은 n이 소수일 때, ${}_{2n}\mathrm{C}_n-2$는 n^2의 배수임을 증명한 것이다.

〈증명〉

$$(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k x^k$$

에서 $\boxed{\text{(가)}}$의 계수는 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$이다.

한편

$$(1+x)^n(1+x)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{n-k} x^{n-k}\right)$$

에서 $\boxed{\text{(가)}}$의 계수는 $\sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k\cdot\boxed{\text{(나)}}\right)$이다.

따라서 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$

$=\left({}_n\mathrm{C}_0\right)^2+\left({}_n\mathrm{C}_1\right)^2+\left({}_n\mathrm{C}_2\right)^2+\cdots+\left({}_n\mathrm{C}_n\right)^2$이다.

그런데 n이 소수이므로 $\boxed{\text{(다)}}$인 자연수 k에 대하여 ${}_n\mathrm{C}_k$는 n의 배수이다.

따라서 $\boxed{\text{(다)}}$인 자연수 k에 대하여 $\left({}_n\mathrm{C}_k\right)^2$은 n^2의 배수이고 ${}_n\mathrm{C}_0={}_n\mathrm{C}_n=1$이므로 ${}_{2n}\mathrm{C}_n-2$는 n^2의 배수이다.

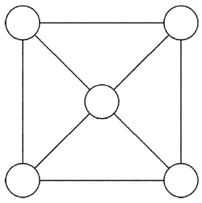
위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	x^n	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$
②	x^n	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n-1$
③	x^n	${}_{2n}\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$
④	x^{2n}	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n-1$
⑤	x^{2n}	${}_{2n}\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$

J025

○○○ (2008사관(1차)–문과23)

그림과 같이 정사각형과 서로 합동인 5개의 원으로 이루어진 놀이판이 있다. 각 원의 중심은 정사각형의 네 꼭짓점과 두 대각선이 만나는 점이다. 서로 다른 5개의 돌 중에서 3개를 뽑아 3개의 원 안에 각각 1개씩 올려놓는 방법의 수는? (단, 회전하여 같은 경우는 한 가지로 계산한다.) [4점]

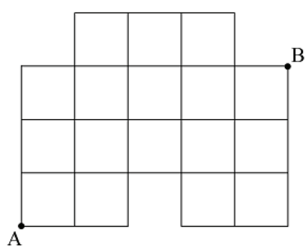


① 150 ② 160 ③ 170 ④ 190 ⑤ 200

J026

○○ (2008(7)고3–가형26이산수학)

그림과 같은 도로망에서 A에서 출발하여 B까지 최단거리로 가는 방법의 수는? [3점]

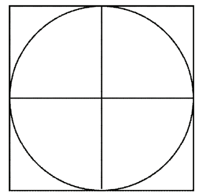


① 46 ② 48 ③ 50 ④ 52 ⑤ 54

J027

○○ (2008(4)고3–가형28이산수학)

정사각형에 내접하는 원을 4등분하여 그림과 같은 도형을 만들었다. 도형의 한 영역에 한 가지 색만 사용하여, 8개의 영역에 서로 다른 8가지의 색을 모두 칠하는 방법의 수는? (단, 회전에 의하여 겹쳐지는 것들은 같은 것으로 한다.) [3점]



① $\dfrac{8!}{5}$ ② $\dfrac{8!}{4}$ ③ $\dfrac{8!}{3}$ ④ $\dfrac{8!}{2}$ ⑤ $8!$

J028

●●● (2009경찰대(1차)–공통21)

10보다 큰 자연수 n에 대하여 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$의 두 부분집합 X와 Y를 택할 때, $n(X\cap Y)=1$인 경우의 수는? (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수)

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \cdot 2^{n-k}$ ② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \cdot 2^{n-k-1}$

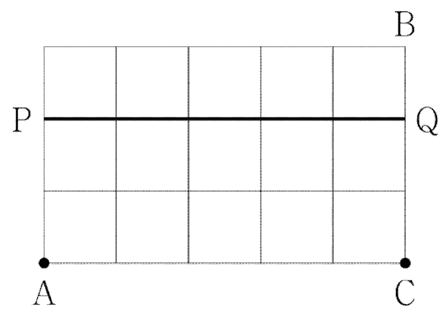
③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n \cdot {}_nC_k \cdot 2^{n-k}$ ④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_nC_k \cdot 2^{n-k-1}$

⑤ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_nC_k \cdot 2^{n-k}$

J029

●●● (2009사관(1차)-문과24)

철수가 자동차로 그림과 같은 바둑판 모양의 도로를 따라 A 지점에서 약속 장소인 B지점까지 최단 거리로 가는 도중에, 도로 PQ 위에서 약속 장소가 C지점으로 변경되었다는 연락을 받고 곧바로 C지점을 향하여 도로를 따라 최단 거리로 이동하였다. 이 때, 철수가 A지점에서 출발하여 C지점까지 최단 거리로 이동하는 경로의 수는? (단, 연락 받은 위치가 달라도 이동 경로가 같으면 동일한 경우로 간주한다.) [4점]



① 120 ② 122 ③ 124
④ 126 ⑤ 128

J030

○○○ (2009(4)고3-가형24)

집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\subset B$를 만족하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수를 구하시오. [4점]

J031

○○ (2009(7)고3-가형26이산수학)

숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 배열할 때, 짝수는 반드시 앞에서부터 짝수 번째 자리에 오는 경우의 수는? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

J032

○○ (2010(3)고3-가형26)

$(x+a)^{10}$의 전개식에서 세 항 x, x^2, x^4의 계수가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 상수 a의 값은? (단, $a\neq 0$) [3점]

① $\frac{28}{27}$ ② $\frac{27}{26}$ ③ $\frac{26}{25}$
④ $\frac{25}{24}$ ⑤ $\frac{24}{23}$

J033

○○○
(2010(3)고3-가형22)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여
함수 $f:\ X \to X$는 다음 조건을 만족시킨다.

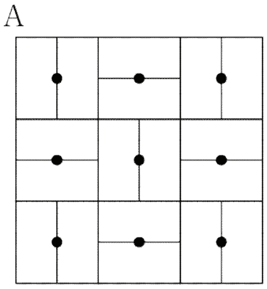
(가) $f(3)$은 짝수이다.
(나) $x<3$이면 $f(x)<f(3)$
(다) $x>3$이면 $f(x)>f(3)$

함수 f의 개수를 구하시오. [3점]

J034

○○○
(2011사관(1차)-문과23)

그림과 같이 직사각형 모양으로 이루어진 도로망이 있고, 이 도로망의 9개의 지점에 •이 표시되어 있다.



A지점에서 B지점까지 가는 최단경로 중에서 •이 표시된 9개의 지점 중 오직 한 지점만을 지나는 경로의 수는? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

J035

○○
(2011(7)고3-가형27)

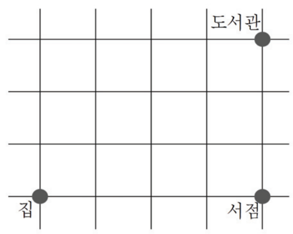
집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $Y=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$로의 함수 f 중 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하시오. [3점]

(가) $f(2)=5$
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 $i,\ j$에 대하여
$i<j$이면 $f(i)\le f(j)$이다.

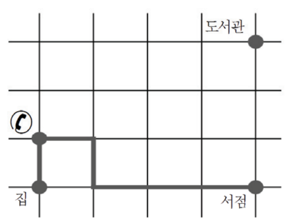
J036

●●●
(2012(7)고3-가형30)

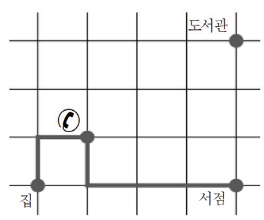
그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 같은 도로망이 있다.



철수가 집에서 도로를 따라 최단거리로 약속장소인 도서관으로 가다가 어떤 교차로에서 약속장소가 서점으로 바뀌었다는 연락을 받고 곧바로 도로를 따라 최단거리로 서점으로 갔다. 집에서 서점까지 지나 온 길이 같은 경우 하나의 경로로 간주한다.
예를 들어, [그림1]과 [그림2]는 연락받은 위치는 다르나, 같은 경로이다.



[그림1]

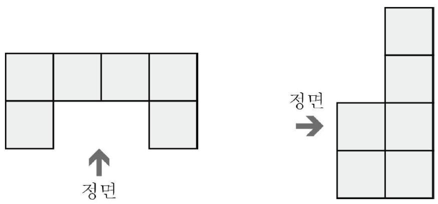


[그림2]

철수가 집에서 서점까지 갈 수 있는 모든 경로의 수를 구하시오. (단, 철수가 도서관에 도착한 후에 서점으로 가는 경우도 포함한다.)

J037
○○○
(2012(10)고3-가형29)

크기가 같은 정육면체 모양의 블록 12개를 모두 사용하여 쌓은 입체도형을 만들려고 한다. 이 도형을 위에서 내려다 본 모양이 〈그림1〉, 정면을 기준으로 오른쪽 옆에서 본 모양이 〈그림2〉와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오. (단, 블록은 서로 구별하지 않는다.) [4점]



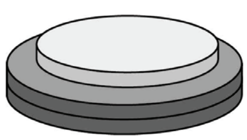
<그림1>　　<그림2>

J038
○○
(2012(10)고3-나형27)

반지름의 길이가 서로 다른 여섯 종류의 원판이 각각 3개씩 18개가 있다. 원판을 다음과 같은 규칙으로 쌓으려고 한다.

(가) 원판 3개를 택하여 원판의 중심이 일치하도록 쌓는다.
(나) 반지름의 길이가 작은 원판은 반지름의 길이가 큰 원판 위에 쌓는다.
(다) 반지름의 길이가 같은 원판은 구별하지 않으면서 쌓는다.

그림은 반지름의 길이가 같은 두 개의 원판과 반지름의 길이가 작은 한 개의 원판을 규칙에 따라 쌓은 예이다.



이와 같이 쌓는 방법의 수를 구하시오. [4점]

J039
○○
(2013(7)고3-A형14)

어느 지역의 5개 야구팀 A, B, C, D, E는 매년 각 팀이 서로 다른 팀들과 각각 9번씩 경기를 하여 승리한 경기 수가 많은 순서로 순위를 결정하는 대회를 한다. (단, 모든 경기에서 무승부는 없다고 한다.)
어느 야구전문가는 각 팀의 전력을 분석하여 내년 대회의 최종결과 중 우선 A, B 두 팀이 승리할 것으로 예상되는 경기 수를 발표하였다. 그 발표를 바탕으로 나머지 세 팀의 결과를 예상하여 최종결과를 다음과 같이 표로 완성할 때, 만들 수 있는 서로 다른 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는? (단, x, y, z는 모두 5 이상의 자연수이다.) [4점]

팀 명	A	B	C	D	E
승리할 것으로 예상되는 경기 수	27	33	x	y	z

① 124　② 130　③ 136
④ 142　⑤ 148

J040
○○
(2013(10)고3-B형8)

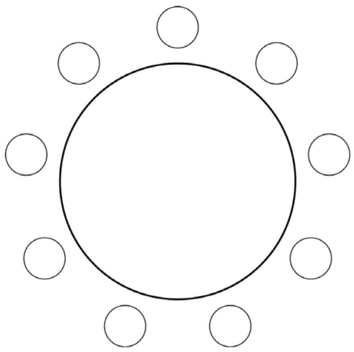
같은 종류의 구슬 다섯 개를 서로 다른 세 개의 주머니에 나누어 넣으려고 한다. 각 주머니 안의 구슬이 세 개 이하가 되도록 넣는 방법의 수는? (단, 구슬끼리는 서로 구별하지 않고 빈 주머니가 있을 수도 있다.) [3점]

① 10　② 11　③ 12
④ 13　⑤ 14

J041

○○○
(2013(7)고3-B형27)

남학생 4명, 여학생 2명이 그림과 같이 9개의 자리가 있는 원탁에 다음 두 조건에 따라 앉으려고 할 때, 앉을 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



(가) 남학생, 여학생 모두 같은 성별끼리 2명씩 조를 만든다. (나) 서로 다른 두 개의 조 사이에 반드시 한 자리를 비워 둔다.

J042

○○
교육청 기출

축구공, 농구공, 배구공 중에서 4개의 공을 선택하는 방법의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 공은 4개 이상씩 있고, 같은 종류의 공은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

J043

○○
교육청 기출

한 개의 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 x, y, z라 하자. 방정식 $x+y+z=6$을 만족시키는 해의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는? [3점]

① 7 ② 10 ③ 13
④ 16 ⑤ 19

J044

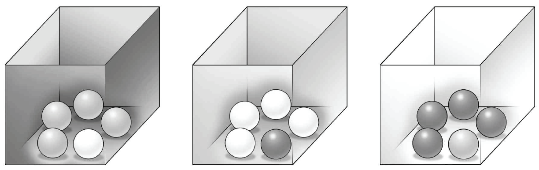
○○○
(2014사관(1차)-A형24)

방정식 $x+3y+3z=32$를 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하시오. [3점]

J045

○○○
(2014(10)고3-A형20)

빨간 공, 파란 공, 노란 공이 각각 5개씩 있다. 이 15개의 공만을 사용하여 빨간 상자, 파란 상자, 노란 상자에 상자의 색과 다른 색의 공을 5개씩 담으려고 한다. 공을 담는 경우의 수는? [4점]



① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

J046

○○
(2014(10)고3-B형14)

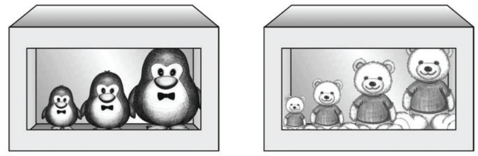
주머니 안에 0, 2, 3, 5가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 넣는 시행을 3회 반복한다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 수를 모두 곱한 값으로 가능한 서로 다른 정수의 개수는? [4점]

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

J047

●●●
(2014(7)고3-B형27)

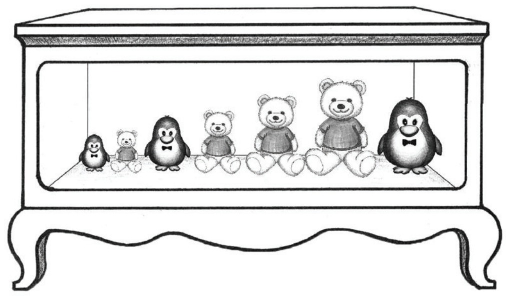
그림과 같이 크기가 서로 다른 3개의 펭귄 인형과 4개의 곰 인형이 두 상자 A, B에 왼쪽부터 크기가 작은 것에서 큰 것 순으로 담겨져 있다.



상자 A　　상자 B

다음 조건을 만족시키도록 상자 A, B의 모든 인형을 일렬로 진열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 같은 상자에 담겨있는 인형은 왼쪽부터 크기가 작은 것에서 큰 것 순으로 진열한다.
(나) 상자 A의 왼쪽에서 두 번째 펭귄 인형은 상자 B의 왼쪽에서 두 번째 곰보다 왼쪽에 진열한다.



J048

○○○
(2015(10)고3-B형18)

다음 조건을 만족시키는 네 자리 자연수의 개수는? [4점]

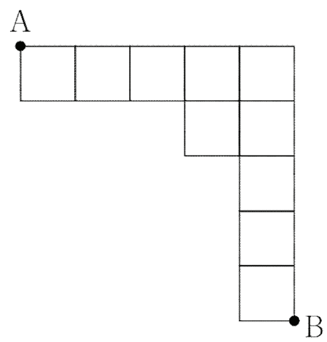
(가) 각 자리의 수의 합은 14이다. (나) 각 자리의 수는 모두 홀수이다.

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

J049

○○
(2015사관(1차)-B형5)

그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.



이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]

① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

J050

○○
(2015경찰대(1차)-공통13)

15 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 뽑을 때, 어느 두 수도 3 이상 차이가 나도록 뽑는 방법의 수는? [4점]

① 108 ② 120 ③ 126
④ 132 ⑤ 144

J051

○○
(2015사관(1차)-A형7)

등식 $abc=1024$를 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [3점]

① 42 ② 48 ③ 54
④ 60 ⑤ 66

J052

★★★
(2015(7)고3–A형30/B형21)

검은 바둑돌 ●과 흰 바둑돌 ○을 일렬로 나열하였을 때 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타날 수 있는 유형은

●●	●○	○●	○○
〈A형〉	〈B형〉	〈C형〉	〈D형〉

으로 4가지이다.
예를 들어, 6개의 바둑돌을 〈A형〉 2번, 〈B형〉 1번, 〈C형〉 1번, 〈D형〉 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 아래와 같이 5이다.

●●○○●●
○●●●○○
○○●●●○
●●●○○●
●○○●●●

10개의 바둑돌을 〈A형〉 4번, 〈B형〉 2번, 〈C형〉 2번, 〈D형〉 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10개 이상씩 있다.) [4점]

J053

○○○
교육청 기출

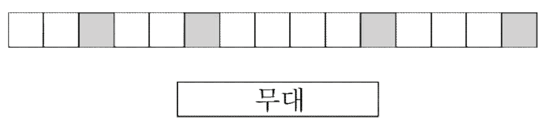
다음 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수를 구하시오. [4점]

(가) N은 10 이상 9999 이하의 홀수이다.
(나) N의 각 자리 수의 합은 7이다.

J054

○○
(2016사관(1차)–A형28)

어느 공연장에 15개의 좌석이 일렬로 배치되어 있다. 이 좌석 중에서 서로 이웃하지 않도록 4개의 좌석을 선택하려고 한다. 예를 들면, 아래 그림의 색칠한 부분과 같이 좌석을 선택한다.



이와 같이 좌석을 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 좌석을 선택하는 순서는 고려하지 않는다.) [4점]

J055

○○○
(2016(4)고3-가형28/나형28)

다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $x+y+z+w=18$
> (나) x, y, z, w 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고, 2개는 3으로 나눈 나머지가 2이다.

J056

○○○
(2016(7)고3-가형18)

다음 조건을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는? [4점]

> (가) 세 수 a, b, c의 합은 짝수이다.
> (나) $a \leq b \leq c \leq 15$

① 320 ② 324 ③ 328
④ 332 ⑤ 336

J057

★★★
(2016(10)고3-가형30)

1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 한 개씩 모두 꺼낼 때, i번째 $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9)$ 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_i라 하자. $1<p<q<9$인 두 자연수 p, q에 대하여 a_i가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $1 \leq i < p$이면 $a_i < a_{i+1}$이다.
> (나) $p \leq i < q$이면 $a_i > a_{i+1}$이다.
> (다) $q \leq i < 9$이면 $a_i < a_{i+1}$이다.

$a_1=2$, $a_p=8$인 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [4점]

J058

○○○
(2016(7)고3-나형17)

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [4점]

> (가) a, b, c, d 중에서 홀수의 개수는 2이다.
> (나) $a+b+c+d=12$

① 108 ② 120 ③ 132
④ 144 ⑤ 156

J059

○○○ (2017(3)고3–가형26)

모든 조건을 만족시키는 네 자연수 a, b, c, d로 이루어진 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a+b+c+d=6$
> (나) $a\times b\times c\times d$는 4의 배수이다.

J060

○○ (2017(4)고3–가형26)

네 개의 자연수 2, 3, 5, 7 중에서 중복을 허락하여 8개를 선택할 때, 선택된 8개의 수의 곱이 60의 배수가 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

J061

○○ (2017(7)고3–가형8)

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 세 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 세 자리 자연수가 홀수인 경우의 수는? [3점]

① 45 ② 55 ③ 65
④ 75 ⑤ 85

J062

○○○ (2017경찰대(1차)–공통23)

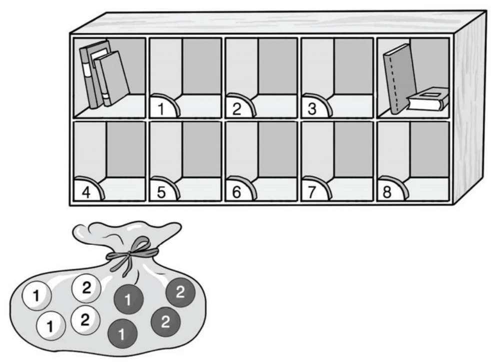
다음 조건을 만족시키며 6일 동안 친구 A, B, C를 초대하는 방법의 수를 구하시오. [4점]

> (가) 매일 A, B, C 중 1명을 초대한다.
> (나) 어떤 친구도 3번 넘게 초대하지 않는다.

J063

○○○ (2017(4)고3–가형28)

그림과 같이 주머니에 숫자 1이 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개, 숫자 2가 적힌 흰 공과 검은 공이 각각 2개가 들어 있고, 비어 있는 8개의 칸에 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 진열장이 있다.



숫자가 적힌 8개의 칸에 주머니 안에 공을 한 칸에 한 개씩 모두 넣을 때, 숫자 4, 5, 6이 적힌 칸에 넣는 세 개의 공이 적힌 수의 합이 5이고 모두 같은 색이 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 모든 공의 크기와 모양이 같다.) [4점]

J064
○○ (2017사관(1차)-나형25)

방정식 $(x+y+z)(s+t)=49$를 만족시키는 자연수 x, y, z, s, t의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ s,\ t)$의 개수를 구하시오. [3점]

J065
○○ (2017사관(1차)-가형14)

같은 종류의 볼펜 6개, 같은 종류의 연필 6개, 같은 종류의 지우개 6개가 필통에 들어 있다. 이 필통에서 8개를 동시에 꺼내는 경우의 수는? (단, 같은 종류끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 18 ② 24 ③ 30
④ 36 ⑤ 42

J066
○○○ (2017(7)고3-나형28)

다음 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 네 자리의 홀수이다.
(나) 각 자리의 수의 합이 8보다 작다.

J067
○○○ (2017(4)고3-나형20)

다음은 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 8 이상의 짝수인 경우의 수를 구하는 과정이다.

(1) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는 216이다.
(2) 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택한 후 일렬로 배열하는 중복순열과 같으므로 이 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
(3) 6 이하의 짝수는 2, 4, 6이므로
세 수의 곱이 2인 경우는 2, 1, 1을
일렬로 배열하는 순열,
세 수의 곱이 4인 경우는 4, 1, 1 또는 2, 2, 1을
일렬로 배열하는 순열,
세 수의 곱이 6인 경우는 6, 1, 1 또는 3, 2, 1을
일렬로 배열하는 순열이다.
그러므로 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 6 이하의 짝수인 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
따라서 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 눈의 수의 곱이 8 이상의 짝수인 경우의 수는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $3a+2b+c$의 값은? [4점]

① 282 ② 284 ③ 286
④ 288 ⑤ 290

J068

●●● (2017(4)고3-나형30)

자연수 n에 대하여 0부터 n까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 과정을 5번 반복할 때, 확인한 5개의 수가 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 a_n이라 하자.

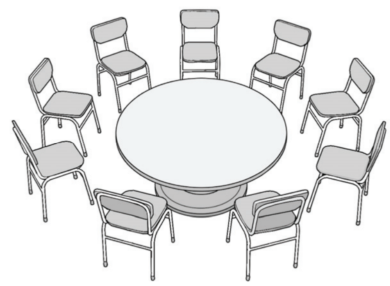
(가) 꺼낸 공에 적힌 수는 먼저 꺼낸 공에 적힌 수보다 작지 않다. (나) 세 번째 꺼낸 공에 적힌 수는 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수보다 1이 더 크다.

$\sum_{n=1}^{18} \frac{a_n}{n+2}$의 값을 구하시오. [4점]

J069

○○ (2017(3)고3-가형15)

여학생 3명과 남학생 6명이 원탁에 같은 간격으로 둘러앉으려고 한다. 각각의 여학생 사이에는 1명 이상의 남학생이 앉고 각각의 여학생 사이에 앉은 남학생의 수는 모두 다르다. 9명의 학생이 모두 앉는 경우의 수가 $n\times 6!$일 때, 자연수 n의 값은? (단, 회전하여 일치하는 것들은 같은 것으로 본다.) [4점]

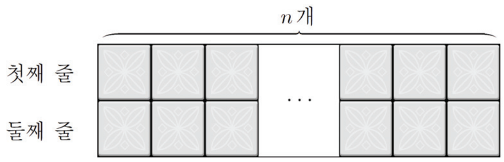


① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

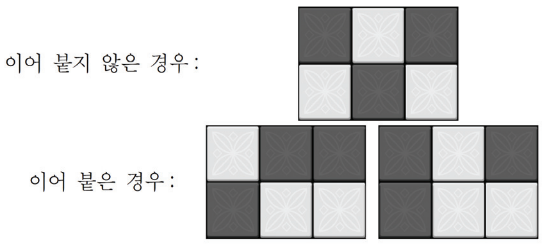
J070

(2017(3)고3-가형20)

그림과 같이 가로로 n개, 세로로 2개씩 총 $2n$개의 크기가 같은 정사각형 모양의 타일을 이어 붙인다.



이 타일 중에서 3개를 골라 검은색으로 칠하되, 검은색으로 칠한 타일이 서로 이어 붙지 않게 하려고 한다. 다음은 검은색으로 칠한 타일이 이어 붙지 않은 경우와 이어 붙은 경우의 한 예이다.



다음은 $n \geq 6$일 때, 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수 $S(n)$을 구하는 과정이다.

> 첫째 줄에 있는 타일 중 검은색으로 칠할 타일의 개수를 $k(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$이라 하면
>
> (ⅰ) $k=0$일 때 둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.
>
> (ⅱ) $k=1$일 때 둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{n-3}$이고, 첫째 줄에서 검은색으로 칠할 타일 1개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이므로, 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{n-3} \times \boxed{\text{(나)}}$ 이다.
>
> (ⅲ) $k=2$일 때 (ⅱ)와 같은 방법으로 구할 수 있다.
>
> (ⅳ) $k=3$일 때 (ⅰ)과 같은 방법으로 구할 수 있다.
>
> 따라서 $S(n)=\dfrac{2(n-2)(2n^2-8n+9)}{3}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(10)+g(8)$의 값은? [4점]

① 60　② 61　③ 62　④ 63　⑤ 64

J071

(2017(10)고3-나형28)

다음 조건을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $abc=180$
> (나) $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$

J072

●●● (2018(3)고3-가형18)

다음은 부등식

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)^{2}\right\}\geq 10\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$$

을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하는 과정이다.

> $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^{n}의 계수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
> $(1+x)^{n}(1+x)^{n}$의 전개식에서 x^{n}의 계수는
> $$\sum_{k=0}^{n}\left\{{}_{n}\mathrm{C}_{k}\times{}_{n}\mathrm{C}_{n-k}\right\}=\sum_{k=0}^{n}\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)^{2}$$
> 이다. 그러므로
> $$\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)^{2}\right\}$$
> $$=\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)^{2}\right\}+\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{n-k}\right)^{2}\right\}$$
> $$=\left\{\left({}_{n}\mathrm{C}_{1}\right)^{2}+2\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{2}\right)^{2}+\cdots+n\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{n}\right)^{2}\right\}$$
> $$+\left\{\left({}_{n}\mathrm{C}_{n-1}\right)^{2}+2\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{n-2}\right)^{2}+\cdots+n\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{0}\right)^{2}\right\}$$
> $$=\boxed{\text{(나)}}\times\left\{\left({}_{n}\mathrm{C}_{0}\right)^{2}+\left({}_{n}\mathrm{C}_{1}\right)^{2}+\cdots+\left({}_{n}\mathrm{C}_{n}\right)^{2}\right\}$$
> $$=\boxed{\text{(나)}}\times\boxed{\text{(가)}}$$
> 이다.
> 따라서 부등식
> $$\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_{n}\mathrm{C}_{k}\right)^{2}\right\}\geq 10\times{}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$$
> 을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(3)+g(3)+p$의 값은? [4점]

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

J073

○○ (2018(7)고3-나형15)

한 개의 주사위를 세 번 던져 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하자. $a+b+c=14$를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

J074

○○○ (2018(3)고3-가형29)

사과, 배, 귤 세 종류의 과일이 각각 2개씩 있다. 이 6개의 과일 중 4개를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 과일은 서로 구별하지 않고, 과일을 한 개도 받지 못하는 학생은 없다.) [4점]

J075

○○ (2018(3)고3-가형26)

세 문자 A, B, C에서 중복을 허락하여 각각 홀수 개씩 모두 7개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 모든 문자는 한 개 이상씩 선택한다.) [4점]

J076

★★★
(2018(4)고3-나형21)

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c+d=12$ (나) 좌표평면에서 두 점 (a, b), (c, d)는 서로 다른 점이며 두 점 중 어떠한 점도 직선 $y=2x$ 위에 있지 않다.

① 125 ② 134 ③ 143
④ 152 ⑤ 161

J077

○○○
(2018(4)고3-나형29)

전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 세 부분집합 S_1, S_2, S_3이

$$n(S_1) \geq 3,\ S_1 \subset S_2 \subset S_3$$

을 만족시킨다. 다음은 집합 S_1, S_2, S_3의 모든 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수를 구하는 과정이다.

$n(S_1)=k(3 \leq k \leq 10$, k는 자연수$)$인 집합 S_1의 개수는 전체집합 U의 원소 10개 중 서로 다른 k개를 선택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}\mathrm{C}_k$이다. 또한 $S_1 \subset S_2 \subset S_3$이므로 집합 S_1에 속하지 않는 원소는 세 집합 S_2-S_1, S_3-S_2, $U-S_3$ 중 어느 한 집합에 속해야 한다. 그러므로 $n(S_1)=k$일 때 집합 S_1, S_2, S_3의 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 ${}_{10}\mathrm{C}_k \times \boxed{(가)}$이다. 따라서 $n(S_1) \geq 3$, $S_1 \subset S_2 \subset S_3$을 만족시키는 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 이항정리에 의하여 $\sum_{k=3}^{10}\left({}_{10}\mathrm{C}_k \times \boxed{(가)}\right)=4^{10}-\boxed{(나)}\times 3^8$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a+f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

J078

★★★
(2018(4)고3-가형29)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서
집합 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$로의 함수 중에서

$$f(1)+f(2)+f(3)-f(4)=3m\ (m\text{은 정수})$$

를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

J079

○○○
(2018경찰대(1차)-공통13)

1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 각각 적힌 5개의 공을 모두 3개의 상자 A, B, C에 넣으려고 한다. 각 상자에 넣어진 공에 적힌 수의 합이 11 이하가 되도록 공을 상자에 넣는 방법의 수는? (단, 빈 상자의 경우에는 넣어진 공에 적힌 수의 합을 0으로 생각한다.) [4점]

① 190 ② 195 ③ 200
④ 205 ⑤ 210

J080

○○○
(2018(10)고3-나형26)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

J 경우의 수

1	④	2	63	3	64	4	②	5	35
6	①	7	③	8	②	9	220	10	②
11	⑤	12	③	13	84	14	41	15	②
16	④	17	32	18	73	19	135	20	45
21	220	22	④	23	51	24	②	25	①
26	①	27	②	28	⑤	29	④	30	211
31	⑤	32	①	33	136	34	①	35	12
36	296	37	60	38	56	39	③	40	③
41	48	42	15	43	②	44	45	45	①
46	②	47	13	48	②	49	②	50	③
51	⑤	52	45	53	49	54	495	55	210
56	⑤	57	243	58	②	59	6	60	35
61	④	62	510	63	180	64	90	65	④
66	80	67	④	68	760	69	②	70	③
71	96	72	①	73	⑤	74	51	75	546
76	②	77	93	78	209	79	⑤	80	525
81	②	82	④	83	②	84	④	85	40
86	⑤	87	40	88	①	89	③	90	126
91	120	92	①	93	8	94	①	95	14
96	④	97	96	98	396	99	④	100	72
101	327	102	37	103	84	104	③	105	③
106	31	107	④	108	④	109	50	110	⑤
111	③	112	55	113	⑤	114	97	115	288
116	206	117	51	118	②	119	150		

K 확률

1	②	2	④	3	73	4	41	5	⑤
6	33	7	②	8	13	9	⑤	10	④
11	17	12	13	13	⑤	14	⑤	15	35
16	⑤	17	①	18	②	19	①	20	④
21	③	22	③	23	④	24	①	25	①
26	④	27	②	28	79	29	142	30	35
31	③	32	②	33	⑤	34	①	35	41
36	12	37	7	38	②	39	126	40	③
41	①	42	323	43	②	44	②	45	②
46	②	47	103	48	④	49	③	50	④
51	②	52	④	53	③	54	④	55	③
56	49	57	④	58	④	59	182	60	②
61	④	62	①	63	③	64	④	65	③
66	251	67	③	68	①	69	⑤	70	④
71	③	72	121	73	10	74	①	75	②
76	③	77	28	78	④	79	③	80	③
81	131	82	③	83	⑤	84	①	85	⑤
86	②	87	25	88	③	89	②	90	①
91	135	92	①	93	②	94	259	95	25
96	⑤	97	④	98	41	99	②		

L 통계

1	121	2	⑤	3	①	4	①	5	20
6	10	7	④	8	③	9	②	10	⑤
11	④	12	②	13	⑤	14	④	15	②
16	③	17	②	18	②	19	④	20	③
21	③	22	②	23	③	24	③	25	40
26	①	27	③	28	③	29	37	30	④
31	③	32	59	33	③	34	②	35	④
36	93	37	②	38	24	39	③	40	26
41	①	42	167	43	①	44	①	45	8
46	②	47	⑤	48	③	49	②	50	③
51	①	52	①	53	②	54	①	55	①
56	149	57	②	58	③	59	②	60	①
61	④	62	⑤	63	80	64	①	65	23

해설 목차

확률과 통계

J 경우의 수

1	④	2	63	3	64	4	②	5	35
6	①	7	③	8	②	9	220	10	②
11	⑤	12	③	13	84	14	41	15	②
16	④	17	32	18	73	19	135	20	45
21	220	22	④	23	51	24	②	25	①
26	①	27	②	28	⑤	29	④	30	211
31	⑤	32	①	33	136	34	①	35	12
36	296	37	60	38	56	39	③	40	③
41	48	42	15	43	②	44	45	45	①
46	②	47	13	48	②	49	②	50	③
51	⑤	52	45	53	49	54	495	55	210
56	⑤	57	243	58	②	59	6	60	35
61	④	62	510	63	180	64	90	65	④
66	80	67	④	68	760	69	②	70	③
71	96	72	①	73	⑤	74	51	75	546
76	②	77	93	78	209	79	⑤	80	525
81	②	82	④	83	②	84	④	85	40
86	⑤	87	40	88	①	89	③	90	126
91	120	92	①	93	8	94	①	95	14
96	④	97	96	98	396	99	④	100	72
101	327	102	37	103	84	104	③	105	③
106	31	107	④	108	④	109	50	110	⑤
111	③	112	55	113	⑤	114	97	115	288
116	206	117	51	118	②	119	150		

J001 ㅣ답 ④

[풀이]

$7 = 2+2+2+1$ …(경우1)

$= 2+2+1+1+1$ …(경우2)

$= 2+1+1+1+1+1$ …(경우3)

$= 1+1+1+1+1+1+1$ …(경우4)

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

- (경우1): $\frac{4!}{3!} = 4$
- (경우2): $\frac{5!}{3!2!} = 10$
- (경우3): $\frac{6!}{5!} = 6$
- (경우4): 1

따라서 구하는 방법의 수는

$4+10+6+1 = 21$

답 ④

J002 ㅣ답 63

[풀이]

각각의 점은 튀어나오거나 그렇지 않은 2가지 경우만이 있으므로 가능한 문자의 개수는 중복순열의 수에 의하여

${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$이다.

그런데 모든 점이 튀어나오지 않는 경우는 제외해야 하므로 구하는 문자의 개수는

$64 - 1 = 63$

답 63

J003 ㅣ답 64

[풀이]

조건 (가)에 의하여

$1 \in A$, $2 \in A$, $3 \notin A$

조건 (나)에 의하여 집합 A는 일곱 개의 수

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

중에서 적어도 네 개 이상을 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 A의 개수는 조합의 수와 합의 법칙에 의하여

$${}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7 = \frac{2^7}{2} = 2^6 = 64$$

$(\because {}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_7C_3$

$+ {}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7 = 2^7$,

${}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_7C_3$

$= {}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7)$

답 64

J004 ㅣ답 ②

[풀이1] 시험장

세 수 a_1, a_2, a_3 중에서 어떤 두 수도 같을 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!} = 120$

이다. 이때, 6!은 여섯 개의 수 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6을 써넣는 경우의 수이고, 3!은 a_1, a_2, a_3을 나열하는 경우의 수이다. 즉, 6!을 3!으로 나누어서 $a_1 < a_2 < a_3$인 한 경우만을 남기는 것이다.

답 ②

[풀이2]

2 이상의 자연수 n에 대하여

$2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-2$

($\because$ 등비수열의 합의 공식)

이므로

$2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}<2^n$

가 성립한다.

2^6은 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5을 모두 합한 값보다 크므로

2^6은 반드시 3열에 와야 한다.

2^6이 3열에 올 경우의 수는 2이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
		2^6

2^5은 2, 2^2, 2^3, 2^4을 모두 합한 값보다 크므로

2^5은 2열 또는 3열에만 올 수 있다.

• (1) 2^5이 2열에 온 경우

2^5이 2열에 올 경우의 수는 2이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
		2^6
	2^5	

2, 2^2, 2^3, 2^4은 어느 자리에 와도

$a_1<a_2<a_3$이 성립한다.

경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_4=4!=24$이다.

• (2) 2^5이 3열에 온 경우

2^5이 3열에 올 경우의 수는 1이다.

1열	2열	3열
		2^6
		2^5

2^4은 2, 2^2, 2^3을 모두 합한 값보다 크므로

2^4은 반드시 2열에 와야 한다.

2^4이 2열에 올 경우의 수는 2이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
	2^4	2^6
		2^5

2, 2^2, 2^3은 어느 자리에 와도

$a_1<a_2<a_3$이 성립한다.

경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3\mathrm{P}_3=3!=6$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여

$2\times(2\times4!+1\times2\times3!)=2\times60=120$

답 ②

[풀이3]

2 이상의 자연수 n에 대하여

$2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-2$

($\because$ 등비수열의 합의 공식)

이므로

$2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}<2^n$

가 성립한다.

2^6은 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5을 모두 합한 값보다 크므로

2^6은 반드시 3열에 와야 한다.

2^6이 3열에 올 경우의 수는 2이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
		2^6

3열의 나머지 자리에 숫자가 올 경우의 수는 5이다. 즉, 3열의 나머지 자리에는 어떤 숫자가 와도 상관없다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
		2^6
		2^2

남은 네 개의 숫자 2, 2^3, 2^4, 2^5 중에서 가장 큰 숫자가 2열에 올 경우의 수는 2이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.

1열	2열	3열
		2^6
	2^5	2^2

2, 2^3, 2^4은 어느 자리에 와도

$a_1<a_2<a_3$이 성립한다.

경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3\mathrm{P}_3=3!=6$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

곱의 법칙에 의하여

$2\times5\times2\times3!=120$

답 ②

[풀이4]

6개의 숫자

$2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6$
중에서 어느 두 수의 합은 모두 다르다.
따라서 구하는 경우의 수는 6개의 수를 2개, 2개, 2개의 세 개의 조로 나눈 다음 각 조의 2개의 수의 자리를 바꾸는 경우의 수와 같다.

$$\left({}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}\right)\times2^2\times2^2\times2^2$$
$=120$

답 ②

J005 | 답 35

[풀이1]
〈표1〉의 왼쪽 빈 칸에 1, 2, 3, 4, 5가 각각
a번, b번, c번, d번, e번 적힌다고 하면
$a+b+c+d+e=7$
(단, $a\ge0$, $b\ge1$, $c\ge1$, $d\ge1$, $e\ge1$)
$b-1=b'$, $c-1=c'$, $d-1=d'$,
$e-1=e'$로 두면
$a+b'+c'+d'+e'=3$
(단, $a\ge0$, $b'\ge0$, $c'\ge0$, $d'\ge0$, $e'\ge0$)
구하는 경우의 수는
${}_5H_3={}_7C_3=35$

답 35

[풀이2]
전체를 다음의 두 경우로 나누어 생각할 수 있다.
- (1) 후반전에서 국가대표팀이 먼저 골을 넣은 경우

〈표1〉

구분	국가 대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전	2	0
	5	3
최종 득점 결과	5	3

〈표1〉의 어두운 부분에 올 수 있는 네 개의 수 2, 3, 4, 5의 개수를 각각 b, c, d, e라고 하면
$b+c+d+e=5$ $\cdots$(*1)
(단, $b\ge0$, $c\ge1$, $d\ge1$, $e\ge0$)
$c-1=c'$, $d-1=d'$로 두고 방정식을 정리하면
$b+c'+d'+e=3$
(단, $b\ge0$, $c'\ge0$, $d'\ge0$, $e\ge0$)
순서쌍 $(b,\ c',\ d',\ e)$의 개수는 b, c', d', e 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$
따라서 방정식 (*1)을 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 20이다.(←일대일대응)
- (2) 후반전에서 국가대표팀이 먼저 골을 넣지 못한 경우

〈표1〉

구분	국가 대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전	1	1
	5	3
최종 득점 결과	5	3

〈표1〉의 어두운 부분에 올 수 있는 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5의 개수를 각각 a, b, c, d, e라고 하면
$a+b+c+d+e=5$ $\cdots$(*2)
(단, $a\ge0$, $b\ge1$, $c\ge1$, $d\ge1$, $e\ge0$)
$b-1=b'$, $c-1=c'$, $d-1=d'$
로 두고 방정식을 정리하면
$a+b'+c'+d'+e=2$
(단, $b'\ge0$, $c'\ge0$, $d'\ge0$)
순서쌍 $(a,\ b',\ c',\ d',\ e)$의 개수는 a, b', c', d', e 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=15$
따라서 방정식 (*2)를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 15이다.
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$20+15=35$

답 35

[풀이3]
우리나라 국가대표팀이 득점한 경우를 A, 실점한 경우를 B라고 하자.
우리나라 국가대표팀이 $5:3$으로 이기기 위해서는 득점과 실점을 각각 5번, 3번해야 한다.

맨 좌측에 1개의 A가 오도록 5개의 A와 3개의 B를 나열하는 경우의 수를 구하면 된다. 즉, 4개의 A와 3개의 B를 나열하는 경우의 수를 구하면 된다.
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$\dfrac{7!}{4!3!}=35$
답 35

J006 | 답 ①

[풀이1]
원소의 개수가 6인 집합을
$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$(전체집합)
이라고 하자.
$A\cup A^C=S$, $A\neq\varnothing$, $A\neq S$
인 집합 A의 개수는 ${}_2\Pi_6-2$이다.
이때, 2^6은 집합 A의 개수(즉, 전체집합 S의 부분집합의 개수)이고, 2는 집합 A가 공집합이거나 전체집합인 경우의 수이다.
그런데
$A=\{1, 3\}$, $A^C=\{2, 4, 5, 6\}$
$A=\{2, 4, 5, 6\}$, $A^C=\{1, 3\}$
과 같이 중복되는 경우가 발생하므로
구하는 경우의 수는 $\dfrac{{}_2\Pi_6-2}{2}=\dfrac{2^6-2}{2}=31$이다.
답 ①

[풀이2]
6명을 두 팀으로 나누는 경우의 수를 구하면 된다.
$6=5+1=4+2=3+3$
이므로 다음의 세 경우로 나누어 생각하자.
- (1) 6명을 5명, 1명으로 나누는 경우

조합의 수와 곱의 법칙에 의하여
${}_6C_5\times{}_1C_1=6$
- (2) 6명을 4명, 2명으로 나누는 경우

${}_6C_4\times{}_2C_2=15$
- (3) 6명을 3명, 3명으로 나누는 경우의 수

${}_6C_3\times{}_3C_3\times\dfrac{1}{2!}=10$
이때, 2!으로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다.
6명을 각각 ◉, ◎, ⦶, ◐, ◑, ◒으로 두었을 때,
(◉, ◎, ⦶)(← ${}_6C_3$에서 발생), (◐, ◑, ◒)(← ${}_3C_3$에서 발생)
(◐, ◑, ◒)(← ${}_6C_3$에서 발생), (◉, ◎, ⦶)(← ${}_3C_3$에서 발생)
위의 두 경우는 중복된다.
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$6+15+10=31$
답 ①

J007 | 답 ③

[풀이]
$(1+x)^n$의 전개식에서 x^k, x^{n-k}의 계수는
각각 ${}_nC_k$, ${}_nC_{n-k}$이므로
$(1+x)^n(1+x)^n$의 전개식에서
$x^n(=x^k\times x^{n-k})$의 계수는
$\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,{}_nC_{n-k}$
$(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는
${}_{2n}C_n$
그런데 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$이므로
${}_{2n}C_n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,{}_nC_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}({}_nC_k)^2$($\because$ 조건(나))
$n=12$라고 하면
${}_{24}C_{12}=\sum_{k=0}^{12}({}_{12}C_k)^2$
$=({}_{12}C_0)^2+({}_{12}C_1)^2+({}_{12}C_2)^2+\cdots+({}_{12}C_{12})^2$
답 ③

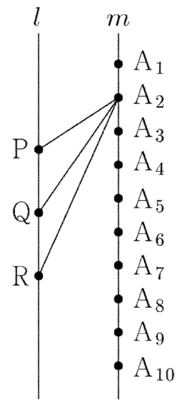
J008 | 답 ②

[풀이]
전개식의 일반항은
${}_7C_r(2x^2)^r\left(\dfrac{1}{x}\right)^{7-r}$ 즉, ${}_7C_r2^rx^{3r-7}$
x^5($3r-7=5$에서 $r=4$)의 계수는
${}_7C_42^4=16{}_7C_3$이다.
답 ②

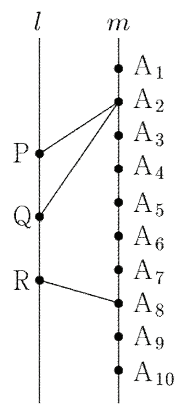
J009 | 답 220

[풀이]
직선 m 위의 10개의 점을 각각

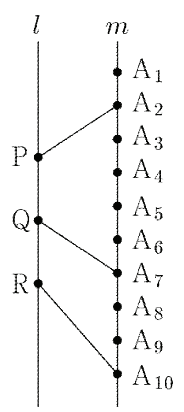
A_1(맨 위), A_2, A_3, $\cdots$, A_{10}(맨 아래)
이라고 하자.
구하는 경우의 수는 10개의 점 A_1, A_2, $\cdots$, A_{10} 중에서 중복을 허용하여 3개의 점을 선택하는 중복조합의 수 ${}_{10}H_3$이다.
예를 들어 세 점 A_2, A_2, A_2를 선택하여 아래와 같이 연결할 수 있다.



예를 들어 세 점 A_2, A_2, A_8을 선택하여 아래와 같이 연결할 수 있다.



예를 들어 세 점 A_2, A_7, A_{10}을 선택하여 아래와 같이 연결할 수 있다.



$\therefore\ {}_{10}H_3 = {}_{10+3-1}C_3 = {}_{12}C_3 = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220$

답 220

J010 | 답 ②

[풀이]
다음과 같은 음이 아닌 정수를 생각하자.
$x \times 10^3 + y \times 10^2 + z \times 10 + w$
(단, x, y, z, w는 9 이하의 음이 아닌 정수이다.)
각 자리의 숫자의 합이 8이므로
$x + y + z + w = 8$
(단, x, y, z, w는 9 이하의 음이 아닌 정수이다.)
이 방정식의 해의 개수는 x, y, z, w 중에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
${}_4H_8 = {}_{4+8-1}C_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = 165$
따라서 구하는 경우의 수는 165이다.

답 ②

J011 | 답 ⑤

[풀이1]
5명의 학생이 1개씩 마실 수 있는 경우의 수와 6명의 학생이 1개씩 마실 수 있는 경우의 수는 같다. 왜냐하면 5명의 학생이 1개씩 마신 후에는 1개가 남기 때문이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{3!2!} = 60$

답 ⑤

[풀이2]
$5 = 3 + 2 + 0$ (경우1)
$= 3 + 1 + 1$ (경우2)
$= 2 + 2 + 1$ (경우3)

- (경우1)

5개의 음료수를 각각
A_1, A_2, A_3, B_1, B_2
로 두자.
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는
$\dfrac{5!}{3!2!} = 10$

- (경우2)

5개의 음료수를 각각
A_1, A_2, A_3, B, C
로 두자.
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는
$\dfrac{5!}{3!} = 20$

- (경우3)

5개의 음료수를 각각

A_1, A_2, B_1, B_2, C

로 두자.

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!}=30$$

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$10+20+30=60$

답 ⑤

[참고]

다음과 같이 조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구해도 좋다.

5명의 학생을 각각 '가, 나, 다, 라, 마' 라고 하자.

• (경우1)

5명의 학생 중에서 A를 마실 3명을 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_3$이다. 예를 들어 다음과 같이 정해졌다고 하자.

가	나	다	라	마
A		A	A	

이제 남은 2명의 학생이 B를 마시면 된다. 이때, 경우의 수는 1이다.

가	나	다	라	마
A	B	A	A	B

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 ${}_5C_3\times1=10$이다.

마찬가지의 방법으로

• (경우2): ${}_5C_3\times{}_2C_1\times1=20$

• (경우3): ${}_5C_2\times{}_3C_2\times1=30$

J012 | 답 ③

[풀이]

4자리 자연수가 3의 배수가 되려면 각 자리수의 합이 3의 배수가 되어야 한다. 전체를 다음의 다섯 경우로 구분하여 생각할 수 있다.

$3+3+3+3=12$(3의 배수) …(경우1)

$3+3+1+2=9$(3의 배수) …(경우2)

$3+2+2+2=9$(3의 배수) …(경우3)

$3+1+1+1=6$(3의 배수) …(경우4)

$1+1+2+2=6$(3의 배수) …(경우5)

같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 각각의 경우의 수를 구하자.

• (경우1) $\frac{4!}{4!}=1$가지

• (경우2) $\frac{4!}{2!}=12$가지

• (경우3) $\frac{4!}{3!}=4$가지

• (경우4) $\frac{4!}{3!}=4$가지

• (경우5) $\frac{4!}{2!2!}=6$가지

합의 법칙에 의하여 구하는 4자리 자연수의 개수는

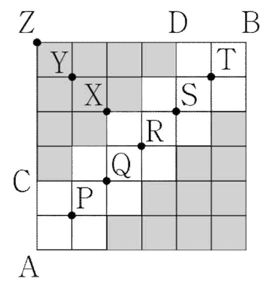
$1+12+4+4+6=27$

답 ③

J013 | 답 84

[풀이1]

아래 그림에서 C, D, X, Y, Z는 직선 도로망의 교차로이다.



저점 C에서 지점 D까지 최단 거리로 가는 경로를 다음과 같이 세 경우로 나누어 생각하자.

• (경우1) C → X → D

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$$\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)=25$$

이때, 각각에 대하여 1을 뺀 이유는 두 지점 Q와 S를 지날 수 없기 때문이다.

• (경우2) C → Y → D

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$$\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}=16$$

• (경우3) C → Z → D

경우의 수는 1이다.

(경우1)~(경우3)은 동시에 발생하지 않으므로

경우의 수는 합의 법칙에 의하여

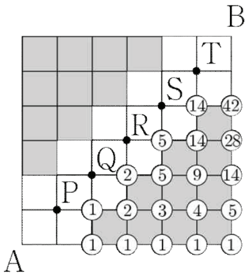
$25+16+1=42$

따라서 지점 A에서 지점 B까지 최단거리로 갈 수 있는 모든 경로의 수는 합의 법칙에 의하여

$42+42=84$

답 84

[풀이2] **시험장**



합의 법칙에 의하여 구하는 경로의 수는

$42+42=84$

답 84

J015 | 답 ②

[풀이]

〈증명〉

2 이상인 자연수 k에 대하여

$k^2=\boxed{{}_kC_1}+2\cdot{}_kC_2$로 나타낼 수 있으므로

$(\because$ (가)$=k^2-2\cdot\dfrac{k(k-1)}{2}=k)$

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$={}_1C_1+({}_2C_1+2\cdot{}_2C_2)+({}_3C_1+2\cdot{}_3C_2)$

$+\cdots+({}_nC_1+2\cdot\boxed{{}_nC_2})$

$=({}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+\cdots+{}_nC_1)+2$

$({}_2C_2+{}_3C_2+\cdots+\boxed{{}_nC_2})$

$={}_{n+1}C_2+2\cdot\boxed{{}_{n+1}C_3}$ ($\because$ 파스칼의 삼각형)

$=\dfrac{(n+1)n}{2}+2\cdot\dfrac{(n+1)n(n-1)}{3!}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(가): ${}_kC_1$

(나): ${}_nC_2$

(다): ${}_{n+1}C_3$

답 ②

J014 | 답 41

[풀이]

세 자리의 자연수를 다음과 같다고 하자.

$a\times10^2+b\times10+c$

(단, a, b, c는 5 이하의 자연수)

이 세 자리의 자연수가 3의 배수이므로

$a+b+c$는 3의 배수이다.

5 이하의 자연수를 다음과 같은 세 경우로 구분하자.

3으로 나눈 나머지가 0인 수: 3 …Ⓐ

3으로 나눈 나머지가 1인 수: 1, 4 …Ⓑ

3으로 나눈 나머지가 2인 수: 2, 5 …Ⓒ

세 자연수의 합이 3의 배수가 되는 경우를 다음과 같이 구분하자.

Ⓐ+Ⓑ+Ⓒ (경우1)

Ⓐ+Ⓐ+Ⓐ (경우2)

Ⓑ+Ⓑ+Ⓑ (경우3)

Ⓒ+Ⓒ+Ⓒ (경우4)

- (경우1) 경우의 수는 조합의 수, 순열의 수, 곱의 법칙에 의하여

${}_1C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1\times3!=24$

- (경우2) 경우의 수는 1이다.
- (경우3) 경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

${}_2\Pi_3=2^3=8$

- (경우4) 경우의 수는 중복조합의 수에 의하여

${}_2\Pi_3=2^3=8$

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$24+1+8+8=41$

답 41

J016 | 답 ④

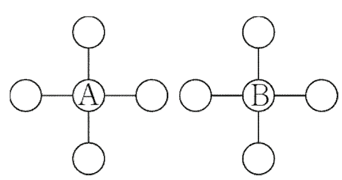
[풀이]

- (1) 2가지의 색으로 칠하는 경우

A, B, C, D 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다.

예를 들어 A, B가 선택되었다고 하자.

중앙 부분에 색을 칠할 경우의 수는 2이고, 이 두 경우 각각에 대하여 날개 부분에 색을 칠할 경우의 수는 1이다.



곱의 법칙에 의하여

${}_4C_2\times2\times1=12$

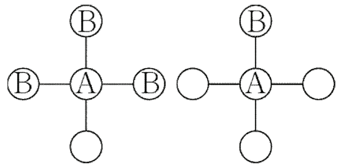
- (2) 3가지의 색으로 칠하는 경우

A, B, C, D 중에서 3개를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3$이다.

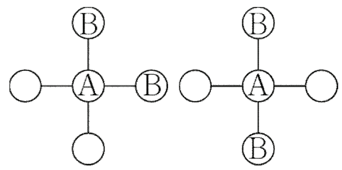
예를 들어 A, B, C가 선택되었다고 하자.

중앙 부분에 색을 칠할 경우의 수는 3이다.

예를 들어 중앙 부분에 칠해진 색이 A라고 하자.
3개의 날개에 같은 색이 칠해지고, 나머지 1개의 날개에는 다른 색이 칠해지는 경우

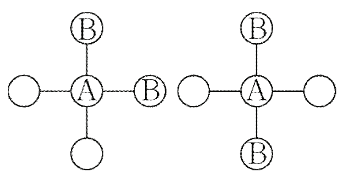


경우의 수는 2이다.
2개의 날개에 같은 색이 칠해지는 경우



경우의 수는 2이다.
곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여
$_{4}C_{3}\times{}_{3}C_{1}\times(2+2)=48$

• (3) 4가지의 색으로 칠하는 경우
중앙 부분에 색을 칠할 경우의 수는 4이다.
예를 들어 중앙 부분에 칠해진 색이 A라고 하자.
B, C, D 중에서 한 색은 2개의 날개에 칠해지고, 나머지 두 색은 각각 1개의 날개에 칠해져야 한다.
예를 들어 B가 2개의 날개에 칠해졌다고 하자.



나머지 날개에 C, D를 칠하는 경우의 수는 각각 2!(왼쪽 그림), 1(오른쪽 그림)이다. 이때, 1은 원순열의 수 $\frac{2!}{2}$이다.
곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여
$_{4}C_{1}\times{}_{3}C_{1}\times(2!+1)=36$
(1)~(3)은 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는
$12+48+36=96$
답 ④

J017 | 답 32

[풀이]
진서가 받는 박하사탕의 개수를 k라고 하면
진서가 받는 알사탕의 개수는 $5-k$이다.
(단, $0\le k\le 5$)
알사탕의 종류는 모두 다르므로
동주가 진서에게 알사탕 $5-k$개를 주는 방법의 수는
5개 중에서 $5-k$개를 택하는 조합의 수에 의하여
$_{5}C_{5-k}={}_{5}C_{k}$
따라서 구하는 경우의 수는
$_{5}C_{0}+{}_{5}C_{1}+{}_{5}C_{2}+{}_{5}C_{3}+{}_{5}C_{4}+{}_{5}C_{5}=2^{5}=32$
답 32

J018 | 답 73

[풀이]
• (1) A가 3개인 경우
A, A, A
경우의 수는 1
• (2) A가 2개인 경우
A, A, ○
경우의 수는 $_{4}C_{1}\times\frac{3!}{2!}=12$
• (3) A가 1개인 경우
A, ○, ○
경우의 수는 $_{4}C_{2}\times 3!=36$
• (4) A가 없는 경우
○, ○, ○
경우의 수는 $_{4}P_{3}=24$
(1)~(4)에서 구하는 경우의 수는
$1+12+36+24=73$
답 73

J019 | 답 135

[풀이]
x^{6}에는 y가 없으므로 $\left(x^{2}-\frac{3}{x}\right)^{6}$의 전개식에서 x^{6}의 계수를 구해도 좋다.
일반항은
$_{6}C_{r}(x^{2})^{r}\left(-\frac{3}{x}\right)^{6-r}={}_{6}C_{r}(-3)^{6-r}x^{3r-6}$
$3r-6=6$에서 $r=4$이므로 x^{6}의 계수는
$_{6}C_{4}(-3)^{2}=15\times 9=135$
답 135

J020 | 답 45

[풀이]
6개의 인형을 일렬로 나열하는 경우의 수는 순열의 수에 의하

여 ${}_6\mathrm{P}_6 = 6!$이다.

그런데 문제에서 주어진 회전모빌에서는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생한다.

A○○○○B, B○○○○A (←중복)

○A B○○○, ○B A○○○ (←중복)

○○○A B○, ○○○B A○ (←중복)

○A B C D○, ○C D A B○ (←중복)

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!2!2!2!} = 45$$

답 45

J021 | 답 220

[풀이1]

10개의 상자에 들어가는 구슬의 개수를 각각

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$

이라고 하면

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 3$

(단, $a_i \ge 0$, $i = 1, 2, 3, \cdots, 10$)

구하는 방법의 수는

${}_{10}\mathrm{H}_3 = {}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$

답 220

[풀이2]

$3 = 3 + 0 + 0$ (경우1)

$= 2 + 1 + 0$ (경우2)

$= 1 + 1 + 1$ (경우3)

- (경우1) 3개의 구슬을 한 상자에 모두 넣는 경우

구슬을 넣는 상자를 결정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_{10}\mathrm{C}_1 (= 10)$이다.

- (경우2) 3개의 구슬을 2개, 1개로 나누어 두 상자에 각각 넣는 경우

구슬을 넣는 상자를 결정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_{10}\mathrm{P}_2 (= 90)$이다.

- (경우3) 3개의 구슬을 1개, 1개, 1개로 나누어 세 상자에 각각 넣는 경우

구슬을 넣는 상자를 결정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_{10}\mathrm{C}_3 (= 120)$이다.

합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

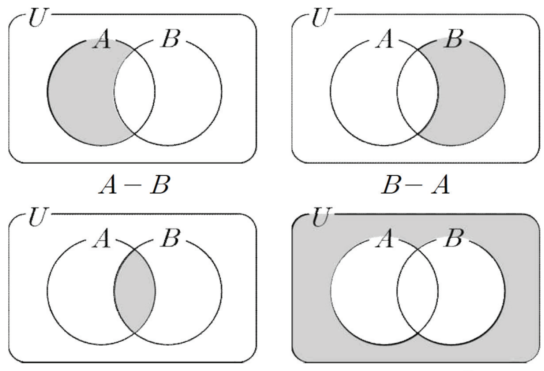
$10 + 90 + 120 = 220$

답 220

J022 | 답 ④

[풀이1] ★

다음과 같은 4개의 집합을 생각하자.



$A - B$ $\quad$ $B - A$

$A \cap B$ $\quad$ $(A \cup B)^C$

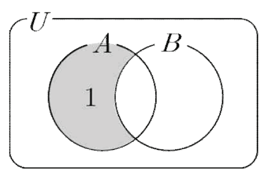
위의 네 집합 중 어느 두 집합의 교집합은 공집합이고, 네 집합의 합집합은 전체집합이다.

조건 (가)에 의하여

$1 \in A - B$ 또는 $1 \in B - A$

또는 $1 \in (A \cup B)^C$이다.

- (1) $1 \in A - B$인 경우



조건 (나)에 의하여 집합 $A - B$의 원소의 개수를 결정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{C}_1 (= 5)$이다. 이때, ${}_5\mathrm{C}_1$은 2, 3, 4, 5, 6 중에서 하나를 택하는 조합의 수이다.

예를 들어 $2 \in A - B$라고 하자.

나머지 원소 3, 4, 5, 6이 포함되는 집합을 결정하는 방법의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_3\Pi_4 (= 3^4 = 81)$이다. 예를 들어 다음과 같이 결정할 수 있다.

원소	$B - A$	$A \cap B$	$(A \cup B)^C$
3	○		
4			○
5			○
6		○	

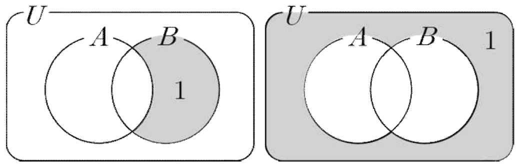
(○= 원소를 포함한다.)

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$5 \times 81 = 405$

- (2) $1 \in B - A$ 또는 $1 \in (A \cup B)^C$인 경우

원소 1이 포함되는 집합을 결정하는 방법의 수는 2이다. (아래 그림)



조건 (나)에 의하여 집합 $A-B$의 원소의 개수를 결정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2(=10)$이다. 이때, ${}_5C_2$는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 두 개를 택하는 조합의 수이다.
예를 들어 $A-B=\{2,\ 3\}$이라고 하자.
나머지 원소 4, 5, 6이 포함되는 집합을 결정하는 방법의 수는 중복순열의 수에 의하여 ${}_3\Pi_3(=3^3=27)$이다. 예를 들어 다음과 같이 결정할 수 있다.

원소	$B-A$	$A\cap B$	$(A\cup B)^C$
4	○		
5		○	
6		○	

(○=원소를 포함한다.)
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$2\times10\times27=540$
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$405+540=945$
답 ④

[풀이2]
두 조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B)$만을 원소로 하는 집합을 각각 P, Q라고 하자.
$Q=(P\cap Q)\cup(P^C\cap Q)$
이므로
$n(P\cap Q)=n(Q)-n(P^C\cap Q)$
$={}_6C_2\times{}_3\Pi_4-{}_5C_2\times{}_3\Pi_3$
(이때, 후자의 경우 $1\in A\cap B$이다.)
$=1215-270$
$=945$
이때, ${}_6C_2$는 집합 $A-B$에 속하는 원소를 결정하는 경우의 수, ${}_3\Pi_4$는 나머지 4개의 원소를 세 집합 $A\cap B$, $B-A$, $U-(A\cup B)$에 분배하는 경우의 수, ${}_5C_2$는 집합 $A-B$에 속하는 원소를 결정하는 경우의 수, ${}_3\Pi_3$는 나머지 3개의 원소를 세 집합 $A\cap B$, $B-A$, $U-(A\cup B)$에 분배하는 경우의 수이다.
답 ④

J023 | 답 51

[풀이]
갑이 이긴 게임의 수와 비긴 게임의 수를 각각 a, b라고 하자.
(단, a, b는 음이 아닌 정수)
갑이 진 게임의 수는 $5-a-b$이므로
을이 이긴 게임의 수와 비긴 게임의 수는 각각 $5-a-b$, b이다. 그리고 을이 진 게임의 수는 a이다.
문제에서 주어진 조건에 의하여
갑: $3a+2b+1(5-a-b)=10$
을: $3(5-a-b)+2b+1a=10$
정리하면
$2a+b=5$
(단, $a\geq0$, $b\geq0$, $a+b\leq5$)
순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 5)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 1)$이다.

- (경우1) $10=2+2+2+2+2$

	이긴 횟수	진 횟수	비긴 횟수
갑	0	0	5
을	0	0	5

다섯 개의 수 2, 2, 2, 2, 2를 나열하는 경우의 수는 1이다.

- (경우2) $10=3+1+2+2+2$

	이긴 횟수	진 횟수	비긴 횟수
갑	1	1	3
을	1	1	3

다섯 개의 수 3, 1, 2, 2, 2를 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{5!}{3!}=20$이다. 예를 들어 2, 2, 1, 3, 2와 같이 나열된 경우에 대응되는 갑, 을의 게임 결과는 다음과 같다.
갑: 무→무→패→승→무
을: 무→무→승→패→무

- (경우3) $10=3+3+1+1+2$

	이긴 횟수	진 횟수	비긴 횟수
갑	2	2	1
을	2	2	1

다섯 개의 수 3, 3, 1, 1, 2를 나열하는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\frac{5!}{2!2!}=30$이다. 예를 들어 1, 3, 1, 3, 2와 같이 나열된 경우에 대응되는 갑, 을의 게임 결과는 다음과 같다.
갑: 패→승→패→승→무
을: 승→패→승→패→무
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$1+20+30=51$

답 51

J024 | 답 ②

[풀이]

〈증명〉

$$(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}C_k x^k$$

에서 $\boxed{x^n}$의 계수는 ${}_{2n}C_n$이다.

한편 $(1+x)^n(1+x)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}{}_nC_{n-k}x^{n-k}\right)$

에서 $\boxed{x^n}$의 계수는 $\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\cdot\boxed{{}_nC_{n-k}}\right)$이다.

$(\because x^n=x^k\cdot x^{n-k})$

따라서 ${}_{2n}C_n=\left({}_nC_0\right)^2+\left({}_nC_1\right)^2+\left({}_nC_2\right)^2+\cdots+\left({}_nC_n\right)^2$이다.

$(\because {}_nC_{n-k}={}_nC_k$이므로

$${}_{2n}C_n=\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\cdot{}_nC_{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\right)^2)$$

그런데 n이 소수이므로 $\boxed{1\le k\le n-1}$인 자연수 k에 대하여

${}_nC_k\left(=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\right)$는 n의 배수이다.

$(\because k=0$ 또는 $k=n$이면 ${}_nC_k$는 1이므로 n의 배수일 수 없다.)

따라서 $\boxed{1\le k\le n-1}$인 자연수 k에 대하여 $\left({}_nC_k\right)^2$은 n^2의 배수이고 ${}_nC_0={}_nC_n=1$이므로 ${}_{2n}C_n-2$는 n^2의 배수이다.

이상에서

(가): x^n

(나): ${}_nC_{n-k}$

(다): $1\le k\le n-1$

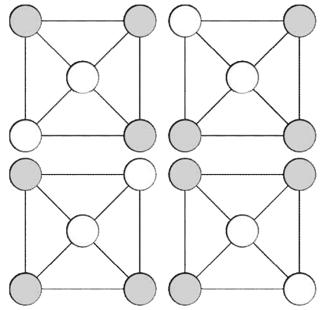
답 ②

J025 | 답 ①

[풀이1]

- (1) 정사각형의 두 대각선의 교점에 놓인 원 안에 돌이 놓이지 않는 경우

다음의 네 경우는 중복된다.

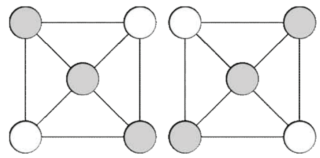


조합의 수, 곱의 법칙, 원순열의 수에 의하여

${}_5C_3\times\dfrac{4!}{4}=60$

- (2) 정사각형의 두 대각선의 교점에 놓인 원 안에 돌이 놓이는 경우

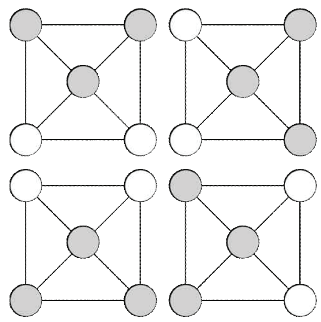
다음의 두 경우는 중복된다.



조합의 수, 곱의 법칙, 원순열의 수에 의하여

${}_5C_3\times{}_3C_1\times\dfrac{2!}{2}=30$

다음의 네 경우는 중복된다.



조합의 수, 곱의 법칙, 순열의 수에 의하여

${}_5C_3\times 3!=60$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$60+30+60=150$

답 ①

[풀이2] 시험장

서로 다른 5개의 돌을 각각 ○, ●, ◉, ☆, ★라고 하자.

우선 5개의 돌을 원 안에 각각 1개씩 올려놓는 방법의 수는

$\dfrac{5!}{4}$ (원순열의 수)

이다. 이 중에서 3개의 돌만 남기는 방법의 수는 ${}_5C_3$이고, 나머지 2개의 돌의 위치를 바꾸는 방법의 수는 $2!$이므로 구하는 방법의 수는

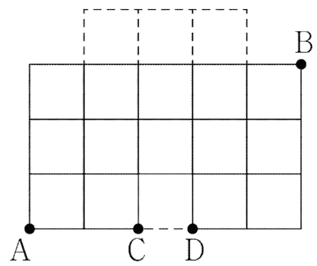
$_5C_3 \times \frac{5!}{4} \times \frac{1}{2!} = 150$

답 ①

J026 | 답 ①

[풀이1]

우선 최단거리로 갈 때, 지날 수 없는 길을 지우자. (아래 그림)



(단, C, D는 도로망의 교차점이다.)

여집합의 관점에서 방법의 수를 구하자.

두 교차점 C와 D가 연결되었을 때, 최단거리로 가는 방법의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{8!}{5!3!} = 56$

$A \to C \to D \to B$인 경우:

$A \to C \to D$의 경우의 수는 1이고,

$D \to B$의 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{5!}{2!3!} = 10$

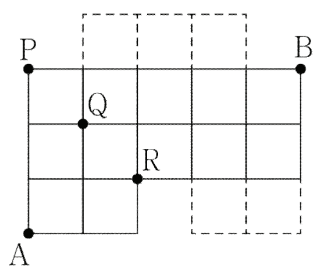
따라서 A에서 출발하여 B까지 최단거리로 가는 방법의 수는

$56 - 10 = 46$

답 ①

[풀이2]

우선 최단거리로 갈 때, 지날 수 없는 길을 지우자. (아래 그림)



(단, P, Q, R은 도로망의 교차점이다.)

$A \to P \to B$인 경우:

곱의 법칙에 의하여

$1 \times 1 = 1$

$A \to Q \to B$인 경우:

같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{4!} = 15$

$A \to R \to B$인 경우:

같은 것이 있는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

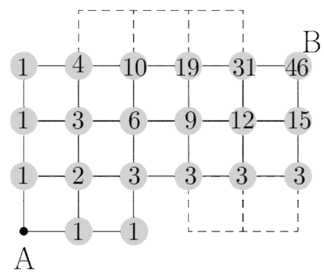
$\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{2!3!} = 30$

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$1 + 15 + 30 = 46$

답 ①

[풀이3] 시험장



합의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는 46이다.

답 ①

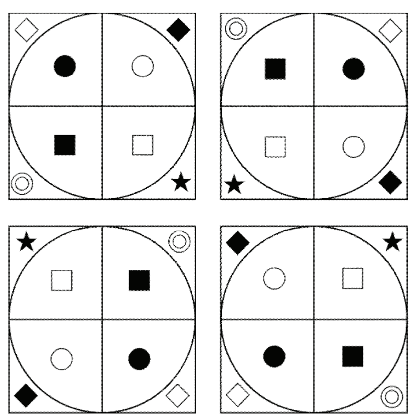
J027 | 답 ②

[풀이1]

8개의 영역에 서로 다른 8가지의 색을 모두 칠하는 경우의 수는 원순열의 수에 의하여

$\frac{8!}{4}$

이때, 8!을 4로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다.



답 ②

[풀이2]

원의 내부의 4개의 영역 각각에 서로 다른 색을 칠할 경우의 수는 원순열의 수에 의하여

$${}_8\mathrm{C}_4 \times \frac{4!}{4}$$

이때, ${}_8\mathrm{C}_4$는 원의 내부에 칠할 색을 선택하는 경우의 수이다.

원의 외부의 4개의 영역 각각에 서로 다른 색을 칠할 경우의 수는 순열의 수에 의하여

4!

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_8\mathrm{C}_4 \times \frac{4!}{4} \times 4!$$

$$= \frac{8\times7\times6\times5}{4!} \times 3! \times 4! = \frac{8!}{4}$$

답 ②

J028 | 답 ⑤

[풀이1] ★

문제에서 주어진 조건에 의하여 $X \neq \varnothing$이다.

집합 X의 원소의 개수의 최솟값과 최댓값은 각각 1, n이다.

집합 X의 원소의 개수가 $k(1 \le k \le n)$인 경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_n\mathrm{C}_k$(←n 이하의 자연수 중에서 k개를 택하는 조합의 수)

집합 X의 k개의 원소 중에서 집합 $X \cap Y$에 속할 한 개의 원소를 택하는 경우의 수는 k이다.

이제 나머지 $n-k$개의 원소는 집합 $Y-X$ 또는 $(X \cup Y)^C$에 속한다. 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 ${}_2\Pi_{n-k} = 2^{n-k}$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k \cdot 2^{n-k}$$

답 ⑤

[풀이2]

집합 $X \cap Y$에 속하는 1개의 원소를 결정하는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{C}_1$이고, 나머지 $n-1$개의 원소가 각각이 속할 집합을 결정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_{n-1}(=3^{n-1})$이므로 구하는 경우의 수는

$${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_3\Pi_{n-1}$$

$$= n \times 3^{n-1}$$

$$= n \times (1+2)^{n-1}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} 2^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\, {}_n\mathrm{C}_k 2^{n-k}$$

$(\because n\, {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

$$= k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

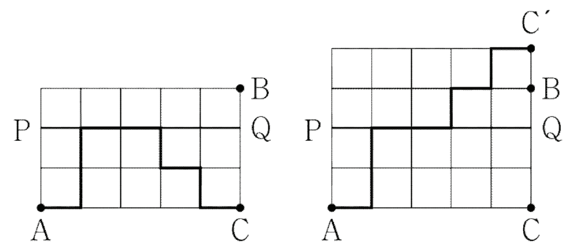
$= k\, {}_n\mathrm{C}_k)$

답 ⑤

J029 | 답 ④

[풀이]

점 C를 직선 PQ에 대하여 대칭이동한 점을 C′라고 하자.



위의 그림처럼 A지점에서 C′지점까지 최단거리로 이동하는 경로의 수가 답이다.

따라서 구하는 경우의 수는

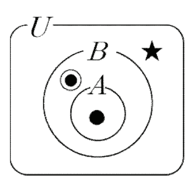
$$\frac{9!}{5!4!} = 126$$

답 ④

J030 | 답 211

[풀이1] ★

세 집합 A(●), $B-A$(◉), $U-B$(★)의 합집합은 전체집합 U이고, 이 세 집합 중에서 어느 두 집합의 교집합도 공집합이다. 다시 말하면 전체집합 U는 세 집합 A, $B-A$, $U-B$로 분할된다. (아래 그림) 이때, $A \neq \varnothing$이다.



구하는 순서쌍의 개수는

$$3^5 - 2^5 = 243 - 32 = 211$$

이다. 이때, 2^5은 $A = \varnothing$일 때의 순서쌍 (A, B)의 개수이다.

이해를 돕기 위해 3^5 중에는 아래의 경우가 포함되어 있다.

	1	2	3	4	5
●	○				
◉		○		○	
★			○		○

즉, $A=\{1\}$, $B-A=\{2, 4\}$, $U-B=\{3, 5\}$

답 211

[풀이2] ★

$n(B)=k$일 때, $A\subset B$를 만족하는 집합 B의 개수는 ${}_5C_k$이고 집합 A의 개수는 2^k-1개이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는 $\sum_{k=1}^{5}{}_5C_k(2^k-1)$이다.

$$\sum_{k=1}^{5}{}_5C_k(2^k-1)=\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k(2^k-1)$$

$$=\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k2^k-\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k=(2+1)^5-2^5=211$$

답 211

J031 | 답 ⑤

[풀이]

○●○●○●

(단, ○는 홀수 번째, ●는 짝수 번째)

●에 2가 올 경우의 수는 ${}_3C_2$, 나머지 자리에 1, 3, 3, 3을 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}$이므로 구하는 경우의 수는

$${}_3C_2\times\frac{4!}{3!}=12$$

답 ⑤

J032 | 답 ①

[풀이]

세 항 x, x^2, x^4의 계수는 각각

${}_{10}C_1a^9$, ${}_{10}C_2a^8$, ${}_{10}C_4a^6$

등비중항의 정의에 의하여

$({}_{10}C_2a^8)^2={}_{10}C_1a^9\times{}_{10}C_4a^6$

풀면

$\therefore\ a=\frac{28}{27}$

답 ①

J033 | 답 136

[풀이]

$f(3)=6$이라고 가정하자.

조건 (다)에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$x>3$이면 $f(x)>6$

그런데 $f(x)$의 값은 6 이하이므로,

이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(3)\neq6$이다.

조건 (가)에 의하여

$f(3)=2$ 또는 $f(3)=4$이다.

▸ (1) $f(3)=2$인 경우

두 조건 (나), (다)에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$x<3$이면 $f(x)<2$이고,

$x>3$이면 $f(x)>2$이다.

$f(1)$, $f(2)$가 가질 수 있는 값은 1이다.

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$이 가질 수 있는 값은

3 또는 4 또는 5 또는 6이다.

경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

$1\times{}_4\Pi_3=1\times4^3=64$

▸ (2) $f(3)=4$인 경우

두 조건 (나), (다)에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$x<3$이면 $f(x)<4$이고,

$x>3$이면 $f(x)>4$이다.

$f(1)$, $f(2)$이 가질 수 있는 값은

1 또는 2 또는 3이다.

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$이 가질 수 있는 값은

5 또는 6이다.

경우의 수는 중복순열의 수에 의하여

${}_3\Pi_2\times{}_2\Pi_3=3^2\times2^3=72$

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$64+72=136$

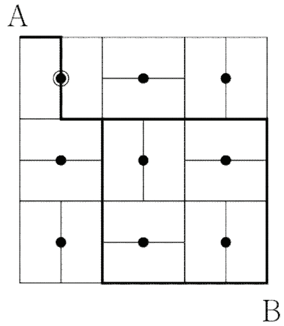
답 136

J034 | 답 ①

[풀이]

전체의 다음의 네 경우로 구분할 수 있다.

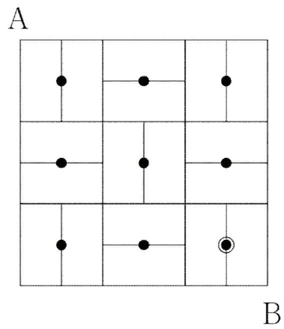
- (경우1)



(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

경로의 수는 곱의 법칙과 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

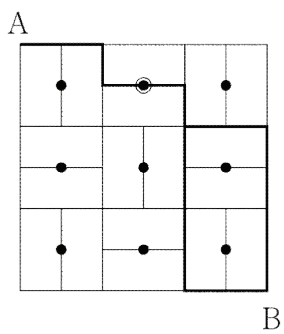
$1\times\frac{4!}{2!2!}=6$



(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

위의 경우도 마찬가지의 방법으로 경로의 수는 6이다.

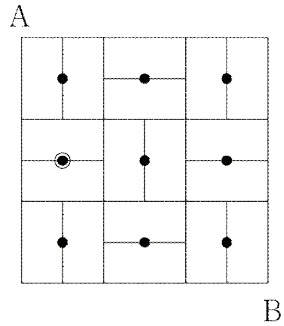
• (경우2)

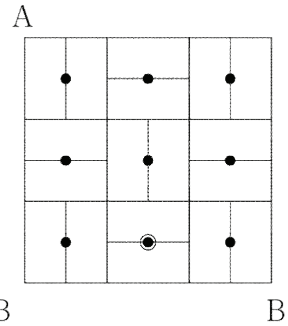


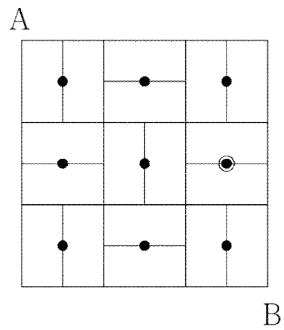
(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

경로의 수는 곱의 법칙과 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$1\times\frac{3!}{2!}=3$



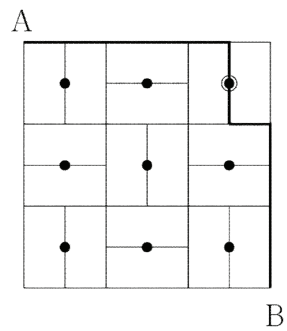




(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

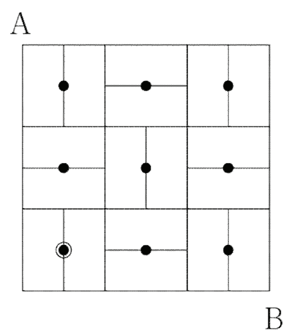
위의 경우들도 마찬가지의 방법으로 경로의 수는 각각 3이다.

• (경우3)



(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

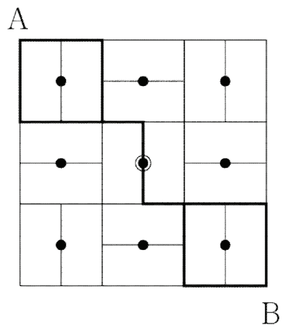
경로의 수는 1이다.



(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)

위의 경우도 마찬가지의 방법으로 경로의 수는 1이다.

• (경우4)



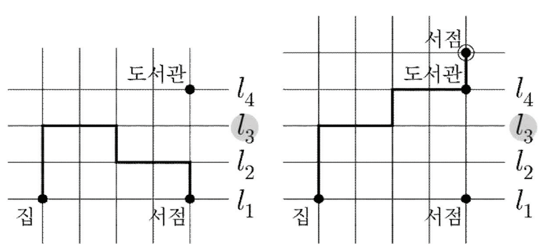
(단, ◉는 지나고, •는 지나지 않는다.)
경로의 수는 곱의 법칙에 의하여
$2\times1\times2=4$
(경우1)~(경우4)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$12+12+2+4=30$
답 ①

J035 | 답 12

[풀이]
두 조건 (가), (나)에 의하여
$f(1)=4$ 또는 $f(1)=5$이고,
$5\le f(3)\le f(4)\le 7$이다.
순서쌍 $(f(3),\ f(4))$의 개수는 5, 6, 7 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$2\times6=12$
답 12

J036 | 답 296

[풀이]



위의 그림과 같이 직선 l_3 위의 교차로에서 전화를 받았을 때, 왼쪽의 집→서점의 경로는 오른쪽의 집→서점 경로에 대응된다. 이때, 오른쪽 그림의 두 서점은 직선 l_3에 대하여 대칭이다.
직선 l_3 위의 교차로에서 전화를 받았을 때,
경로의 수는 $\dfrac{8!}{4!4!}$이다.
마찬가지의 방법으로 전화를 받은 직선이 l_1, l_2, l_4일 때, 경로의 수는 각각
$1,\ \dfrac{6!}{4!2!},\ \dfrac{10!}{4!6!}$
따라서 구하는 경우의 수는
$1+\dfrac{6!}{4!2!}+\dfrac{8!}{4!4!}+\dfrac{10!}{4!6!}$
$=1+15+70+210=296$
답 296

J037 | 답 60

[풀이]
맨 아래 1층에 6개의 블록을 〈그림1〉과 같이 되도록 쌓는다.
이제 나머지 6개의 블록을 쌓으면 된다.
- (1) 2층 앞줄에 각각 1개씩 쌓는 경우

뒷줄에 3개, 1개씩의 블록을 쌓을 방법의 수는
${}_4P_2=4\times3=12$
- (2) 2층 앞줄 두 곳 중 한 곳에만 1개를 쌓는 경우

뒷줄 네 곳 중 한 곳에 3개를 쌓고 나머지 세 곳에 중복을 허락하여 2개를 쌓으면 되므로
${}_2C_1\times{}_4C_1\times{}_3H_2=48$
따라서 구하는 방법의 수는
$12+48=60$
답 60

J038 | 답 56

[풀이]
서로 다른 6종류의 원판의 반지름의 길이를 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6이라고 하자.
맨 위에서부터 아래 방향으로 오는 원판의 반지름의 길이를 각각 p, q, r이라고 하면
$p\le q\le r$
(단, $1\le p,\ r\le 6$)
순서쌍 $(p,\ q,\ r)$의 개수는 중복조합의 수에 의하여
${}_6H_3={}_8C_3=56$
답 56

J039 | 답 ③

[풀이]

5개의 야구팀 중에서 2개의 팀을 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2(=10)$, 총 경기의 수는 곱의 법칙에 의하여 $10\times9=90$이다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$27+33+x+y+z=90$

$(x\ge5,\ y\ge5,\ z\ge5)$

$x=x'+5,\ y=y'+5,\ z=z'+5$로 두고

이 방정식을 정리하면

$x'+y'+z'=15$

$(x'\ge0,\ y'\ge0,\ z'\ge0)$

이 방정식의 해의 개수는 $x',\ y',\ z'$ 중에서 중복을 허용하여 15개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{15}={}_{3+15-1}C_{15}={}_{17}C_{15}={}_{17}C_2=136$

답 ③

J040 | 답 ③

[풀이1]

서로 다른 세 개의 주머니를 각각 A, B, C, 구슬을 ○라고 하자.

전체 경우를 다음과 같은 세 경우로 구분하여 생각하자.

$5=3+2+0$ (경우1)

$=3+1+1$ (경우2)

$=2+2+1$ (경우3)

- (경우1)

A	B	C
○○○	○○	×
○○○	×	○○
○○	○○○	×
×	○○○	○○
○○	×	○○○
×	○○	○○○

경우의 수는 순열의 수에 의하여 $3!=6$이다.

- (경우2)

A	B	C
○○○	○	○
○	○○○	○
○	○	○○○

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{3!}{2!}=3$이다.

- (경우3)

A	B	C
○○	○○	○
○○	○	○○
○	○○	○○

경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{3!}{2!}=3$이다.

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6+3+3=12$

답 ③

[풀이2] 시험장

서로 다른 세 개의 주머니를 각각 A, B, C, 구슬을 ○라고 하자.

문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는 경우만을 생각하자.

$5=5+0+0$ …(경우4)

$=4+1+0$ …(경우5)

- (경우4)

방법의 수는 3이다.

- (경우5)

방법의 수는 $3!=6$이다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_3H_5-(3+6)={}_7C_2-9=12$

이때, ${}_3H_5$는 방정식

$a+b+c=5$ (단, $a\ge0,\ b\ge0,\ c\ge0$)

의 해의 개수이다.

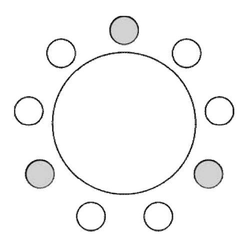
답 ③

J041 | 답 48

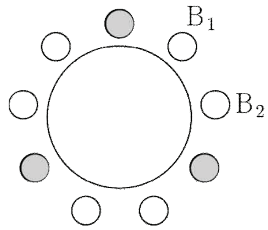
[풀이]

남학생 4명을 각각 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$, 여학생 2명을 각각 $B_1,\ B_2$라고 하자.

조건 (나)를 만족시키기 위해서는 아래 그림과 같이 3개의 자리를 비워야 한다.

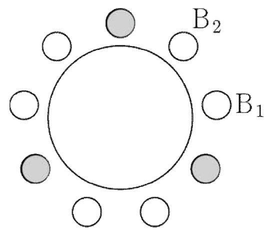


- (1) $B_1\to B_2$가 시계 방향인 경우



나머지 자리에 4명의 남학생이 앉을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.

• (2) $B_1 \rightarrow B_2$가 시계 반대 방향인 경우



나머지 자리에 4명의 남학생이 앉을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는
$24+24=48(=2!\times 4!)$

답 48

J042 | 답 15

[풀이]
축구공, 농구공, 배구공의 개수를 각각 x, y, z라고 하자.
$x+y+z=4$
(단, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$)
이 방정식의 해의 개수는 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

답 15

J043 | 답 ②

[풀이]
x, y, z는 6 이하의 자연수이므로
$x+y+z=6$
(단, $x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$)
$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$
로 두고 이 방정식을 정리하면
$x'+y'+z'=3$
(단, $x'\geq 0$, $y'\geq 0$, $z'\geq 0$)
이 방정식의 해의 개수는 x', y', z' 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$
따라서 구하는 경우의 수는 10이다.

답 ②

J044 | 답 45

[풀이]
문제에서 주어진 방정식을 변형하면
$3(y+z)=32-x$
$32-x$는 6 이상의 3의 배수이므로 x가 가질 수 있는 값은
2, 5, 8, $\cdots$, 26
$x=3x'-1$로 두자. (단, $1\leq x'\leq 9$)
이를 문제에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면
$x'+y+z=11$
(단, $1\leq x'\leq 9$, $y\geq 1$, $z\geq 1$)
$x'-1=x''$, $y-1=y'$, $z-1=z'$으로 두면
$x''+y'+z'=8$
(단, $0\leq x''\leq 8$, $y'\geq 0$, $z'\geq 0$)
이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x'', y', z')의 개수는 세 문자 x'', y', z' 중에서 중복을 허용하여 택하는 중복조합의 수
${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$
이다. 따라서 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 45이다.

답 45

J045 | 답 ①

[풀이]
●, ★, ○를 각각 빨간 공, 파란 공, 노란 공이라고 하자.
예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.
(단계1) 우선 빨간 공 5개를 상자에 담자.

빨간 상자	파란 상자	노란 상자
×	●●●	●●

(단계2) 파란 상자에는 파란 공(★)을 담을 수 없으므로 노란 공(○) 2개를 담아야 하고, 노란 상자에는 노란 공(○)을 담을 수 없으므로 파란 공(★) 3개를 담아야 한다. (아래 표)

빨간 상자	파란 상자	노란 상자
	●●● ○○	●● ★★★

(단계3) 이제 빨간 상자에는 파란 공(★) 2개와 노란 공(○) 3개를 담으면 된다. (아래 표)

빨간 상자	파란 상자	노란 상자
★★ ○○○	●●● ○○	●● ★★★

위와 같이 (단계1)에서 (단계2), (단계3)이 자동으로 결정된다.
따라서 구하는 경우의 수는 방정식
$a+b=5$ (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$)
의 해의 개수와 같다.
중복조합의 수에 의하여
${}_{2}\mathrm{H}_{5}={}_{2+5-1}\mathrm{C}_{5}={}_{6}\mathrm{C}_{1}=6$
답 ①

J046 | 답 ②

[풀이]
꺼낸 3개의 공에 적힌 수 중 네 수 0, 2, 3, 5의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자.
세 수의 곱은 0 또는 $2^b3^c5^d$이고,
$a+b+c+d=3$
(단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$, $d\geq 0$)
이다.
- (1) $a=0$인 경우

$b+c+d=3$
(단, $b\geq 0$, $c\geq 0$, $d\geq 0$)
위의 방정식의 해의 개수는 중복조합의 수에 의하여
${}_{3}\mathrm{H}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$
- (2) $a\neq 0$인 경우

세 수의 곱은 항상 0이다.
(1), (2)에 의하여 서로 다른 정수의 개수는
$10+1=11$
답 ②

J047 | 답 13

[풀이1]
상자 A의 3개의 펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3, 상자 B의 4개의 곰 인형을 크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4라고 하자.
아래의 빈 자리에 7개의 인형을 진열하자.
○○○○○○○
- (경우1)

○○○b_2○○○
b_2의 왼쪽에 a_1, a_2, b_1을 나열하고, b_2의 오른쪽에 a_3, b_3, b_4를 나열하는 경우의 수는
$3\times 3=9\left(=\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}\right)$
이다. 이때, 전자의 3은 b_1을 나열하는 경우의 수이고, 후자의 3은 a_3을 나열하는 경우의 수이다.
- (경우2)

○○○○b_2○○
b_2의 왼쪽에 a_1, a_2, a_3, b_1을 나열하고, b_2의 오른쪽에 b_3, b_4를 나열하는 경우의 수는
$4\times 1=4\left(=\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{2!}{2!}\right)$
이다. 이때, 4는 b_1을 나열하는 경우의 수이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$9+4=13$
답 13

[풀이2]
상자 A의 3개의 펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3, 상자 B의 4개의 곰 인형을 크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4라고 하자.
- (1) a_2가 왼쪽에서 두 번째 자리에 진열될 경우

a_1은 가장 왼쪽에 진열되어야 한다.
a_1 a_2 ○○○○○
a_3이 진열될 경우의 수는 5이다. (아래)
a_1 a_2 a_3 ○○○○
a_1 a_2 ○ a_3 ○○○
a_1 a_2 ○○ a_3 ○○
a_1 a_2 ○○○ a_3 ○
a_1 a_2 ○○○○ a_3
나머지 자리에 4개의 곰 인형을 진열하면 된다.
- (2) a_2가 왼쪽에서 세 번째 자리에 진열될 경우

○○ a_2 ○○○○
a_1, b_1이 진열될 경우의 수는 2이다. (아래)
a_1 b_1 a_2 ○○○○ …(경우1)
b_1 a_1 a_2 ○○○○ …(경우2)
(경우1), (경우2) 각각에 대하여 a_3이 진열될 경우의 수는 4이다. (아래)
- (경우1)에 대하여

a_1 b_1 a_2 a_3 ○○○
a_1 b_1 a_2 ○ a_3 ○○
a_1 b_1 a_2 ○○ a_3 ○
a_1 b_1 a_2 ○○○ a_3

• (경우2)에 대해서도 마찬가지로 생각할 수 있다.

(1), (2)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여

$5+2\times4=13$

답 13

J048 | 답 ②

[풀이]

네 자리의 자연수를 다음과 같이 두자.

$a\times10^3+b\times10^2+c\times10^1+d$

(단, a, b, c, d는 9 이하의 음이 아닌 홀수이다.)

조건 (나)에 의하여

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$,

$d=2d'+1$

(단, a', b', c', d'는 4 이하의 음이 아닌 정수이다.)

이를 조건 (가)에서 주어진 등식에 대입하면

$a'+b'+c'+d'=5$

(단, a', b', c', d'는 4 이하의 음이 아닌 정수이다.)

이 방정식의 해의 개수는 a', b', c', d' 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수

${}_4\mathrm{H}_5={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$

에서 4를 뺀 수 52와 같다.

왜냐하면 순서쌍 (a', b', c', d')가 각각

$(5, 0, 0, 0)$, $(0, 5, 0, 0)$,

$(0, 0, 5, 0)$, $(0, 0, 0, 5)$

인 경우는 제외해야 하기 때문이다.

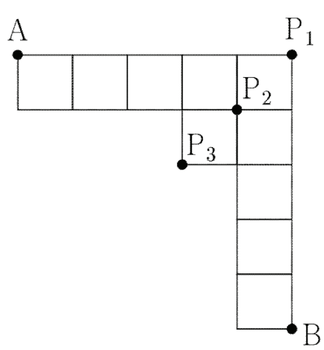
따라서 구하는 경우의 수는 52이다.

답 ②

J049 | 답 ②

[풀이1]

아래 그림에서 P_1, P_2, P_3은 도로망의 교차로이다.



도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 갈 때, 세 지점 P_1, P_2, P_3 중에서 어느 한 지점을 반드시 지나야 한다.

• (1) P_1 지점을 지나는 경우

경우의 수는 1이다.

• (2) P_2 지점을 지나는 경우

경우의 수는 곱의 법칙과 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{5!}{4!}\times\dfrac{5!}{4!}=25$

• (3) P_3 지점을 지나는 경우

경우의 수는 곱의 법칙과 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{4!}{3!}=16$

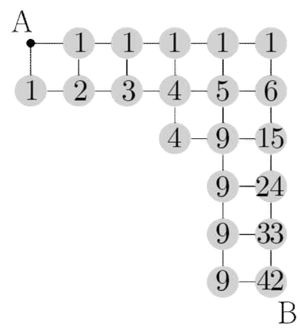
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$1+25+16=42$

답 ②

[풀이2] 시험장



합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 42이다.

답 ②

J050 | 답 ③

[풀이]

네 개의 수를 각각 a, b, c, d라고 하자.

(단, $1\le a<b<c<d\le15$)

문제에서 주어진 조건에 의하여

$b-a\ge3$, $c-b\ge3$, $d-c\ge3$

즉, $b\ge a+3$, $c\ge a+6$, $d\ge a+9$

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

$a=1$, $b=4$, $c=10$, $d=15$

이때, $b-3=b'$, $c-6=c'$, $d-9=d'$라고 하면

$a=1$, $b'=1$, $c'=4$, $d'=6$

따라서 6 이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택하는 중복조합의 수를 구하면 된다.

${}_6\mathrm{H}_4={}_{6+4-1}\mathrm{C}_4={}_9\mathrm{C}_4=126$

답 ③

J051 | 답 ⑤

[풀이]

$1024=2^{10}$이므로 a, b, c는 1이거나 2의 거듭제곱이다.

$a=2^p$, $b=2^q$, $c=2^r$로 두자.

(단, p, q, r은 음이 아닌 정수)

지수법칙에 의하여

$abc=2^{p+q+r}=2^{10}$ 즉, $p+q+r=10$

방정식

$p+q+r=10$

(단, $p\geq 0$, $q\geq 0$, $r\geq 0$)

을 만족시키는 순서쌍 (p, r, q)의 개수는 세 수 p, q, r 중에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수

${}_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

와 같다. 따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 66이다.

답 ⑤

J052 | 답 45

[풀이]

〈B형〉과 〈C형〉이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열하는 경우는

●○●○● ← 경우1

○●○●○ ← 경우2

▸ (경우1)

●↓○●↓○●

위의 ↓ 중에서 한 자리에 한 개의 ○을 놓으면 〈D형〉이 1번 나타난다. 경우의 수는 2이다.

예를 들어 다음과 같이 한 개의 ○이 놓였다고 하자.

↓(x개)●○○↓(y개)●○↓(z개)●

세 개의 ↓ 자리에 각각 x개, y개, z개

(단, $x+y+z=4$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$)

의 ●을 놓으면 〈A형〉이 4번 나타난다.

경우의 수는 ${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$2\times 15=30$

▸ (경우2)

↓○●↓○●↓○

위의 ↓ 중에서 한 자리에 한 개의 ○을 놓으면 〈D형〉이 1번 나타난다. 경우의 수는 3이다.

예를 들어 다음과 같이 한 개의 ○이 놓였다고 하자.

○↓(x개)●○↓(y개)●○○

두 개의 ↓ 자리에 각각 x개, y개

(단, $x+y=4$, $x\geq 0$, $y\geq 0$)

의 ●을 놓으면 〈A형〉이 4번 나타난다.

경우의 수는 ${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4=5$이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$3\times 5=15$

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$30+15=45$

답 45

J053 | 답 49

[풀이]

다음과 같이 자연수 N을 두자.

$N=a\times 10^3+b\times 10^2+c\times 10+d$

(단, a, b, c, d는 9 이하의 음이 아닌 정수이다.)

조건 (나)에서

$a+b+c+d=7$ $\cdots(*)$

조건 (가)에서

N은 홀수이므로 d가 가질 수 있는 값은 1 또는 3 또는 7이다.

(만약 $d=9$이면 $a+b+c+d>7$이므로 가정에 모순이다. 따라서 $d\neq 9$이다.)

• (1) $d=1$인 경우

(*)에 대입하여 정리하면

$a+b+c=6$(단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

순서쌍 (a, b, c)의 개수는 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

이때, (a, b, c, d)가 $(0, 0, 0, 1)$인 경우는 포함되지 않는다.

• (2) $d=3$인 경우

(*)에 대입하여 정리하면

$a+b+c=4$(단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

순서쌍 (a, b, c)의 개수는 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

이때, (a, b, c, d)가 $(0, 0, 0, 3)$인 경우는 포함되지 않는다.

• (3) $d=5$인 경우

(*)에 대입하여 정리하면

$a+b+c=2$(단, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$)

순서쌍 (a, b, c)의 개수는 a, b, c 중에서 중복을 허용하여

2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

이때, $(a,\ b,\ c,\ d)$가 $(0,\ 0,\ 0,\ 5)$인 경우는 포함되지 않는다.

(1), (2), (3)은 동시에 일어나지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$28+15+6=49$

답 49

J054 | 답 495

[풀이]

아래와 같이 사람이 앉을 4개의 좌석 좌우에 a개, b개, c개, d개, e개의 빈좌석이 온다고 하자.

$$\underbrace{\square}_{a\text{개}}\ \blacksquare\ \underbrace{\square}_{b\text{개}}\ \blacksquare\ \underbrace{\square}_{c\text{개}}\ \blacksquare\ \underbrace{\square}_{d\text{개}}\ \blacksquare\ \underbrace{\square}_{e\text{개}}$$

방정식

$a+b+c+d+e=11$

(단, $a\geq 0,\ b\geq 1,\ c\geq 1,\ d\geq 1,\ e\geq 0$)

$b-1=b',\ c-1=c',\ d-1=d'$로 두면

$a+b'+c'+d'+e=8$

(단, $a\geq 0,\ b'\geq 0,\ c'\geq 0,\ d'\geq 0,\ e\geq 0$)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b',\ c',\ d',\ e)$의 개수는 다섯 개의 문자 $a,\ b',\ c',\ d',\ e$ 중에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수

${}_5\mathrm{H}_8={}_{5+8-1}\mathrm{C}_8={}_{12}\mathrm{C}_8={}_{12}\mathrm{C}_4=495$

답 495

J055 | 답 210

[풀이]

$x,\ y,\ z,\ w$ 중에서 '3으로 나눈 나머지가 1'인 2개의 수를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{C}_2(=6)$이다.

선택되지 않은 나머지 2개의 수는 '3으로 나눈 나머지가 2'이다. (조건(나))

예를 들어 2개의 수 $x,\ y$는 '3으로 나눈 나머지가 1', 2개의 수 $z,\ w$는 '3으로 나눈 나머지가 2'라고 하자. 이제 다음과 같이 둘 수 있다.

$x=3x'+1,\ y=3y'+1,\ z=3z'+2,$

$w=3w'+2$

(단, $x',\ y',\ z',\ w'$는 음이 아닌 정수)

이를 조건 (가)에 대입하여 정리하면

$x'+y'+z'+w'=4$

(단, $x'\geq 0,\ y'\geq 0,\ z'\geq 0,\ w'\geq 0$)

순서쌍 $(x',\ y',\ z',\ w')$의 개수는 $x',\ y',\ z',\ w'$ 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_4={}_{4+4-1}\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6\times 35=210$

답 210

J056 | 답 ⑤

[풀이]

세 자연수의 합이 짝수가 되는 경우를 다음과 같은 두 경우로 구분하여 생각하자.

짝+짝+짝=짝, 짝+홀+홀=짝 (←조건(가))

- (1) 세 수 $a,\ b,\ c$가 모두 짝수인 경우

조건 (나)에 의하여 세 수 $a,\ b,\ c$는 14 이하의 짝수이다.

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_7\mathrm{H}_3={}_{7+3-1}\mathrm{C}_3={}_9\mathrm{C}_3=84$

- (2) 세 수 $a,\ b,\ c$ 중에서 두 수는 홀수이고, 나머지 한 수는 짝수인 경우

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수는

${}_8\mathrm{H}_2={}_{8+2-1}\mathrm{C}_2={}_9\mathrm{C}_2=36$

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 중에서 1개를 택하는 조합의 수는

${}_7\mathrm{C}_1=7$

선택한 세 수를 크기순으로 나열하는 경우의 수는 1이다.

($\because$ 예를 들어 3, 5, 2가 선택되면 $a=2,\ b=3,\ c=5$로 유일하게 결정되고, 7, 7, 4가 선택되면 $a=4,\ b=c=7$로 유일하게 결정된다.)

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$36\times 7\times 1=252$

(1), (2)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

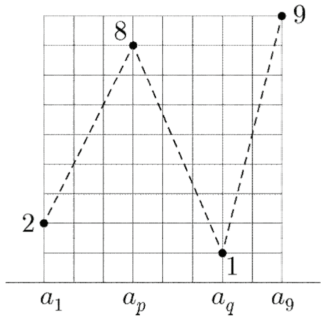
$84+252=336$

답 ⑤

J057 | 답 243

[풀이]

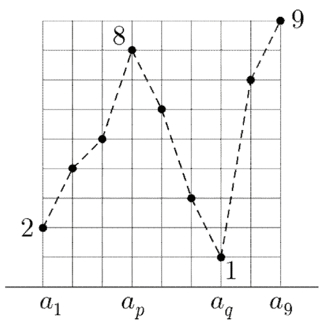
문제에서 주어진 조건 (가), (나), (다)를 시각화하면 다음과 같다.



위의 그림처럼 a_q의 값은 1일 수 밖에 없다. 왜냐하면 두 조건 (나), (다)에 의하여 a_q는 a_p, $\cdots$, a_q, $\cdots$, a_9 중에서 가장 작은 값이기 때문이다. 그리고 a_9의 값은 9일 수 밖에 없다. 왜냐하면 $a_i = 9(i = 2,\ \cdots,\ p-1)$이면 조건 (가)를 만족시키지 않고, $a_i = 9(i = p+1,\ \cdots,\ q-1)$이면 조건 (나)를 만족시키지 않고, $a_i = 9(i = q+1,\ \cdots,\ 8)$이면 조건 (다)를 만족시키지 않기 때문이다. 따라서 귀류법에 의하여 $a_9 = 9$이다.

이제 남은 다섯 개의 수 3, 4, 5, 6, 7이 꺼내어 지는 순서를 결정하면 된다.

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



즉, $2 \to 4 \to 5 \to 8 \to 6 \to 3 \to 1 \to 7 \to 9$의 순서대로 꺼내어진 것이다.

다섯 개의 수 3, 4, 5, 6, 7을 네 개의 수 2, 8, 1, 9 사이사이에 둘 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3^5(={}_3\Pi_5$:중복순열)이다. 예를 들어 2와 8 사이에 5, 7, 8과 1 사이에 4, 6, 1과 9 사이에 3이 올 때, 배열하는 경우의 수는 1이다.(아래)

$2 \to 5 \to 7 \to 8 \to 6 \to 4 \to 1 \to 3 \to 9$

따라서 구하는 경우의 수는

$3^5 \times 1 = 243$

답 243

J058 | 답 ②

[풀이]

네 수 a, b, c, d 중에서 홀수를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2(=6)$이다. (조건(가))

예를 들어 a, b가 홀수라고 하자. 그러면 c, d는 짝수이다.

이제 다음과 같이 두자.

$a = 2a'+1$, $b = 2b'+1$, $c = 2c'$, $d = 2d'$

(단, a', b'는 음이 아닌 정수이고,

c', d'는 자연수이다.)

조건 (나)에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$a'+b'+c'+d' = 5$

(단, $a' \geq 0$, $b' \geq 0$, $c' \geq 1$, $d' \geq 1$)

$c'' = c'-1$, $d'' = d'-1$로 두고 방정식을 다시 정리하면

$a'+b'+c''+d'' = 3$

(단, $a' \geq 0$, $b' \geq 0$, $c'' \geq 0$, $d'' \geq 0$)

이 방정식의 해의 개수는 a', b', c'', d'' 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6 \times 20 = 120$

답 ②

J059 | 답 6

[풀이]

네 자연수 a, b, c, d 중에서 가장 큰 수가 4 이상이면

$a+b+c+d \geq 7$

이므로 조건 (가)에서 주어진 방정식을 만족시키지 않는다.

따라서 네 자연수 a, b, c, d 중에서 가장 큰 수는 3 이하이다.

$6 = 3+1+1+1$ (경우1)

$= 2+2+1+1$ (경우2)

- (경우1)

$a \times b \times c \times d = 3$

3은 4의 배수가 아니므로, 조건 (나)에서 주어진 명제는 거짓이다.

- (경우2)

$a \times b \times c \times d = 4$

4는 4의 배수이므로, 조건 (나)에서 주어진 명제는 참이다.

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 네 수 2, 2, 1, 1을 나열하는 수와 같다.

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 구하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!2!} = 6$

답 6

J060 | 답 35

[풀이]

네 개의 자연수 2, 3, 5, 7을 각각 a개, b개, c개, d개 선택한다고 하자.

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$이므로

$a+b+c+d=8$

(단, $a \geq 2$, $b \geq 1$, $c \geq 1$, $d \geq 0$)

$a-2=a'$, $b-1=b'$, $c-1=c'$로 두면

$a'+b'+c'+d=4$

(단, $a' \geq 0$, $b' \geq 0$, $c' \geq 0$, $d \geq 0$)

위의 방정식의 해의 개수는

중복조합의 수에 의하여

${}_4\mathrm{H}_4 = {}_{4+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$

답 35

J061 | 답 ④

[풀이]

세 자리의 자연수를 ○●◉라고 할 때, ◉에 홀수가 오면 된다.

◉에 올 홀수를 결정할 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$,

○, ●에 올 수를 결정할 경우의 수는 ${}_5\Pi_2 = 5^2$

이므로 구하는 경우의 수는

$3 \times 5^2 = 75$

답 ④

J062 | 답 510

[풀이]

6을 3 이하의 세 개의 음이 아닌 정수의 합으로 나타내면 다음과 같다.

$6 = 3+3+0$ (경우1)

$= 3+2+1$ (경우2)

$= 2+2+2$ (경우3)

- (경우1)

	A	B	C
초대 횟수	3	3	0
	3	0	3
	0	3	3

곱의 법칙과 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 구하는 경우의 수는

$3 \times \dfrac{6!}{3!3!} = 60$

- (경우2)

	A	B	C
초대 횟수	3	2	1
	3	1	2
	⋮	⋮	⋮
	1	2	3

곱의 법칙과 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 구하는 경우의 수는

$3! \times \dfrac{6!}{3!2!} = 360$

- (경우3)

	A	B	C
초대 횟수	2	2	2

곱의 법칙과 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 구하는 경우의 수는

$1 \times \dfrac{6!}{2!2!2!} = 90$

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$60+90+360=510$

답 510

J063 | 답 180

[풀이]

$5 = 1+2+2$이므로

숫자 4, 5, 6이 적힌 칸에 넣는 세 개의 공은

①, ②, ② $\cdots$(경우1)

또는

❶, ❷, ❷ $\cdots$(경우2)

- (경우1)

숫자 4, 5, 6이 적힌 칸에 ①, ②, ②를 넣는 경우의 수는 3이고, 나머지 다섯 개의 칸에 남은 공을 넣을 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!2!} = 30$이므로 경우의 수는

$3 \times 30 = 90$

- (경우2)

(경우1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는 90이다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$90+90=180$

답 180

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2022 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2022 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통 〉

- 공통 1 : 문제를 보자마자 a^2-b^2이 떠올라야 함. 1번부터 '이 시험은 교과서/기출문제를 풀었던 기억으로 푼다.' 를 의도적으로 말하고 있음. 즉, '정해진 풀이를 따르지 않으면 망한다.' 를 노골적으로 표현.
- 공통 8 : 이차함수의 정적분 → 대칭축을 생각한다.
- 공통 13 : 그림을 그릴 수 없으니, 처음부터 끝까지 계산. 로그문제에서 a^b이 나오면 $\log a^b = b\log a$ 생각이 들어야.
- 공통 14 : x축에서 점 P 를 움직이는게 우선.
- 공통 15 : 역대 평가원 기출 중에서 " 코사인법칙에 의하여 " 란 문구가 등장한 첫 번째 문제. 어떤 공식을 써야 하는지 알려 주었는데. 어려운 문제일리 없다. 읽는데 4점.
- 공통 21 : $2+2^2+2^3<2^4$과 같은 계산을 해보았는가? '기하급수적으로 빨라진다.' 의 의미를 아는가를 평가.
- 공통 22 : $f(1)=f(4)$에서 $f(x)$의 그래프의 개형이 바로 나와야 함. 삼차함수의 비율관계.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 28 : 분할, 여사건 모두 가능. 이 문제 보다 경우 구분이 많은 함수 개수 세는 문제는 기출에 널려있음.
- 확률과 통계 29 : 적분 기호 쓰면 좀 더 편하긴 한데. $y=k$ 그리면 더 단순하게 해결 가능.
- 확률과 통계 30 : 답을 맞히기 상당히 어려운, 실수하기 딱 좋은 문제. 수형도 그냥 다 그리는 편이 나음.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 : 평행이동/대칭성 & 기출을 풀었던 경험. 풀이 중간 과정에서 답을 바로 알 수 있음.
- 미적분 29 : 계산이 복잡하니. 극한의 근사적 계산으로 접근하면 실수 없이 빠르게 계산 가능.
- 미적분 30 : (나)의 항등식에 $x=1$, 2, 4 대입하여 점찍고, 확대해서 그리면 끝. 역함수의 정적분 계산 말고, 그림으로 해결.

〈 기하 〉

- 기하 26 : 동일하게 쌍곡선으로 수능에 출제된 적이 있음. 원 밖의 점에서 접선 2개 그으면 합동인 직각삼각형 2개 찾는다.
- 기하 28 : 빗변 주면, 직각삼각형 그리고. 기울기 없으니, 피타 쓰고. 포물선의 정의대로 선분 그으면 직각 안에 수선 그려지니 닮음 쓰고.
- 기하 29 : 문제에서 원 위의 점 주었으니. (나)는 직선(선분)일 수밖에. 이 유형의 문제 중에서도 중급 수준.
- 기하 30 : 평가원 기출 중, 구/직선 정사영 내려서 점의 이동 관찰하는 문제의 확장판. 풀다보면 이면각 보다는 정사영이 좀 더 편하긴 하지만. 이면각의 정의에 의한 풀이도 계산이 거의 없음. 기존 공도 기출과 비교하여 중급 수준.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

구성

▶ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 미적분'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 430개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2021년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2022학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2022학년도 (학년도 기준)

▶ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▶ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
대단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

▶ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

미적분

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

G 수열의 극한

- 2015개정 교육과정

○ 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식은 수학Ⅰ 삼각함수 단원을 따름
○ 삼각형, 사각형, 원, 부채꼴의 기하학적 성질은 개정 중학교 수학 교과서를 따름
○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록
○ 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 포함
○ 라디안 표현이 포함된 문제 포함

G. 수열의 극한

G001

○○
(2003(10)고2-가형18)

다음은 실수 a, b에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$이 수렴할 조건을 구하는 과정이다.

〈과정〉

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$이 수렴하면

$\lim_{n\to\infty}(a^n-b^n)=0$이다.

(ⅰ) $|a|\geq 1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}a^n\left\{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=1$이다.

즉, $\frac{b}{a}=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

(ⅱ) $|a|<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(a^n-b^n)=\lim_{n\to\infty}(-b^n)=0$이므로

$\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n-b^n)$이 수렴할 조건은

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$|a|\geq 1$일 때, $\frac{b}{a}=$ $\boxed{\text{(가)}}$

또는

$|a|<1$일 때, $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

(가), (나)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	0	$\lvert b\rvert\leq 1$
②	0	$\lvert b\rvert>1$
③	1	$\lvert b\rvert\geq 1$
④	1	$\lvert b\rvert<1$
⑤	1	$\lvert b\rvert\leq 1$

G002

○○
(2003(10)고2-가형27)

수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+3}{2a_n-1}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

G003

○○○
(2003경찰대(1차)—공통21)

자연수 n에 대하여 다항함수를 $f_n(x)$라 할 때,

$f_1(x)=x+2$, $f_{n+1}(x)=\frac{d}{dx}\{2xf_n(x)\}$

이라면 $f_n(x)$의 상수항을 a_n, 일차항의 계수를 b_n이라면

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

G004

●●● (2004경찰대(1차)-공통13)

$a_1=1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n=0$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A,\quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n = B \ (A,\ B\text{는 상수})$$

라 할 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (a_{n+1}-a_n)$을 구하면?

① $-A-2B-1$ ② $-A-B-1$ ③ $-A-2B+1$
④ $-A+B-1$ ⑤ $A+2B-1$

G005

○○ (2004사관(1차)-문과21)

일반항이 $a_n = n\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a\right)(n\ge 1)$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음은 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$이 존재하도록 하는 실수 a의 값과 이 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

〈과정〉

$$a_n = n\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)=\frac{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a}{\frac{1}{n}}$$

이므로 이 수열이 수렴하려면

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a\right)=$ $\boxed{(가)}$ 이다.

그러므로 $a=$ $\boxed{(나)}$ 이다.

따라서, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$ $\boxed{(다)}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [4점]

① $1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}$ ② $1,\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}$

③ $0,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}$ ④ $0,\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{16}$

⑤ $0,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{16}$

G006

○○○ (2005사관(1차)-문과15)

다음은

$$a_0=\frac{\pi}{2},\ a_1=1,\ a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}a_n$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{2n+1}\le\frac{I}{\sqrt{n}}\le a_{2n-2}$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

가 성립할 때, I의 값을 구하는 과정이다.

〈과정〉

Ⅰ) 자연수 n에 대하여 $na_na_{n-1}=\frac{\pi}{2}$임을 수학적 귀납법으로 증명하면

ⅰ) $n=1$일 때, $a_1\cdot a_0=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$이므로 성립한다.

ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때,

$(k+1)a_{k+1}a_k=(k+1)\boxed{\text{(가)}}a_k=\frac{\pi}{2}$

이므로 성립한다.

Ⅱ) 수열 $\{a_n\}$이 감소하는 수열임을 수학적 귀납법으로 증명하면

⋮

중략

⋮

따라서 $a_n\ge a_{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이다.

조건에서 $a_{2n+1}\le\frac{I}{\sqrt{n}}\le a_{2n-2}$이고 수열 $\{a_n\}$이 감소하는 수열이므로

$na_{2n+2}a_{2n+1}\le\boxed{\text{(나)}}\le na_{2n-2}a_{2n-3}$

임을 유추할 수 있다.

그러므로 Ⅰ)에 의해서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{n\pi}{2(2n+2)}\le\boxed{\text{(나)}}\le\frac{n\pi}{2(2n-2)}$

따라서 $I=\boxed{\text{(다)}}$이다.

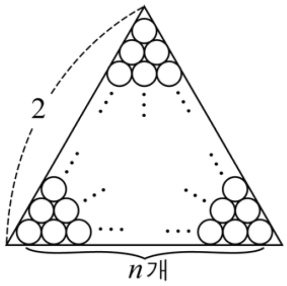
위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{k}{k+1}a_{k-1}$	I	$\frac{\pi}{2}$
②	$\frac{k+1}{k}a_{k-1}$	I	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
③	$\frac{k}{k+1}a_{k-1}$	I^2	$\frac{\pi}{4}$
④	$\frac{k+1}{k}a_{k-1}$	I^2	$\frac{\pi}{4}$
⑤	$\frac{k}{k+1}a_{k-1}$	I^2	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

G007

○○○
(2005(10)고3-가형16/나형11)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 내부에 크기가 같은 원들이 첫째 행부터 차례로 한 개, 두 개, 세 개, $\cdots$, n개가 배열되어 있다. 이 원들은 서로 외접하고, 가장자리의 원들은 삼각형의 각 변에 접한다.
자연수 n의 값이 한없이 커질 때, 이 원들의 넓이의 합은 어떤 값에 한없이 가까워지는가? [4점]



① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{2}{5}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

G008

○○
(2005(4)고3-나형12)

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, α는 상수) [3점]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다. ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이다. ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G009

○○
(2005(7)고3-나형24)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1 = 2$,

$$a_{n+1} = \frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)} - 2a_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이다. 30α의 값을 구하시오. [4점]

G010

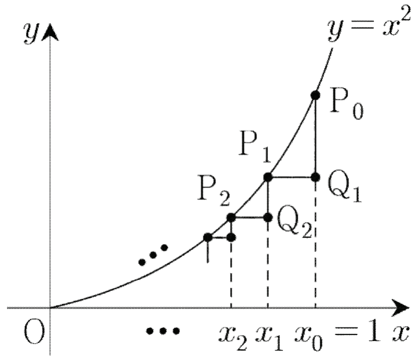
○○ (2005(3)고3−가형22)

$x_0=1,\ x_1=\dfrac{3}{4},\ x_2=\dfrac{5}{8},\ \cdots,\ x_n=\dfrac{2^n+1}{2^{n+1}},\ \cdots$

에 대하여 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}_0(1,\ 1)$과 $\mathrm{P}_n(x_n,\ x_n^2)$, $\mathrm{Q}_n(x_{n-1},\ x_n^2)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 그림과 같이 나타낸다. 급수

$\overline{\mathrm{P_0Q_1}}+\overline{\mathrm{Q_1P_1}}+\overline{\mathrm{P_1Q_2}}+\overline{\mathrm{Q_2P_2}}+\overline{\mathrm{P_2Q_3}}+\cdots$

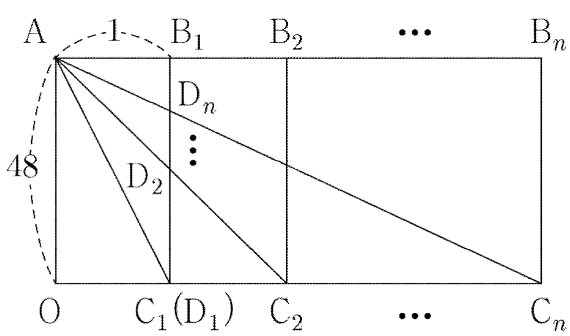
의 합을 S라 할 때, $100S$의 값을 구하시오. [4점]



G011

○○ (2005(3)고3−가형25)

그림과 같이 자연수 n에 대하여 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 48인 직사각형 $\mathrm{OAB}_n\mathrm{C}_n$이 있다. 대각선 AC_n과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 교점을 D_n이라 한다.



이때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AC}_n}-\overline{\mathrm{OC}_n}}{\overline{\mathrm{B_1D}_n}}$의 값을 구하시오. [4점]

G012

○○○ (2005(7)고3−나형14)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? (단, α, β는 실수이고, n은 자연수이다.) [4점]

ㄱ. $a_n>b_n$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$이면 $\alpha>\beta$이다.

ㄴ. $a_n>b_n$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$이면 $\alpha>\beta$이다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$이고 $\alpha>\beta$이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n>\lim_{n\to\infty}b_n$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

G013

○○○ (2005(7)고3−가형14)

삼차함수 $y=f(x)$가 극댓값 $\dfrac{1}{2}$, 극솟값 -2를 가질 때, 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}$$

이때, 실수 전체의 집합에서 함수 $y=g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다. α의 개수는? [4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

G014

○○○ (2006(10)고3-가형14)

함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 구간 $[0,\ a_1]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 a_2, 구간 $[0,\ a_2]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 a_3이라고 하자. 이와 같이 계속하여 a_4, a_5, $\cdots$를 정할 때, 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? (단, a_1, a_2, a_3, $\cdots$은 양수이다.) [4점]

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $f(a_n)>f(a_{n+1})$이다.
ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $f'(a_n)>f'(a_{n+1})$이다.
ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty} f'(a_n)=-3$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G015

○○ (2006(4)고3-나형29)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\left(a_1-\frac{2}{1^2}\right)+\left(a_2-\frac{2+4}{3^2}\right)+\cdots+\left\{a_n-\frac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-1)^2}\right\}+\cdots$$

이 수렴할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

G016

○○ (2006(9)고2-가형29)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\frac{1}{4}$이고 $na_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족한다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_nS_{n+2}}$의 값을 구하시오. [4점]

G017

○○ (2006(9)고2-가형19)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$이다.
ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=5$이다.
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_nb_n\neq 0$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

G018

○○ (2006(11)고2-가형11)

수열의 극한에 대하여 항상 옳은 것을 보기에서 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$(일정)이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$이다.
ㄴ. $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$(일정)이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이다.
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G019

○○ (2006(3)고3-나형28)

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대한 옳은 설명을 보기에서 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n b_n\}$이 모두 수렴하면, 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.
ㄴ. $\lim_{n\to\infty} (a_n - 2b_n) = 0$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$이다.
ㄷ. $a_n < b_n < c_n$이고 $\lim_{n\to\infty} (c_n - a_n) = 0$이면, 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

G020

○○ (2006(4)고3-나형30)

등비급수

$$\cos^2\theta + \cos^2\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta + \cdots$$

의 합이 $\frac{18}{13}$일 때, $\frac{10}{\tan\theta}$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]

G021

○○ (2006(11)고2-가형28)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n을 $|x| + |y| = n$으로 둘러싸인 좌표평면 위의 도형의 넓이라고 하자. 이때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{a_n a_{n+1}}$의 합을 구하시오. [4점]

G022

○○ (2006(9)고2-가형8)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 모두 만족할 때 a_5의 값은? [4점]

(가) $(a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2(a_1 + a_2)$

(다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 2(a_1 + a_3)$

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

G023

○○ (2006(11)고2-가형16)

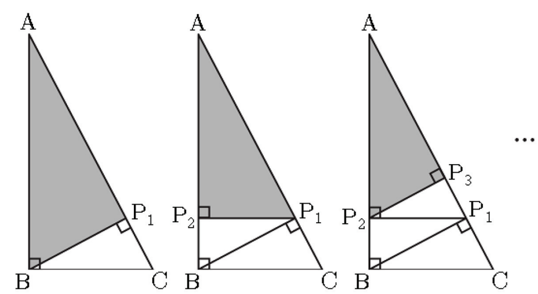
[그림1]과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 대변 AC에 내린 수선의 발을 P_1, $\triangle ABP_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

[그림2]와 같이 직각삼각형 $\triangle ABP_1$의 꼭짓점 P_1에서 대변 AB에 내린 수선의 발을 P_2, $\triangle AP_1P_2$의 넓이를 S_2라 하자.

[그림3]과 같이 직각삼각형 $\triangle AP_1P_2$의 꼭짓점 P_2에서 대변 AP_1에 내린 수선의 발을 P_3, $\triangle AP_2P_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

⋮

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 $\triangle AP_{n-1}P_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 점 B는 점 P_0이다.) [4점]



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

G024

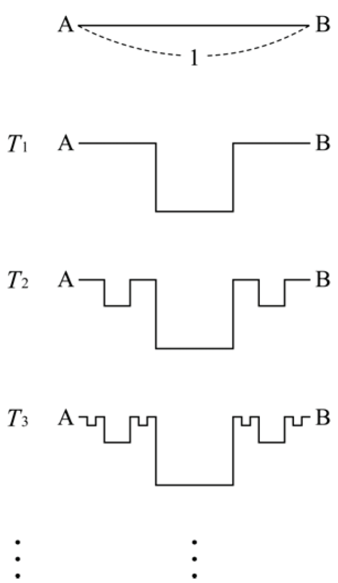
○○ (2007(3)고3-가형29/나형29)

길이가 1인 선분 AB가 있다. 그림과 같이 선분 AB를 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_1이라 하자.

T_1의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 두 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_2라 하자.

T_2의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 네 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속 반복하여 n번째 만든 도형을 T_n이라 하고, T_n에 있는 모든 선분의 길이의 총합을 l_n이라 하자. 이때, $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$의 값은? [4점]



① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$

④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

G025

○○ (2007(3)고3-나형8)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$라 하자.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+a_k)}$의 값은? [3점]

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

G026

○○ (2007(3)고3-나형15)

$0<x<16$일 때, 수열 $\left\{\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}x\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 자연수 x의 개수는? [4점]

G027

○○○
(2007사관(1차)-문과14)

수열 $\{S_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$일 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구하는 과정이다.

〈과정〉

모든 양의 실수 x에 대하여

$$\frac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$$

가 성립한다.

자연수 k, n $(k\le n)$에 대하여 $x=\frac{k}{n^2}$를 위 부등식에 대입하여 정리하면

$$\frac{k}{2n^2+k}<\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1<\frac{k}{2n^2}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}<S_n<\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

이다. 이 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\boxed{(가)}$$ 이고

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4}=\boxed{(나)}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\boxed{(다)}$이다.

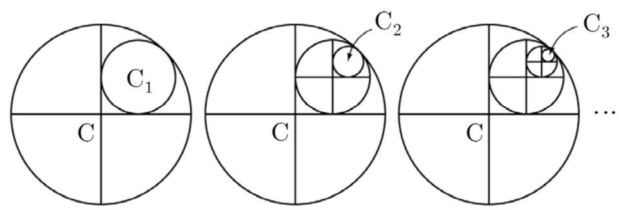
위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은? [3점]

① $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

G028

○○
(2007(4)고3-가형17)

반지름의 길이가 1인 원 C가 있다.
원 C를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_1,
원 C_1을 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_2,
원 C_2를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_3,
⋮
이와 같은 과정을 계속하여 얻어진 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}r_k$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　④ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$　⑤ 1

G029

○○
(2007(4)고3-가형5)

보기에서 수렴하는 수열을 모두 고른 것은? [3점]

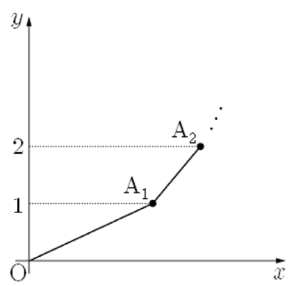
ㄱ. $\left\{\tan\frac{2n+1}{4}\pi\right\}$
ㄴ. $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$
ㄷ. $\left\{\log_2 n^2 - 2\log_2(n+2)\right\}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G030

○○
(2007(7)고3-가형11)

자연수 n에 대하여 점 A_n은 직선 $y=n$ 위에 있다. 선분 A_0A_1의 기울기가 $\frac{3}{4}$이고, 선분 A_nA_{n+1}의 기울기는 선분 $A_{n-1}A_n$의 기울기의 $\frac{4}{3}$배이다. 점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값은? (단, 원점 $O=A_0$) [3점]

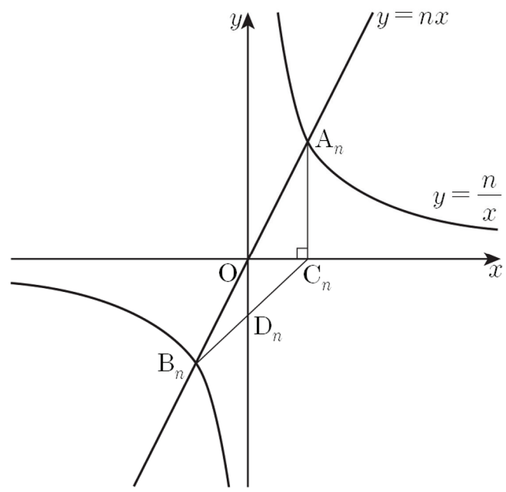


① $\frac{16}{3}$ ② 5 ③ $\frac{14}{3}$
④ $\frac{13}{3}$ ⑤ 4

G031

○○
(2007(11)고2-가형14)

그림과 같이 자연수 n에 대하여 $y=nx$, $y=\frac{n}{x}$의 그래프의 두 교점을 각각 A_n, B_n, 점 A_n에서 x축에 내린 수선의 발을 C_n, 선분 B_nC_n와 y축과의 교점을 D_n이라 하자. 사다리꼴 $OD_nC_nA_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 OB_nD_n의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n+n}{S_n+n+1}$의 값은? [4점]

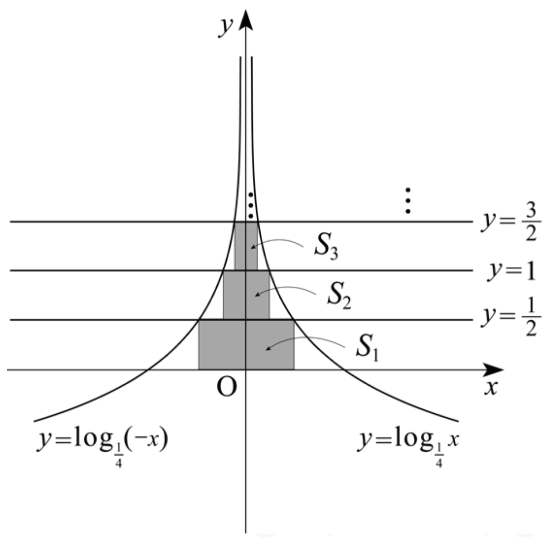


① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{4}{7}$
④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

G032

○○
(2007(10)고3-가형14)

두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 x축 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_1이라 하자.
두 곡선이 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 직선 $y=\frac{1}{2}$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_2라 하자. 두 곡선이 직선 $y=\frac{3}{2}$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 직선 $y=1$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_3이라 하자.
위와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{7}{8}$
④ 1 ⑤ $\frac{9}{8}$

G033

○○
(2007(3)고3-가형5)

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$이 모두 수렴할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

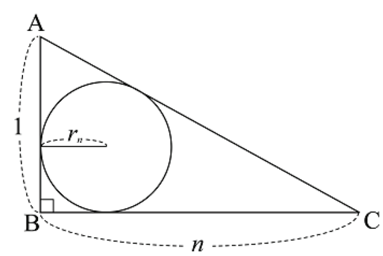
> ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n=1$
>
> ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.
>
> ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G034

○○
(2007(9)고2-가형7)

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=n$, $\angle ABC=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} r_n$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [3점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

G035

○○ (2007(7)고3-나형27)

수열의 극한값과 급수의 성질이다. 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다. (단, α, β는 상수)
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴한다.
ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n$이 수렴한다. (단, α는 상수)

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

G036

○○○ (2008사관(1차)-문과11)

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$을 만족한다. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때, 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\{c_n\}$이 수렴하면 $\alpha = \beta$이다.
ㄴ. $\{c_n\}$이 발산하면 $\alpha < \beta$이다.
ㄷ. $\alpha = \beta = 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

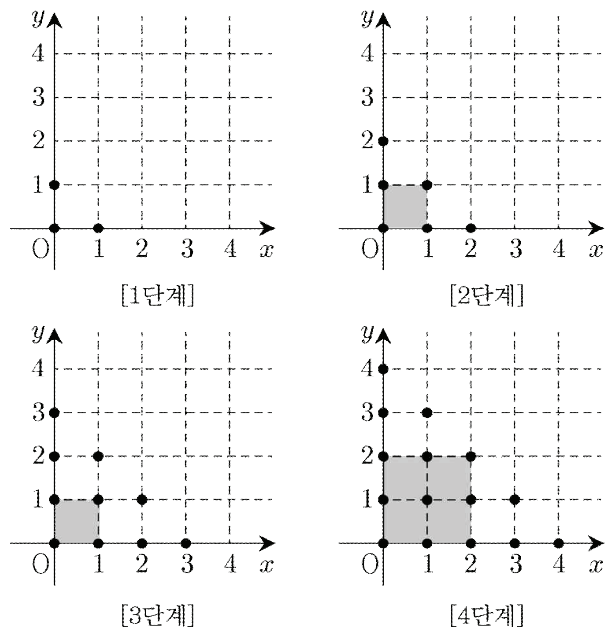
G037

○○○ (2007(10)고3-가형17/나형17)

다음과 같이 좌표평면 위에 단계별로 x좌표와 y좌표가 음이 아닌 정수인 점을 표시한다.

[1단계]에서는 원점과 x좌표와 y좌표의 합이 1인 점들을 표시하고, [2단계]에서는 [1단계]의 점에 x좌표와 y좌표의 합이 2인 점들을 추가로 표시한다.

이와 같은 방법으로 [n단계]에서는 [$n-1$단계]의 점에 x좌표와 y좌표의 합이 $n(n=2, 3, 4, \cdots)$인 점들을 추가로 표시한다.



⋮

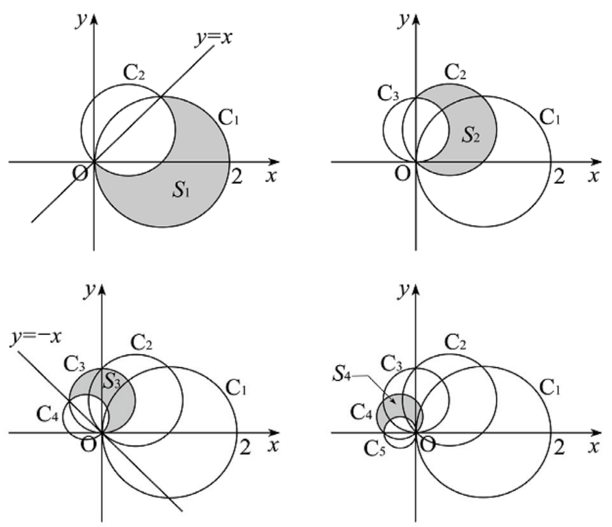
이때, [n단계]에 있는 모든 점의 개수를 a_n, [n단계]에 있는 점들을 꼭짓점으로 하는 정사각형 중에서 원점을 한 꼭짓점으로 하고 넓이가 최대인 정사각형의 내부 및 둘레에 있는 모든 점의 개수를 b_n이라 하자. 예를 들어 $a_4 = 15$, $b_4 = 9$이다. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{b_{2n}}$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$　② 2　③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{4}{3}$　⑤ 1

G038

○○○
(2008(3)고3-가형17)

그림과 같이 원점 O와 점 $(2,\ 0)$을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_1이라 하자. 또, 원 C_1과 직선 $y=x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_2, 원 C_2와 y축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_3이라 하자. 또, 원 C_3과 직선 $y=-x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_4, 원 C_4와 x축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_5라 하자.



이와 같은 방법으로 중심이 차례로 직선 $y=x$, y축, 직선 $y=-x$, x축, $\cdots$ 위에 있는 원 C_6, C_7, C_8, C_9, $\cdots$를 한없이 만들어갈 때, 원 C_n의 내부와 원 C_{n+1}의 외부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이를 $S_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

① $\pi+1$　② $\frac{3}{2}\pi$　③ $\frac{5}{4}(\pi+1)$　④ $\frac{3}{2}(\pi+1)$　⑤ 2π

G039

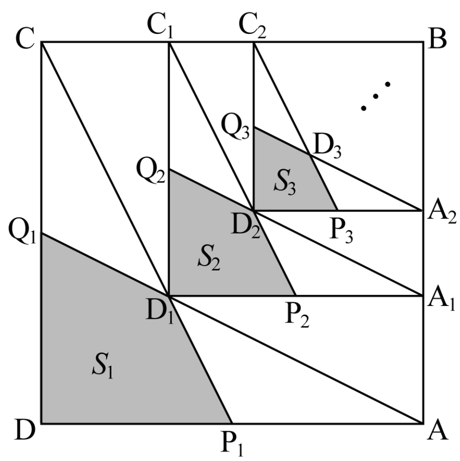
○○○
(2008(10)고3-가형15)

한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 두 선분 AD, DC의 중점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 두 선분 AQ_1, CP_1의 교점을 D_1이라 하자. 이때, 사각형 $DP_1D_1Q_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

선분 BD_1을 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_1D_1A_1$이라 하자. 두 선분 A_1D_1, D_1C_1의 중점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 두 선분 A_1Q_2, C_1P_2의 교점을 D_2라 하자. 이때, 사각형 $D_1P_2D_2Q_2$의 넓이를 S_2라 하자.

선분 BD_2를 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_2D_2A_2$라 하자. 두 선분 A_2D_2, D_2C_2의 중점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 두 선분 A_2Q_3, C_2P_3의 교점을 D_3이라 하자. 이때, 사각형 $D_2P_3D_3Q_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

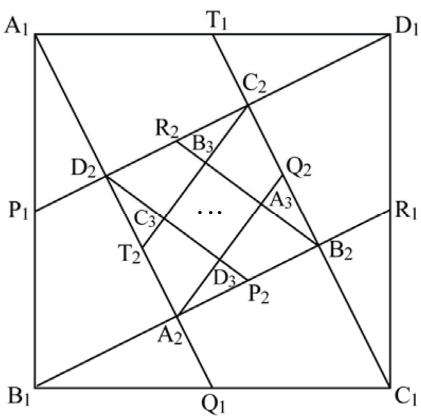


① $\frac{24}{5}$　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{27}{5}$　④ $\frac{20}{3}$　⑤ $\frac{36}{5}$

G040

○○○
(2008(9)고2-가형24)

그림과 같이 한 변의 길이가 10인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이를 S_1이라 하자.
변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 P_1, Q_1, R_1, T_1이라 하고, 선분 A_1Q_1, B_1R_1의 교점을 A_2, 선분 B_1R_1, C_1T_1의 교점을 B_2, 선분 C_1T_1, D_1P_1의 교점을 C_2, 선분 D_1P_1, A_1Q_1의 교점을 D_2라 할 때,
사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이를 S_2라 하자.
변 A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2의 중점을 각각 P_2, Q_2, R_2, T_2라 하고, 선분 A_2Q_2, B_2R_2의 교점을 A_3, 선분 B_2R_2, C_2T_2의 교점을 B_3, 선분 C_2T_2, D_2P_2의 교점을 C_3, 선분 D_2P_2, A_2Q_2의 교점을 D_3이라 할 때, 사각형 $A_3B_3C_3D_3$의 넓이를 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오. [3점]

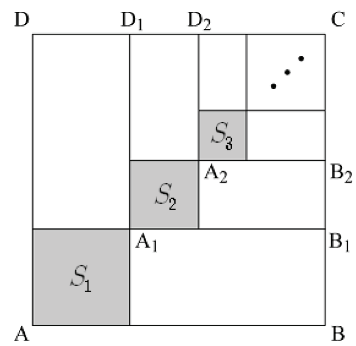


G041

○○
(2008(7)고3-가형23)

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 선분 AB와 선분 AD를 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_1, 윗부분의 정사각형을 $A_1B_1CD_1$이라 하자.
다시 정사각형 $A_1B_1CD_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 A_1D_1을 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_2, 윗부분의 정사각형을 $A_2B_2CD_2$라 하자.

이와 같은 시행을 무한히 반복할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{1}{7}$이다.
m^2+n^2의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.) [4점]



G042

○○○ (2008(4)고3-나형13)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$이다.

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G043

○○○ (2008(3)고3-가형26)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1 = \frac{5}{4},\ S_n = a_n + \frac{n+3}{n+2}\,(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

G044

○○ (2008(3)고3-나형28)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n = pa_n + 1$이 성립한다. 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, p는 1이 아닌 상수이다.) [4점]

ㄱ. $a_1 = \frac{1}{1-p}$

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

ㄷ. $p = \frac{2}{3}$이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G045

○○○ (2008(7)고3-나형28)

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)(\log_2 x)^n$이 수렴할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. 수렴하기 위한 x값의 범위는 $\frac{1}{2} < x < 2$이다.

ㄴ. 급수의 합이 1이 되도록 하는 x의 값은 한 개 존재한다.

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log_2 x - 1}{2}\right)^n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G046

○○○ (2009(9)고2-가형20)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. 두 수열 $\left\{\dfrac{a_n}{n+1}\right\}$, $\left\{\dfrac{b_n}{n}\right\}$이 모두 수렴하면 수열 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$은 수렴한다.
(단, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.)

ㄷ. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n a_n$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

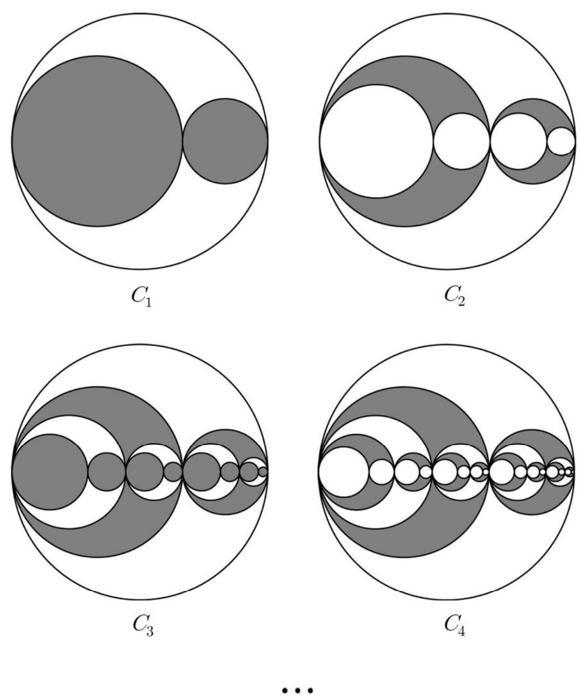
G047

●●● (2009(4)고3-가형25)

원에 다음 과정을 실행한다.

[과정]
Ⅰ. 원의 지름을 $2:1$로 내분하는 점을 잡는다.
Ⅱ. 이 원에 내접하면서 Ⅰ의 내분점에서 서로 외접하는 두 개의 원을 그린다.

지름의 길이가 6인 원이 있다.
이 원에 [과정]을 실행하여 그린 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_1이라 하자.
그림 C_1에서 새로 그려진 2개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 4개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_2라 하자.
그림 C_2에서 새로 그려진 4개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 8개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_3이라 하자.
그림 C_3에서 새로 그려진 8개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 16개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_4라 하자.
이와 같은 방법으로 n번째 얻어진 그림 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}\pi$($p$와 q는 서로소인 자연수)이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, 모든 원의 중심은 처음 원의 한 지름 위에 있다.) [4점]



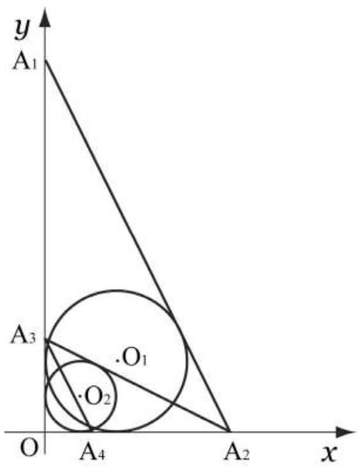
G048

○○
(2009(7)고3-가형24)

그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}_1(0,\ 4)$, $\mathrm{A}_2(2,\ 0)$으로 이루어진 $\triangle \mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2$에 내접하는 원을 O_1이라 하자. y축 위의 점 A_3이 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$의 기울기와 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle \mathrm{OA}_2\mathrm{A}_3$에 내접하는 원을 O_2라 하자.

x축 위의 점 A_4가 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$의 기울기와 선분 $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle \mathrm{OA}_3\mathrm{A}_4$에 내접하는 원을 O_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 생기는 $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$에 내접하는 원을 O_n이라 하고, O_n의 반지름의 길이가 r_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a - 2\sqrt{b}$ (a, b는 자연수)이다. $a+b$의 값을 구하시오. [4점]



G049

○○○
(2009(3)고3-가형14)

수열 $\{(-1)^{n-1}\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 보기의 수열 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\{S_n\}$
ㄴ. $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$
ㄷ. $\left\{\dfrac{S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n}{n}\right\}$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

G050

○○
(2009(7)고3-가형10)

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$인 함수 $f(x)$가

$f(x)=-2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+1$ $\left(-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}\right)$이고

함수 $g(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{\{1+f(x)\}^n-1}{\{1+f(x)\}^n+1}$일 때,

$g(10\sqrt{2})-g(\sqrt{3})$의 값은? [4점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

G051

○○ (2009(3)고3-가형28)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_n + b_n = 2 + \frac{1}{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2$

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

G052

○○ (2009(11)고2-가형10)

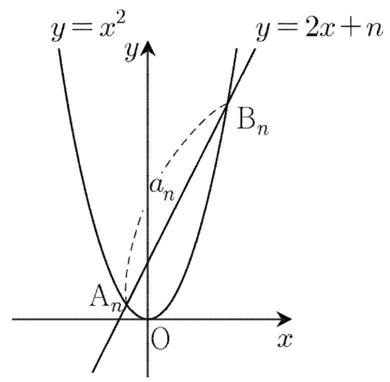
$3\cdot 2^n$(n은 자연수)의 모든 양의 약수 p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_{2n+2}에 대하여 $S(n) = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{p_k}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S(n)$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{4}{3}$　③ 2
④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{10}{3}$

G053

○○ (2009사관(1차)-문과9)

그림과 같이 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+n$이 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+1}}{a_n}$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$
④ 2　⑤ 4

G054

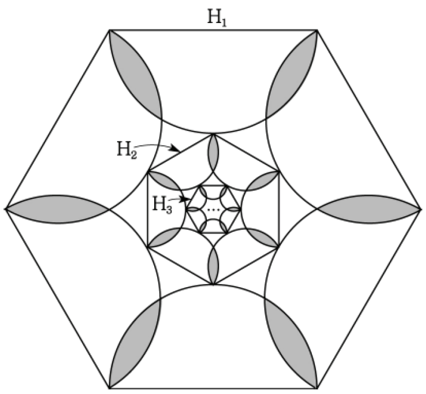
○○○
(2009(10)고3-나형16)

그림과 같이 정육각형 H_1의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_1의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_1, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_2라 하자.

정육각형 H_2의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_2의 내부에 그리고, 반원의 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_2, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 정육각형 H_n의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_n의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_{n+1}이라 하자.

이때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 S_1을 이용하여 나타낸 것은? [4점]



① $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}S_1$ ② $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}S_1$ ③ $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S_1$

④ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}S_1$ ⑤ $2\sqrt{3}\,S_1$

G055

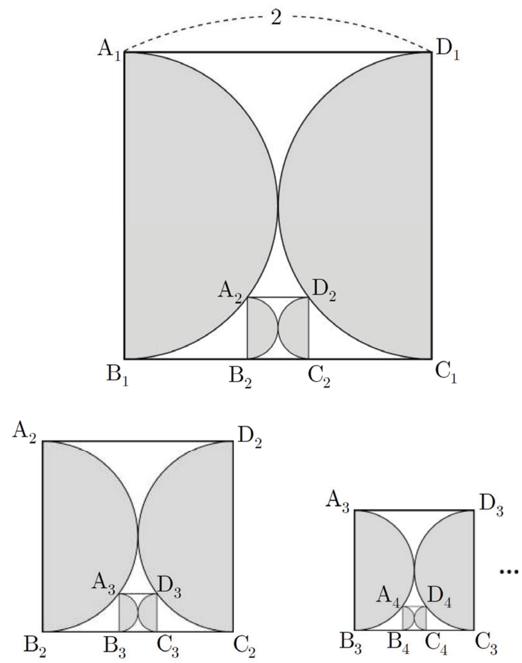
○○○
(2009(9)고2-가형19)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 내부에 변 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$을 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 이 두 반원의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

이 두 반원과 변 $\mathrm{B_1C_1}$으로 둘러싸인 부분에 내접하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 내부에 변 $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{C_2D_2}$를 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 이 두 반원의 넓이의 합을 S_2라 하자.

이 두 반원과 변 $\mathrm{B_2C_2}$로 둘러싸인 부분에 내접하는 정사각형 $\mathrm{A_3B_3C_3D_3}$의 내부에 변 $\mathrm{A_3B_3}$, $\mathrm{C_3D_3}$을 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 이 두 반원의 넓이의 합을 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 반원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\dfrac{16}{15}\pi$ ② $\dfrac{25}{24}\pi$ ③ $\dfrac{36}{35}\pi$

④ $\dfrac{45}{44}\pi$ ⑤ $\dfrac{49}{48}\pi$

G056

○○○
(2009(9)고2-가형30)

다음 두 조건을 만족시키는 모든 정수 r의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-5}{8}\right)^n$이 수렴한다.
(나) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-7^n+2}{r^n+7^{n+1}+2^{n-1}}=-\frac{1}{7}$

G057

○○
(2009(3)고3-가형8)

수열 $\left\{\sqrt{16^n+a^n}-4^n\right\}$이 수렴하도록 하는 자연수 a의 개수는? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

G058

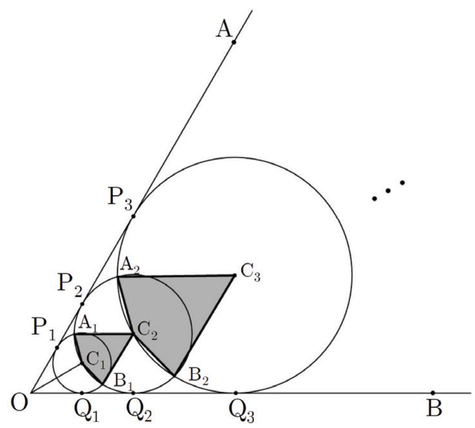
●●●
(2010(4)고3-가형17)

그림과 같이 크기가 60°인 $\angle$AOB의 이등분선 위에 $\overline{\mathrm{OC_1}}=2$인 점 $\mathrm{C_1}$을 잡아 점 $\mathrm{C_1}$을 중심으로 하고 반직선 OA와 OB에 접하는 원 $\mathrm{C_1}$을 그릴 때, 원 $\mathrm{C_1}$과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하자.

점 $\mathrm{C_1}$을 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 $\mathrm{C_2}$, 원 $\mathrm{C_2}$와 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하고, 원 $\mathrm{C_1}$과 원 $\mathrm{C_2}$가 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$이라 할 때, 사각형 $\mathrm{A_1C_1B_1C_2}$의 넓이를 S_1이라 하자.

점 $\mathrm{C_2}$를 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 $\mathrm{C_3}$, 원 $\mathrm{C_3}$과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{Q_3}$라 하고, 원 $\mathrm{C_2}$와 원 $\mathrm{C_3}$이 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$라 할 때, 사각형 $\mathrm{A_2C_2B_2C_3}$의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\dfrac{3}{8}$　④ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

G059

○○ (2010(9)고2-가형29)

자연수 n에 대하여 2^n 이하의 자연수 중에서 2^n과 서로소인 모든 자연수의 합을 S_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{S_n}$의 값을 구하시오. [4점]

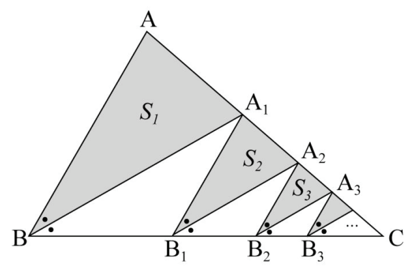
G060

○○ (2010(9)고2-가형30)

$\angle B=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$인 $\triangle ABC$에 대하여

$\angle B$의 이등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 A_1이라 할 때, $\triangle ABA_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

점 A_1에서 $\overline{AB}$에 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}$와 만나는 점을 B_1, $\angle A_1B_1C$의 이등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 A_2라 할 때, $\triangle A_1B_1A_2$의 넓이를 S_2라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 $\triangle A_{n-1}B_{n-1}A_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은 $\frac{q\sqrt{3}}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, $A_0=A$, $B_0=B$이고, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

G061

○○○ (2010(7)고3-나형30)

그림과 같이 넓이가 M인 삼각형 ABC가 있다. 자연수 n과 선분 AC 위의 두 점 D, E에 대하여

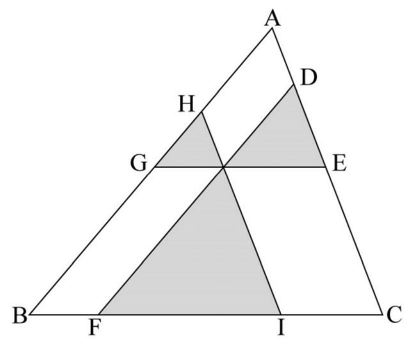
$$\overline{AD}:\overline{DE}:\overline{EC}=n:(2n+1):(3n+2)$$

이고

$$\overline{DF}//\overline{AB},\ \overline{GE}//\overline{BC}$$

이다. 선분 DF와 선분 GE의 교점을 지나는 선분 HI는 선분 AC와 평행하다. 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{q}{p}M$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



G062

○○○ (2010(11)고2-가형19)

다음은 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 양의 상수 K에 대하여

$$a_1 \ge K,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{K^2}{a_n}\right)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

> $a_n>0$, $K>0$이고 $a_1 \ge K$이므로
>
> $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{K^2}{a_n}\right) \ge \boxed{(가)}$이다.
>
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여
>
> $a_n \ge \boxed{(가)}$ $\cdots$ ㉠
>
> 이다.
>
> $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{K^2}{a_n}\right)$이므로
>
> 2 이상의 자연수 n에 대하여
>
> $a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{K^2}{a_{n-1}}\right)$이다.
>
> $a_n-K=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{K^2}{a_{n-1}}\right)-K$
>
> $=\frac{1}{2}(\boxed{(나)})\left(1-\frac{K}{a_{n-1}}\right) \le \frac{1}{2}(\boxed{(나)})$
>
> 이 성립하므로
>
> $a_n-K \le \frac{1}{2}(\boxed{(나)}) \le \cdots$
>
> $\le \boxed{(다)}(a_1-K)$ $\cdots$ ㉡
>
> 이다.
>
> ㉠, ㉡에 의하여 $0 \le a_n-K \le \boxed{(다)}(a_1-K)$이다.
>
> 그러므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\boxed{(가)}$이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	K	$a_{n-1}-K$	$\frac{1}{2^{n+1}}$
②	K	$a_{n-1}-K$	$\frac{1}{2^{n-1}}$
③	K	$a_{n-1}+K$	$\frac{1}{2^{n}}$
④	$2K$	$a_{n-1}-K$	$\frac{1}{2^{n-1}}$
⑤	$2K$	$a_{n-1}+K$	$\frac{1}{2^{n}}$

G063

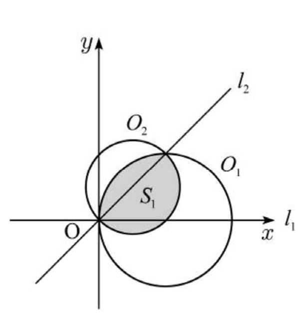
○○ (2010(3)고3-가형14)

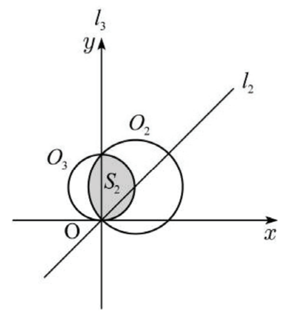
좌표평면에서 점 $(3,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원을 O_1이라 하고, x축을 직선 l_1이라 하자.

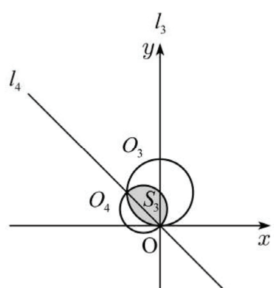
직선 l_1을 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_2라 하고, 직선 l_2와 원 O_1의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_2라 할 때, 두 원 O_1, O_2의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자.

직선 l_2를 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_3이라 하고, 직선 l_3과 원 O_2의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_3이라 할 때, 두 원 O_2, O_3의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자.

직선 l_3을 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_4라 하고, 직선 l_4와 원 O_3의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_4라 할 때, 두 원 O_3, O_4의 공통부분의 넓이를 S_3이라 하자.







$\cdots$

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

① $6(\pi-1)$ ② $7(\pi-1)$ ③ $8(\pi-1)$ ④ $9(\pi-1)$ ⑤ $10(\pi-1)$

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

G 수열의 극한

1	④	2	4	3	④	4	①	5	⑤
6	⑤	7	⑤	8	⑤	9	15	10	125
11	24	12	②	13	④	14	④	15	③
16	12	17	②	18	③	19	②	20	24
21	3	22	①	23	①	24	①	25	④
26	7	27	④	28	③	29	④	30	①
31	④	32	④	33	⑤	34	①	35	④
36	②	37	②	38	①	39	①	40	125
41	10	42	②	43	①	44	③	45	⑤
46	①	47	59	48	11	49	⑤	50	⑤
51	②	52	④	53	③	54	①	55	②
56	18	57	④	58	⑤	59	12	60	19
61	25	62	②	63	④	64	④	65	③
66	①	67	①	68	①	69	②	70	12
71	10	72	③	73	③	74	④	75	④
76	②	77	①	78	③	79	②	80	④
81	①	82	47	83	③	84	②	85	④
86	④	87	⑤	88	③	89	③	90	①
91	④	92	②	93	②	94	③	95	125
96	①	97	25	98	②	99	④	100	①
101	②	102	④	103	4	104	192	105	③
106	40	107	②	108	①	109	③	110	⑤
111	②	112	①	113	③	114	④	115	27
116	②	117	⑤	118	①	119	④	120	②
121	③	122	6	123	④	124	253	125	②
126	④	127	④	128	②	129	②	130	①
131	②	132	⑤	133	②	134	④	135	④
136	①	137	⑤	138	②	139	②	140	②
141	④	142	③	143	③	144	12	145	5
146	③	147	13	148	③	149	③	150	②

H 미분법

1	14	2	③	3	⑤	4	②	5	503
6	③	7	64	8	④	9	108	10	③
11	⑤	12	9	13	⑤	14	③	15	⑤
16	⑤	17	①	18	10	19	⑤	20	②
21	②	22	⑤	23	6	24	70	25	④
26	②	27	①	28	②	29	④	30	③
31	③	32	④	33	⑤	34	⑤	35	②
36	①	37	⑤	38	3	39	③	40	8
41	17	42	③	43	②	44	④	45	①
46	⑤	47	①	48	①	49	④	50	8
51	⑤	52	30	53	⑤	54	⑤	55	4
56	④	57	③	58	③	59	3	60	④
61	④	62	③	63	32	64	37	65	③
66	④	67	27	68	③	69	13	70	48
71	①	72	20	73	④	74	⑤	75	③
76	10	77	③	78	③	79	61	80	3
81	②	82	25	83	③	84	②	85	⑤
86	34	87	④	88	④	89	④	90	①
91	18	92	④	93	40	94	⑤	95	13
96	32	97	③	98	④	99	⑤	100	20
101	10	102	①	103	⑤	104	②	105	②
106	⑤	107	208	108	①	109	71	110	25
111	23	112	③	113	①	114	③	115	③
116	25	117	8	118	25	119	⑤	120	④
121	①	122	①	123	①	124	①	125	②
126	①	127	5	128	50	129	①	130	②
131	71	132	⑤	133	②	134	②	135	⑤
136	③	137	4	138	③	139	⑤	140	①
141	④	142	②	143	②	144	⑤	145	30
146	49	147	⑤	148	77	149	②	150	9
151	⑤	152	95	153	④	154	③	155	②
156	②	157	③	158	④	159	⑤	160	②
161	②	162	①	163	④	164	6	165	①
166	9	167	⑤	168	120	169	②	170	5
171	④	172	③	173	③	174	8	175	6
176	③	177	18	178	②	179	15	180	④
181	64	182	③	183	10				

Ⅰ 적분법

1	③	2	⑤	3	③	4	⑤	5	③
6	10	7	②	8	⑤	9	④	10	②
11	⑤	12	11	13	100	14	③	15	⑤
16	40	17	102	18	33	19	①	20	54
21	④	22	③	23	11	24	①	25	50
26	③	27	9	28	③	29	88	30	6
31	①	32	③	33	④	34	③	35	51
36	③	37	④	38	12	39	②	40	25
41	①	42	12	43	①	44	④	45	⑤
46	①	47	7	48	⑤	49	⑤	50	④
51	24	52	②	53	⑤	54	④	55	80
56	⑤	57	④	58	5	59	⑤	60	8
61	①	62	①	63	125	64	350	65	⑤
66	④	67	36	68	⑤	69	⑤	70	49
71	325	72	③	73	18	74	②	75	72
76	④	77	②	78	⑤	79	②	80	12
81	⑤	82	26	83	④	84	①	85	16
86	①	87	②	88	48	89	7	90	④
91	25	92	④	93	③	94	586	95	19
96	⑤	97	14						

해설 목차

미적분

G 수열의 극한

1	④	2	4	3	④	4	①	5	⑤
6	⑤	7	⑤	8	⑤	9	15	10	125
11	24	12	②	13	④	14	④	15	③
16	12	17	②	18	③	19	②	20	24
21	3	22	①	23	①	24	①	25	④
26	7	27	④	28	③	29	④	30	①
31	④	32	④	33	⑤	34	①	35	④
36	②	37	②	38	①	39	①	40	125
41	10	42	②	43	①	44	③	45	⑤
46	①	47	59	48	11	49	⑤	50	⑤
51	②	52	④	53	③	54	①	55	②
56	18	57	④	58	⑤	59	12	60	19
61	25	62	②	63	④	64	④	65	③
66	①	67	①	68	①	69	②	70	12
71	10	72	③	73	③	74	④	75	④
76	②	77	①	78	③	79	②	80	④
81	①	82	47	83	③	84	②	85	④
86	④	87	⑤	88	③	89	③	90	①
91	④	92	②	93	②	94	③	95	125
96	①	97	25	98	②	99	④	100	①
101	②	102	④	103	4	104	192	105	③
106	40	107	②	108	①	109	③	110	⑤
111	②	112	①	113	③	114	④	115	27
116	②	117	⑤	118	①	119	④	120	②
121	③	122	6	123	④	124	253	125	②
126	④	127	④	128	②	129	②	130	①
131	②	132	⑤	133	②	134	④	135	④
136	①	137	⑤	138	②	139	②	140	②
141	④	142	③	143	③	144	12	145	5
146	③	147	13	148	③	149	③	150	②

G001 | 답 ④

[풀이]

〈과정〉

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n - b^n)$이 수렴하면

$\lim_{n\to\infty}(a^n - b^n) = 0$이다.

• (i) $|a| \geq 1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} a^n\left\{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\} = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n = 1$이다.

($\because$ $n\to\infty$일 때, $|a^n| = 1$ 또는 $|a^n| \to \infty$이기 때문에

$1-\left(\frac{b}{a}\right)^n \to 0$, 즉 $\left(\frac{b}{a}\right)^n \to 1$이어야 한다.)

즉, $\frac{b}{a} = \boxed{1}$이다.

• (ii) $|a| < 1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(a^n - b^n) = \lim_{n\to\infty}(-b^n) = 0$이므로

$\boxed{|b| < 1}$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n - b^n)$이 수렴할 조건은

(i), (ii)에 의하여

$|a| \geq 1$일 때, $\frac{b}{a} = \boxed{1}$

또는

$|a| < 1$일 때, $\boxed{|b| < 1}$이다.

(가): 1

(나): $|b| < 1$

답 ④

G002 | 답 4

[풀이]

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$

로 둘 수 있다.

수열의 극한에 대한 성질에 의하여

(주어진 식)$= \frac{\alpha+3}{2\alpha-1} = 1$

$\therefore\ \alpha = 4$

답 4

G003 | 답 ④

[풀이]

$f_n(x) = b_n x + a_n$으로 두자.

(문제에서 주어진 귀납적 정의에서 f_1이 일차식으로 f_2는 일차식이다. 마찬가지의 방법으로 f_n은 일차식이다.)

함수 $f_n(x)$의 도함수는

$f_n(x) = b_n$

문제에서 주어진 등식에서

$f_{n+1}(x) = 2f_n(x) + 2xf_n{}'(x)$

이므로

$b_{n+1}x+a_{n+1}=2(b_nx+a_n)+2b_nx$

정리하면

$(b_{n+1}-4b_n)x+a_{n+1}-2a_n=0$

항등식의 필요충분조건에 의하여

$b_{n+1}=4b_n$, $a_{n+1}=2a_n$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 4인 등비수열이다.

일반항 a_n, b_n은 각각

$a_n=2^n$, $b_n=4^{n-1}$

일반항 $\dfrac{a_n}{b_n}$은

$\dfrac{a_n}{b_n}=2^{2-n}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{2-n}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$

답 ④

G004 | 답 ①

[풀이]

$(k+1)^2(a_{k+1}-a_k)$

$=(k+1)^2a_{k+1}-(k+1)^2a_k$

$=(k+1)^2a_{k+1}-k^2a_k-2ka_k-a_k$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2(a_{k+1}-a_k)$$

$$=(n+1)^2a_{n+1}-1^2a_1-2\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$(\because\ \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^2a_{k+1}-k^2a_k\}$$

$=(2^2a_2-1^2a_1)+(3^2a_3-2^2a_2)$

$+\ \cdots\ +((n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n)$

$=(n+1)^2a_{n+1}-1^2a_1)$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2(a_{n+1}-a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2(a_{k+1}-a_k)$$

$$=\lim_{n\to\infty}((n+1)^2a_{n+1}-1^2a_1)$$

$$-2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}ka_k-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$=0-1-2B-A$

$(\because\ \lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^2a_{n+1}=0$, $a_1=1)$

$=-A-2B-1$

답 ①

G005 | 답 ⑤

[풀이]

〈과정〉

$$a_n=n\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)=\frac{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a}{\frac{1}{n}}$$

이므로 이 수열이 수렴하려면

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a\right)=\boxed{0}$이다.

$(\because\ n\to\infty$일 때, (분모)$=\dfrac{1}{n}\to 0)$

그러므로 $a=\boxed{\dfrac{1}{2}}$이다.

$(\because\ a=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2})$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-5}{4(4n+1)}}{\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-5n}{4(4n+1)}}{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}+\frac{1}{2}}$$

$=\dfrac{-\frac{5}{16}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\boxed{-\dfrac{5}{16}}$이다.

(가): 0

(나): $\dfrac{1}{2}$

(다): $-\dfrac{5}{16}$

답 ⑤

G006 | 답 ⑤

[풀이]

〈과정〉

Ⅰ) 자연수 n에 대하여 $na_na_{n-1}=\frac{\pi}{2}$임을 수학적 귀납법으로 증명하면

i) $n=1$일 때, $a_1 \cdot a_0 = 1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$이므로 성립한다.

ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$ka_ka_{k-1}=\frac{\pi}{2}$이다.

$n=k+1$일 때,

$(k+1)a_{k+1}a_k$

$=(k+1)\boxed{\frac{k}{k+1}a_{k-1}}a_k$

$(\because a_{k+1}=\frac{k}{k+1}a_{k-1})$

$=\frac{k+1}{k+1}ka_ka_{k-1}$

$=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

이므로 성립한다.

Ⅱ) 수열 $\{a_n\}$이 감소하는 수열임을 수학적 귀납법으로 증명하면

⋮

중략

⋮

따라서 $a_n \geq a_{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이다.

조건에서 $a_{2n+1} \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq a_{2n-2}$ 이고

수열 $\{a_n\}$이 감소하는 수열이므로

$(a_{2n+1})^2 \leq \frac{I^2}{n} \leq (a_{2n-2})^2$

$a_{2n+2}a_{2n+1} \leq \frac{I^2}{n} \leq a_{2n-2}a_{2n-3}$

$(\because a_{2n+2}<a_{2n+1},\ a_{2n-2}<a_{2n-3})$

$na_{2n+2}a_{2n+1} \leq \boxed{I^2} \leq na_{2n-2}a_{2n-3}$

임을 유추할 수 있다.

그러므로 Ⅰ)에 의해서

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{n}{2n+2}(2n+2)a_{2n+2}a_{2n+1} \leq \boxed{I^2}$

$\leq \frac{n}{2n-2}(2n-2)a_{2n-2}a_{2n-3}$

$\frac{n\pi}{2(2n+2)} \leq \boxed{I^2} \leq \frac{n\pi}{2(2n-2)}$

그런데 $n\to\infty$일 때,

$\frac{n\pi}{2(2n+2)}\to\frac{\pi}{4},\ \frac{n\pi}{2(2n-2)}\to\frac{\pi}{4}$

이므로 수렴하는 수열의 대소 관계에 의하여

따라서 $I=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$이다.

(가): $\frac{k}{k+1}a_{k-1}$

(나): I^2

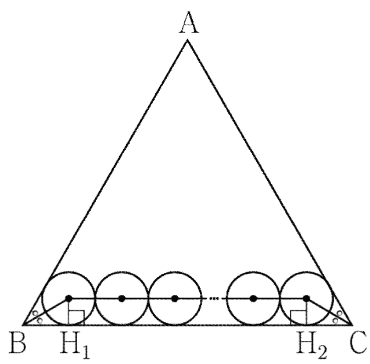
(다): $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

답 ⑤

G007 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 삼각형의 세 꼭짓점을 각각 A, B, C, n번째 행의 n개의 원 중에서 가장 왼쪽의 원의 중심에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H_1, 가장 오른쪽의 원의 중심에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H_2라고 하자. 그리고 삼각형 ABC의 내부의 원들의 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.



(단, ○$=30°$)

직각삼각형의 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{BH_1}=\overline{CH_2}=\sqrt{3}r_n$

선분 H_1H_2의 길이는

$\overline{H_1H_2}=2(n-1)r_n$

$\overline{BC}=\overline{BH_1}+\overline{H_1H_2}+\overline{H_2C}$

$=(2n-2+2\sqrt{3})r_n=2$

정리하면

$r_n=\frac{1}{n+\sqrt{3}-1}$

삼각형 ABC의 내부의 원의 개수는

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

($\because$ 등차수열의 합의 공식)

$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}\times\pi r_n^2$

$=\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{n(n+1)}{(n+\sqrt{3}-1)^2}$

수열의 극한의 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{n(n+1)}{(n+\sqrt{3}-1)^2}=\dfrac{\pi}{2}$

답 ⑤

G008 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha\cdot 0=0$

▸ ㄴ. (참)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\alpha-0=\alpha$

▸ ㄷ. (참)

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$이고, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\left(1-\dfrac{b_n}{a_n}\right)=\alpha$이므로

$n\to\infty$일 때, $1-\dfrac{b_n}{a_n}\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

G009 | 답 15

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}-2a_n\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}-2\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

$=\dfrac{3}{2}-2\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

즉,

$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\dfrac{3}{2}-2\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

그런데 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$이므로

$\alpha=\dfrac{3}{2}-2\alpha$ 풀면 $\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 30\alpha=15$

답 15

G010 | 답 125

[풀이1]

$x_n=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ 이므로

등비급수의 합의 공식에 의하여

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x_n^2-x_{n+1}^2)$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+2}}+\dfrac{3}{4^{n+2}}\right)$

$=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n-1}-x_n)$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

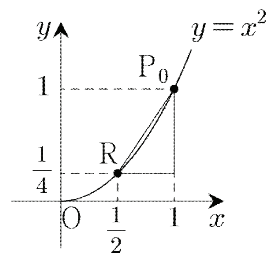
$\therefore\ S=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}$, $100S=125$

답 125

[풀이2] 시험장 ★

$n\to\infty$일 때, $x_n\to\dfrac{1}{2}$이므로

두 점 P_n, Q_n은 모두 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$에 가까워진다. 이 점을 R이라고 하자.



$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}}$=(선분 $\mathrm{P}_0\mathrm{R}$을 빗변으로 하는 직각삼각형의 높이)

$=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=$(선분 $\mathrm{P_0R}$을 빗변으로 하는 직각삼각형의 밑변의 길이)

$=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ S=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4},\ 100S=125$

답 125

G011 | 답 24

[풀이]

$\overline{\mathrm{OC}_n}=n$이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}_n}=\sqrt{n^2+48^2}$

서로 닮은 두 직각삼각형 $\mathrm{AD}_n\mathrm{B}_1$, $\mathrm{AC}_n\mathrm{B}_n$에 대하여

$\overline{\mathrm{B_1D}_n}:\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=1:n$이므로 $\overline{\mathrm{B_1D}_n}=\dfrac{48}{n}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AC}_n}-\overline{\mathrm{OC}_n}}{\overline{\mathrm{B_1D}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+48^2}-n}{\dfrac{48}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{48^2}{\dfrac{48}{n}\times\left(\sqrt{n^2+48^2}+n\right)}=\frac{48}{2}=24$$

답 24

G012 | 답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

(반례) $a_n=\dfrac{2}{n}$, $b_n=\dfrac{1}{n}$이면

$a_n>b_n$이지만 $\alpha=\beta=0$이다.

▸ ㄴ. (참)

$$\alpha-\beta=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)>0$$

($\because$ 모든 자연수 k에 대하여 $a_k>b_k$)

$\therefore\ \alpha>\beta$

▸ ㄷ. (거짓)

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

G013 | 답 ④

[풀이]

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$|f(x)|>1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}=0$,

$|f(x)|=1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}=\frac{1}{2}$,

$|f(x)|<1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}=1$

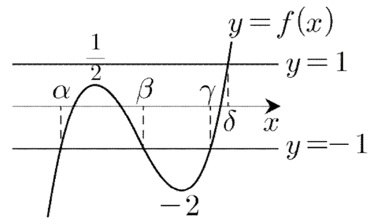
함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}0 & (|f(x)|>1)\\ \dfrac{1}{2} & (|f(x)|=1)\\ 1 & (|f(x)|<1)\end{cases}$$

• (1) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표를 δ,

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 세 교점의 x좌표를 α, β, γ라고 하자. (단, $\alpha<\beta<\gamma$)



함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x<\alpha,\ \beta<x<\gamma,\ x>\delta)\\ \dfrac{1}{2} & (x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)\\ 1 & (\alpha<x<\beta,\ \gamma<x<\delta)\end{cases}$$

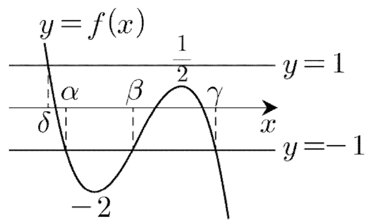
함수 $g(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$, $x=\delta$에서만 불연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 불연속이 되는 점의 개수는 4이다.

• (2) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표를 δ,

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 세 교점의 x좌표를 α, β, γ라고 하자. (단, $\alpha<\beta<\gamma$)



함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x<\delta,\ \alpha<x<\beta,\ x>\gamma) \\ \frac{1}{2} & (x=\delta,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma) \\ 1 & (\delta<x<\alpha,\ \beta<x<\gamma)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$, $x=\delta$에서만 불연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 불연속이 되는 점의 개수는 4이다.

(1), (2)에서 함수 $g(x)$가 불연속이 되는 점의 개수는 4이다.

답 ④

G014 | 답 ④

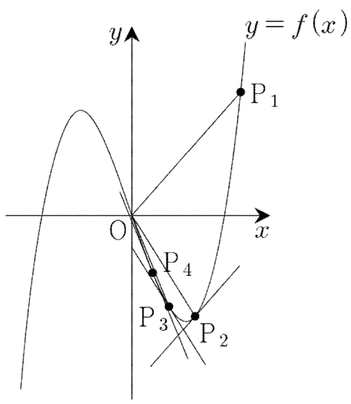
[풀이1] 시험장

점 $(a_n,\ f(a_n))$을 P_n이라고 하자.

예를 들어 $a_1>\sqrt{3}$일 때, 점

$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots$

을 계속 찍어나가면 다음과 같다.



▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

위의 그림에서 $f(a_2)<f(a_3)$이다.

▸ ㄴ. (참)

위의 그림에서 점 P_n에서의 접선의 기울기는 n의 값이 커질수록 작아진다.

▸ ㄷ. (참)

$n\to\infty$일 때, 점 P_n에서의 접선은 점 O에서의 접선에 한없이 가까워진다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}f'(a_n)=-3$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

[풀이2]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

문제에서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의를 수식으로 표현하자.

$$\frac{f(a_n)-f(0)}{a_n-0}=f'(a_{n+1})$$

$a_n^2-3=3a_{n+1}^2-3$

정리하면

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}a_n(\because a_n>0)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 등비수열이다.

(단, $a_1>0$)

일반항 a_n은

$$a_n=a_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}\text{(단, } n\text{은 자연수)}$$

▸ ㄱ. (거짓)

구간 $(-1,\ 1)$에서 $f'(x)<0$이므로

함수 $f(x)$는 감소한다.

따라서

$0<a_{n+1}<a_n<1$

을 만족시키는 n에 대하여

$f(a_{n+1})>f(a_n)$

▸ ㄴ. (참)

$f'(a_n)-f'(a_{n+1})$

$=3a_n^2-3-3a_{n+1}^2+3$

$=3(a_n-a_{n+1})(a_n+a_{n+1})$

$>0(\because a_n>a_{n+1}>0)$

$\therefore\ f'(a_n)>f'(a_{n+1})$

▸ ㄷ. (참)

$$f'(a_n)=3a_n^2-3=a_1^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}-3$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}f'(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left\{a_1^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}-3\right\}=-3$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

G015 | 답 ③

[풀이1]

$a_n - \dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-1)^2} = b_n$으로 두자.

연속하는 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$a_n = \frac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-1)^2} + b_n$$

$$= \frac{2\times\frac{n(n+1)}{2}}{(2n-1)^2} + b_n = \frac{n(n+1)}{(2n-1)^2} + b_n$$

문제에서 주어진 급수가 수렴하므로 일반항 b_n은 0에 수렴한다.

즉, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{(2n-1)^2} + b_n\right\} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

답 ③

[풀이2] 시험장

급수가 수렴하므로

$n\to\infty$일 때,

$$a_n \approx \frac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-1)^2}$$

$$\approx \frac{2\times\frac{n(n+1)}{2}}{4n^2} \to \frac{1}{4}$$

답 ③

G016 | 답 12

[풀이]

$$na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$(n-1)a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n \ge 2)$$

위의 두 식을 변변히 빼면

$na_{n+1} - (n-1)a_n = a_n$, 즉 $a_{n+1} = a_n \ (n \ge 2)$

그런데 $1 \cdot a_2 = \sum_{k=1}^{1} a_k$에서 $a_2 = a_1$이므로

$a_{n+1} = a_n \ (n \ge 1)$

$S_n = na_1 = \dfrac{n}{4}$이므로

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n S_{n+2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 8\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= 8\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= 8 \times \frac{3}{2} = 12$$

답 12

G017 | 답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

예를 들어 $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = n^2$이면

$n\to\infty$일 때, $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$이지만

$a_n b_n = n \to \infty$이다.

▸ ㄴ. (참)

수열의 극한의 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\{a_n - (a_n - b_n)\} = 5 - 0 = 5$

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

예를 들어 $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$이면

$a_n b_n = \dfrac{1}{n^3} \ne 0$이고,

$n\to\infty$일 때, $a_n \to 0$, $b_n \to 0$이지만

$\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

G018 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$n\to\infty$일 때, $\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{\alpha}{\infty} \to 0$

▸ ㄴ. (참)

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\{a_n - (a_n - b_n)\} = \beta - 0 = \beta$

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

예를 들어

$a_n=1+\dfrac{1}{n},\ b_n=1+\dfrac{3}{n},\ c_n=1+\dfrac{2}{n}$

이면 $a_n<c_n<b_n$이고,

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$이지만

$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1\neq0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

G019 | 답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

$a_n=\dfrac{1}{n^2},\ b_n=n$이면

$n\to\infty$일 때, $a_n\to0,\ a_nb_n=\dfrac{1}{n}\to0$이지만

$b_n\to\infty$ (발산)한다.

▸ ㄴ. (참)

수열의 극한에 대한 기본성질에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\{(a_n-2b_n)+2b_n\}$

$=0+2\times1=2$

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

예를 들어

$a_n=n+\dfrac{1}{n},\ b_n=n+\dfrac{2}{n},\ c_n=n+\dfrac{3}{n}$

이면 $n\to\infty$일 때, $c_n-a_n=\dfrac{2}{n}\to0$이지만

$b_n\to\infty$ (발산)한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

G020 | 답 24

[풀이]

등비급수의 합의 공식에 의하여

(주어진 식)$=\dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

$=\dfrac{1-\sin^2\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{1-\sin\theta}$

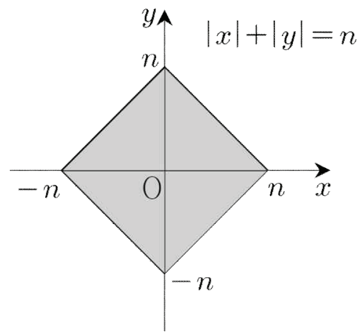
$=1+\sin\theta=\dfrac{18}{13}$, 즉 $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$

$\therefore\ \dfrac{10}{\tan\theta}=10\times\dfrac{12}{5}=24$

답 24

G021 | 답 3

[풀이]



$S_n=$(한 변의 길이가 $\sqrt{2}\,n$인 정사각형의 넓이)

$=2n^2\ (n\geq1)$

수열의 합과 일반항의 관계에 의하여

$a_1=S_1=2$

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-2(n-1)^2=4n-2\,(n\geq2)$

일반항 a_n은

$a_n=4n-2\ (n\geq1)$

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{24}{a_na_{n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}3\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}3\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=3$

답 3

G022 | 답 ①

[풀이]

조건 (가)에서 등비중항의 정의에 의하여

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하자.

조건 (나)에서 주어진 등식에서

$\dfrac{a_1}{1-r}=2a_1(1+r)$ ($\because$ 등비급수의 합의 공식)

양변을 $a_1(>0)$으로 나눈 후 정리하면

$r^2 = \dfrac{1}{2}$ $\cdots$ ㉠

수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 a_1^2이고 공비가 r^2인 등비수열이므로 조건 (다)에서 주어진 등식에서

$\dfrac{a_1^2}{1-r^2} = 2a_1(1+r^2)$($\because$ 등비급수의 합의 공식)

양변을 $a_1(>0)$으로 나눈 후 ㉠을 대입하여 정리하면

$a_1 = \dfrac{3}{2}$

등비수열의 정의에 의하여

$\therefore\ a_5 = a_1 \times r^4 = \dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{8}$

답 ①

G023 | 답 ①

[풀이]

직각삼각형 ABC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{5}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle$ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{BC}} = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}\,\overline{\mathrm{BP_1}}$

즉, $\dfrac{1}{2}\times 2\times 1 = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{BP_1}}$에서

$\overline{\mathrm{BP_1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

두 삼각형 ABC, $\mathrm{AP_1B}$의 닮음비가 $1 : \dfrac{2}{\sqrt{5}}$이므로 넓이의 비는 $1 : \dfrac{4}{5}$이다.

$S_1 =$($\triangle \mathrm{ABP_1}$의 넓이)

$=$($\triangle$ABC의 넓이)$\times\dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5}$

두 직각삼각형 $\mathrm{ABP_1}$, $\mathrm{AP_1P_2}$의 닮음비가 $1 : \dfrac{2}{\sqrt{5}}$이므로 넓이의 비는 $1 : \dfrac{4}{5}$이다.

$S_2 = \dfrac{4}{5}S_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$S_{n+1} = \dfrac{4}{5}S_n$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{4}{5}$이고, 공비가 $\dfrac{4}{5}$인 등비수열이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = 4$$

답 ①

G024 | 답 ①

[풀이]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n =$(그림 T_n에서 새롭게 그려진 세로 방향의 선분 한 개의 길이)

$b_n =$(그림 T_n에서 새롭게 그려진 세로 방향의 선분의 개수)

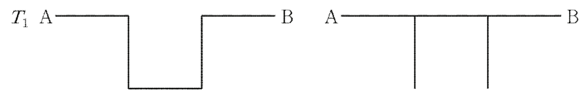


그림 T_1에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$a_1 = \dfrac{1}{3}$, $b_1 = 2$

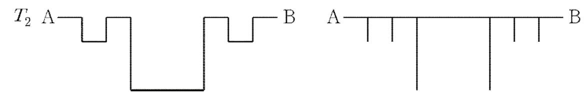


그림 T_2에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$a_2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$, $b_2 = 2^2$

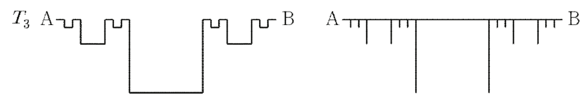


그림 T_3에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$a_3 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$, $b_3 = 2^3$

$\vdots$

이상에서 다음과 같이 추론할 수 있다.

그림 T_n에서 가로 방향의 모든 성분의 길이의 합은 1이고,

$a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = 2^n$

$l_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} l_n = 1 + \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

답 ①

G025 | 답 ④

[풀이]

시그마의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)=\sum_{k=1}^{n}2+\sum_{k=1}^{n}a_k=2n+S_n$$

시그마의 성질과 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)=\sum_{k=1}^{n}2k+\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}+S_n$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+S_n}{n(n+1)+S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{S_n}{n^2}}{\frac{n+1}{n}+\frac{S_n}{n^2}}$$

$$=\frac{0+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\left(\because \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}\right)$$

답 ④

G026 | 답 7

[풀이]

문제에서 주어진 등비수열이 수렴할 조건은

$-1<\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}x\le 1$, 즉

$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\frac{\pi}{8}x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ (단, $0<\frac{\pi}{8}x<2\pi$)

위의 부등식을 풀면

$0<\frac{\pi}{8}x\le\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi\le\frac{\pi}{8}x<\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi<\frac{\pi}{8}x<2\pi$

즉, $0<x\le 2$, $6\le x<10$, $14<x<16$

자연수 x의 값은 1, 2, 6, 7, 8, 9, 15이므로 자연수 x의 개수는 7이다.

답 7

G027 | 답 ④

[풀이]

〈과정〉

모든 양의 실수 x에 대하여 $\frac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$가 성립한다.

(이때, 이 부등식은 문제에서 준 것이므로 증명할 이유가 없다.)

자연수 k, n $(k\le n)$에 대하여 $x=\frac{k}{n^2}$를 위 부등식에 대입하여 정리하면

$$\frac{k}{2n^2+k}<\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1<\frac{k}{2n^2}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}<S_n<\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

이다. 이 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\boxed{\frac{1}{4}}\text{이고}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4}$$

$$\left(\because \frac{k^2}{4n^4}-\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}=\frac{k^3}{4n^4(2n^2+k)}\ge 0\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$=\boxed{0}$ ($\because$ 분자는 3차, 분모는 4차이다.)

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\boxed{\frac{1}{4}}$이다.

$$\left(\because \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}=\frac{1}{4}\right)$$

(가): $\frac{1}{4}$

(나): 0

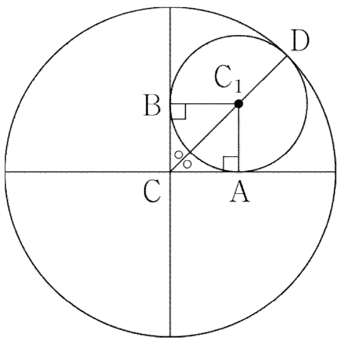
(다): $\frac{1}{4}$

답 ④

G028 | 답 ③

[풀이]

아래 그림처럼 원 C_1이 사분원과 만나는 세 점을 각각 A, B, D라고 하자.



(단, ○= 45˚)

직각이등변삼각형 C_1CA에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{CC_1} = \sqrt{2}\, r_1$

원의 정의에 의하여

$\overline{CD} = \overline{CC_1} + \overline{C_1D} = \sqrt{2}\, r_1 + r_1 = 1$

정리하면

$r_1 = \sqrt{2} - 1$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$r_n = (\sqrt{2}+1) r_{n+1}$

이므로

$r_{n+1} = (\sqrt{2}-1) r_n$

수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{2}-1$이고, 공비가 $\sqrt{2}-1$인 등비수열이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r_k = \frac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ③

G029 | 답 ④

[풀이]

▸ ㄱ. (발산)

수열을 나열하면

$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

이 수열은 수렴하지 않는다.

▸ ㄴ. (수렴)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

▸ ㄷ. (수렴)

$$\lim_{n\to\infty}(\log_2 n^2 - 2\log_2(n+2))$$

$$= \lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n^2}{(n+2)^2} = \log_2 1 = 0$$

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

G030 | 답 ①

[풀이]

점 A_n에서 x축에 내린 수선의 발을 B_n이라고 하자.

(단, B_0은 원점이다.)

선분 B_0B_1, B_1B_2, B_2B_3, $\cdots$ 의 길이를 쓰면

$\frac{4}{3},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \cdots$

즉, 수열 $\{\overline{B_nB_{n+1}}\}$은 첫째항이 $\frac{4}{3}$이고, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}$$

답 ①

G031 | 답 ④

[풀이]

곡선 $y = \frac{n}{x}$와 직선 $y = nx$의 방정식을 연립하면

$\frac{n}{x} = nx$에서 $x^2 = 1$이므로 $x = -1$ 또는 $x = 1$

두 점 A_n, B_n의 좌표는 각각

$A_n(1,\ n)$, $B_n(-1,\ -n)$

점 C_n의 좌표는

$C_n(1,\ 0)$

직선 B_nC_n의 방정식은

$y = \frac{n}{2}x - \frac{n}{2}$

이 직선의 방정식에 $x = 0$을 대입하여 점 D_n의 좌표를 구하면

$D_n\left(0,\ -\frac{n}{2}\right)$

사다리꼴의 넓이에 대한 공식에 의하여

$$S_n = \frac{\overline{A_nC_n} + \overline{OD_n}}{2} \times \overline{OC_n} = \frac{3}{4}n$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$T_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OD}_n}\times|$점 B_n의 x좌표$|=\frac{n}{4}$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n+n}{S_n+n+1}$

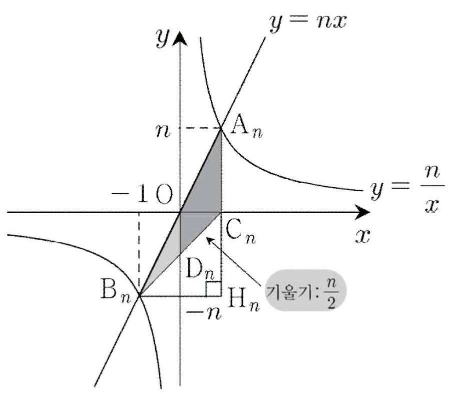
$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{4}n}{\frac{7}{4}n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}+\frac{1}{n}}=\frac{5}{7}$

답 ④

[참고]

다음과 같이 S_n, T_n의 방정식을 유도해도 좋다.

두 직선 $x=1$, $y=-n$의 교점을 H_n이라고 하자. 이때, $\angle \mathrm{B}_n\mathrm{H}_n\mathrm{A}_n=90^\circ$ 이다.



두 함수 $y=\frac{n}{x}$, $y=nx$의 방정식을 연립하면

$\frac{n}{x}=nx$, $x^2=1$, $x=\pm 1$

이므로

$\mathrm{A}_n(1,\ n)$, $\mathrm{C}_n(1,\ 0)$, $\mathrm{B}_n(-1,\ -n)$

직선 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 기울기는 $\frac{n}{2}$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{OD}_n}}{\overline{\mathrm{OC}_n}}=\frac{n}{2}$, 즉 $\overline{\mathrm{OD}_n}=\frac{n}{2}$

사다리꼴의 넓이에 대한 공식에 의하여

$S_n=\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}+\overline{\mathrm{OD}_n}}{2}\times\overline{\mathrm{OC}_n}=\frac{3}{4}n$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$T_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OD}_n}\times|$점 B_n의 x좌표$|=\frac{n}{4}$

G032 | 답 ④

[풀이]

곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$와 직선 $y=\frac{n}{2}$의 교점의 x좌표는

$x=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=2^{-n}$

그런데 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$은 y축에 대하여 대칭이므로

$S_n=2\times 2^{-n}\times\frac{1}{2}=2^{-n}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

답 ④

G033 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 두 급수가 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)=\beta$

(단, α, β는 상수이다.)

▸ ㄱ. (참)

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)=\alpha$이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$이다.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-1+1)=0+1=1$

▸ ㄴ. (참)

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴한다고 가정하고

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\gamma$로 두자. (단, γ는 상수이다.)

급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta-\gamma$

인 동시에

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}1=\lim_{n\to\infty}n=\infty$(발산)

이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.

▸ ㄷ. (참)

급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1+b_n+1)=\alpha+\beta$$

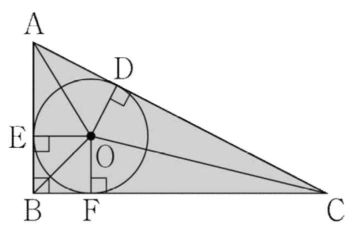
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

G034 | 답 ①

[풀이1]

삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O, 점 O에서 세 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 E, F, D라고 하자.



피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{n^2+1}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle$ABC의 넓이)=($\triangle$OAB의 넓이)+($\triangle$OBC의 넓이)+($\triangle$OCA의 넓이)

$$\frac{n}{2}=\frac{1+n+\sqrt{n^2+1}}{2}r_n$$

정리하면

$$r_n=\frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}$$

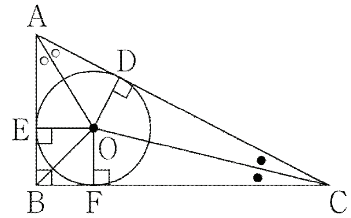
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{2}$$

답 ①

[참고]

r_n을 다음과 같이 유도해도 좋다.



피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{n^2+1}$

사각형 OEBF는 한 변의 길이가 r_n인 정사각형이므로

$\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{EB}=1-r_n$,

$\overline{FC}=\overline{BC}-\overline{BF}=n-r_n$

그런데 $\overline{AD}=\overline{AE}$, $\overline{CD}=\overline{CF}$이므로

($\because \triangle OAE\equiv\triangle OAD$, $\triangle OCF\equiv\triangle OCD$)

$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}=\overline{AE}+\overline{FC}$

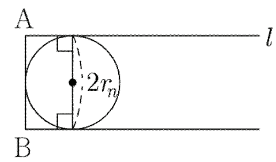
즉, $\sqrt{n^2+1}=n+1-2r_n$

정리하면

$$r_n=\frac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{2}=\frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}$$

[풀이2] 시험장

점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선을 l이라고 하자.



$n\to\infty$일 때, 점 A의 부근에서 직선 AC는 직선 l에 한없이 가까워지므로

원의 지름의 길이는 선분 AB의 길이에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}$$

답 ①

G035 | 답 ④

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 α에 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=0\times\beta=0$$

▸ ㄴ. (참)

보기에서 주어진 조건에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=\gamma,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=\delta$$

(단, γ, δ는 상수이다.)

급수의 성질에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2a_n+b_n)+(a_n-2b_n)}{5}=\frac{2\gamma+\delta}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2a_n+b_n)-2(a_n-2b_n)}{5}=\frac{\gamma-2\delta}{5}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴한다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례) 예를 들어 $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^n$이면

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}1=1$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}b_n$은 (진동하면서) 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

G036 | 답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

$a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=2+\frac{1}{n}$, $c_n=1+\frac{1}{n}$

이면 $n\to\infty$일 때, $c_n\to1$이지만

$\alpha=0\neq2=\beta$이다.

▸ ㄴ. (참)

수렴하는 수열의 대소 관계에 의하여

$\alpha\le\beta$

이다. 즉, $\alpha>\beta$일 수 없다는 말이다.

주어진 명제의 대우명제는 다음과 같다.

'$\alpha=\beta$이면 $\{c_n\}$이 수렴한다.'

위의 명제가 참이므로 문제에서 주어진 명제도 참이다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

수렴하는 수열의 대소 관계에 의하여

$n\to\infty$일 때, $c_n\to0$이다.

만약 $c_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$이면

$n\to\infty$일 때, $c_n\to0$이지만

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}c_k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

즉, 급수는 수렴하지 않는다.

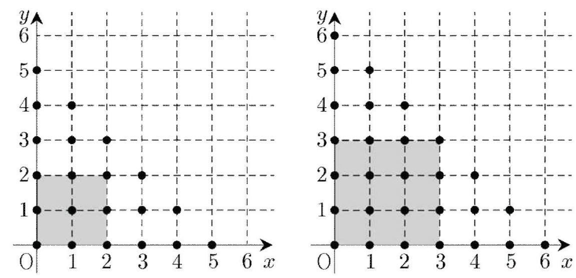
이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

G037 | 답 ②

[풀이]

[5단계], [6단계]를 그리면 다음과 같다.



이제 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 표로 정리하자.

n	a_n	b_n
1	$1+2$	0
2	$1+2+3$	2^2
3	$1+2+3+4$	2^2
4	$1+2+3+4+5$	3^2
5	$1+2+3+4+5+6$	3^2
6	$1+2+3+4+5+6+7$	4^2
⋮	⋮	⋮

일반항 a_{2n}, b_{2n}은 각각

$$a_{2n}=1+2+3+\cdots+(2n+1)$$

$$=\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}=(n+1)(2n+1),$$

$$b_{2n}=(n+1)^2$$

(단, $n\ge1$)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

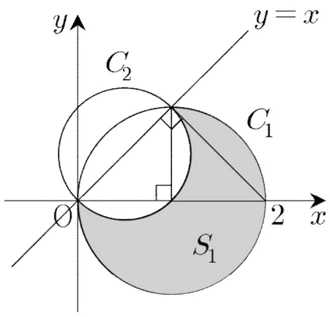
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{b_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2$$

답 ②

G038 | 답 ①

[풀이]



위의 그림에서

$S_1=\frac{3}{4}\pi-2\times\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$

두 원 C_1, C_2의 닮음비가 $\sqrt{2}:1$이므로

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\pi+1$$

답 ①

G039 | 답 ①

[풀이]

$\overline{\mathrm{DP}_1}=2$이고,

$\triangle\mathrm{DP}_1\mathrm{D}_1\sim\triangle\mathrm{BCD}_1$이므로 (닮음비 $1:2$)

$\overline{\mathrm{DD}_1}=x$로 두면 $\overline{\mathrm{BD}_1}=2x$이고

$x+2x=4\sqrt{2}$에서 $x=\frac{4\sqrt{2}}{3}(=\overline{\mathrm{DD}_1})$

$\therefore\ S_1=2\left(\frac{1}{2}\times2\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\sin45^\circ\right)=\frac{8}{3}$

한편 두 사각형 ABCD, $\mathrm{A_1BC_1D_1}$의 닮음비는

$3:2(=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{BD}_1})$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

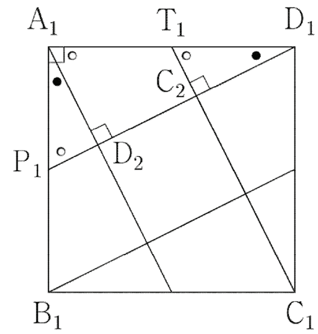
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{8}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{24}{5}$$

답 ①

G040 | 답 125

[풀이]

평면도형의 성질을 이용하면 아래와 같이 각(○, ●)을 결정할 수 있다.



직각삼각형 $\mathrm{A_1P_1D_1}$의 세 변의 길이의 비는

$1:\sqrt{5}:2$

이고, 서로 합동인 두 직각삼각형 $\mathrm{C_2T_1D_1}$, $\mathrm{D_2P_1A_1}$에 대하여

$\overline{\mathrm{P_1D_2}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{C_2D_1}}=2\sqrt{5}$

여기서 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 한 변의 길이를 x로 두면

$\overline{\mathrm{P_1D_1}}=\sqrt{5}+x+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$, $x=2\sqrt{5}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{100}{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{10}\right)^2}=125$$

답 125

G041 | 답 10

[풀이]

두 정사각형 ABCD, $\mathrm{A_1B_1CD_1}$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{A_1B_1}}=m+n:n$

이므로 $S_1:S_2=(m+n)^2:n^2$이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{\infty}S_k=\frac{\left(\frac{m}{m+n}\right)^2}{1-\left(\frac{n}{m+n}\right)^2}$$

$=\frac{m}{m+2n}=\frac{1}{7}$, 즉 $n=3m$

이고, m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=1$, $n=3$

$\therefore\ m^2+n^2=10$

답 10

G042 | 답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

$a_n = (-1)^n$이면

$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n$은 발산한다.

▸ ㄴ. (참)

$\lim_{n\to\infty} a_n$이 α에 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} (=\alpha)$이므로

(이때, n, $n+1$은 연속한 두 자연수이다.)

$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} (=\alpha)$

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

만약 수열 $\{a_n\}$이

$-1,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \cdots$

이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴하지만 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$은 양의 무한대로 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

G043 | 답 ①

[풀이]

주어진 등식에서

$S_{n-1} = S_n - a_n = \frac{n+3}{n+2} (n \ge 2)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 1$

답 ①

G044 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

주어진 등식에 $n=1$을 대입하면

$S_1 = pa_1 + 1$, 즉 $a_1 = pa_1 + 1$

$\therefore a_1 = \frac{1}{1-p}$

▸ ㄴ. (참)

$S_n = pa_n + 1$

$S_{n-1} = pa_{n-1} + 1\ (n \ge 2)$

위의 두 식을 변변히 빼면

$a_n = pa_n - pa_{n-1}$, $a_n = \frac{p}{p-1} a_{n-1} (n \ge 2)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

▸ ㄷ. (거짓)

$p = \frac{2}{3}$이면 $\frac{p}{p-1} = -2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

G045 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

등비급수가 수렴할 조건은

$(x-1)\log_2 x = 0$ 또는 $-1 < \log_2 x < 1$

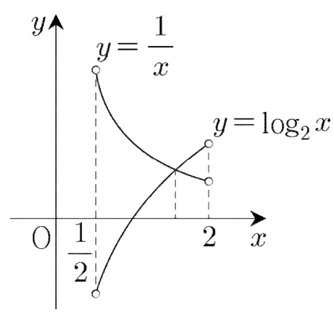
즉, $\frac{1}{2} < x < 2$

▸ ㄴ. (참)

등비급수의 합은

$\frac{(x-1)\log_2 x}{1-\log_2 x} = 1$, 즉 $\log_2 x = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{2} < x < 2$일 때, 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y = \frac{1}{x}$은 오직 한 점에서 만난다.



▸ ㄷ. (참)

$-1 < \log_2 x < 1$에서

$-1 < \frac{\log_2 x - 1}{2} < 0$이므로 급수는 수렴한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

G046 | 답 ①

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$로 두면

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

▸ ㄴ. (거짓)

(반례) $a_n=1$, $b_n=n$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+1}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=1\text{이지만 }\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\infty\text{이다.}$$

반례는 다음과 같이 찾으면 된다.

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{\frac{b_n}{n}}{\frac{a_n}{n+1}\times\frac{n+1}{n}}$$

위의 등식에서 $n\to\infty$일 때, $\frac{n+1}{n}\to 1$이므로

$\frac{b_n}{n}\to\alpha(\neq 0)$, $\frac{a_n}{n+1}\to 0$이면 $\frac{b_n}{a_n}$은 발산한다.

이때, b_n은 n에 대한 일차식, a_n은 상수가 적합하다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례) 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이라는 보장은 없지만, 편의상 등비수열이라고 생각하자. 이때, 공비를 r이라고 하자.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n a_n=\frac{a_1}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}$$

이므로 $\left|\frac{r}{2}\right|<1$, 즉 $-2<r<2$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n a_n$은 수렴한다.

그런데 $-2<r\le -1$ 또는 $1<r<2$이면 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

예를 들어 $a_n=(-1)^n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n$은 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

G047 | 답 59

[풀이]

지름이 6인 원의 넓이를 $A_0(=9\pi)$,

그림 C_1에서 새롭게 그려진 2개 원의 넓이의 합을 A_1,

그림 C_2에서 새롭게 그려진 4개의 원의 넓이의 합을 A_2,

⋮

그림 C_n에서 새롭게 그려진 2^n개의 원의 넓이의 합을 A_n이라 하자.

그림 C_1에서 바깥 원을 O_1, 원 O_1의 내부에 내접하는 두 원을 크기 순서대로 O_2, O_3이라 하자. 이때, 세 원 O_1, O_2, O_3의 넓이의 비는 $9:4:1$이므로

$$A_1=\frac{5}{9}A_0$$

그림 C_n에서 한 원과 그 원에 내접하는 두 원의 넓이의 비는 O_1, O_2, O_3의 넓이의 비와 같으므로

$$A_n=\frac{5}{9}A_{n-1}(n\ge 1)$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n$

$$=A_0\left\{\frac{5}{9}-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=\frac{5\pi}{1-\left(-\frac{5}{9}\right)}=\frac{45}{14}\pi$$

$\therefore\ p+q=59$

답 59

[참고]

다음과 같은 계산도 가능하다.

$\lim_{n\to\infty}S_n$

$$=5\pi-5\pi\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}+5\pi\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^2$$

$$-5\pi\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^3+\cdots$$

$$=\frac{5\pi}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{45}{14}\pi$$

G048 | 답 11

[풀이]

문제에서 주어진 기울기 조건에 의하여

두 직선 A_1A_2, A_2A_3은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

이때, $\angle A_1A_2O=\angle A_2A_3O$이므로

두 직각삼각형 A_1A_2O, A_2A_3O은 서로 닮음이다.

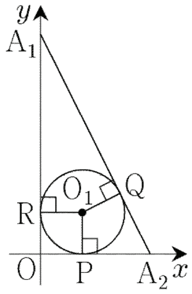
이때, 닮음비가 $2:1$이므로 $r_2=\frac{1}{2}r_1$이다.

마찬가지의 방법으로

$$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n(n\ge 1)$$

이제 r_1의 값을 구하자.

점 O_1에서 x축, 직선 A_1A_2, y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라고 하자.



$\overline{A_1A_2}=\overline{A_1Q}+\overline{QA_2}=\overline{A_1R}+\overline{A_2P}$

즉, $2\sqrt{5}=4-r_1+2-r_1$

$r_1=3-\sqrt{5}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

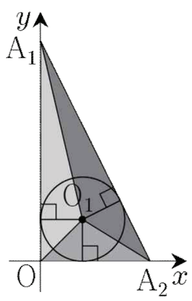
$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n=\frac{3-\sqrt{5}}{1-\frac{1}{2}}=6-2\sqrt{5}$$

$\therefore\ a+b=11$

답 11

[참고]

r_1의 값을 다음과 같이 구해도 좋다.



($\triangle A_1OA_2$의 넓이)

$=$($\triangle A_1OO_1$의 넓이)$+$($\triangle O_1OA_2$의 넓이)$+$($\triangle A_2A_1O_1$의 넓이)

즉, $\frac{1}{2}\times2\times4=\frac{1}{2}\times r_1\times(6+2\sqrt{5})$

$\therefore\ r_1=3-\sqrt{5}$

G049 | 답 ⑤

[풀이]

수열 $\{(-1)^{n-1}\}$을 나열하면

$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$

(즉, $1,\ -1$이 반복된다.)

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$

(즉, $1,\ 0$이 반복된다.)

n이 홀수이면 $S_n=1$,

n이 짝수이면 $S_n=0$이다.

▸ ㄱ. (발산)

수열 $\{S_n\}$은 발산한다. (진동한다.)

▸ ㄴ. (수렴)

모든 자연수 n에 대하여

$$0\le\frac{S_n}{n}\le\frac{1}{n}$$

이고, $n\to\infty$일 때, $\frac{1}{n}\to0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$$

▸ ㄷ. (수렴)

$T_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$으로 두었을 때,

수열 $\{T_n\}$을 나열하면

$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ \cdots$

일반항은

$T_{2m-1}=m,\ T_{2m}=m$ (단, m은 자연수)

자연수 m에 대하여

- $n=2m$일 때,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{T_{2m}}{2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$$

- $n=2m-1$일 때,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{T_{2m-1}}{2m-1}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2m-1}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n}{n}=\frac{1}{2}$$

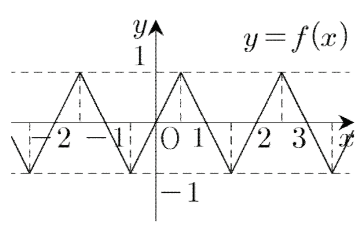
이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

G050 | 답 ⑤

[풀이]

주기가 2인 함수 $f(x)$의 그래프는

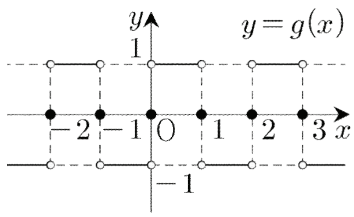


수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$|1+f(x)|>1$, 즉 $f(x)>0$이면 $g(x)=1$

$1+f(x)=1$, 즉 $f(x)=0$이면 $g(x)=0$

$|1+f(x)|<1$, 즉 $-1 \le f(x) < 0$이면 $g(x)=-1$
함수 $g(x)$의 그래프는



그런데 $14 < 10\sqrt{2} < 15$, $1 < \sqrt{3} < 2$이므로

$\therefore\ g(10\sqrt{2}) - g(\sqrt{3}) = 1-(-1) = 2$

답 ⑤

G051 | 답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$$

▸ ㄴ. (참)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라고 하면 $b_n = 2 + \frac{1}{n} - a_n$에서

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}-a_n\right) = 2-\alpha$$

▸ ㄷ. (거짓)

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이므로

ㄴ에 의해 $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$이다.

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

G052 | 답 ④

[풀이]

$3\cdot 2^n$의 모든 양의 약수는

$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^n,$ $(n+1$개$)$

$3\cdot 2^0,\ 3\cdot 2^1,\ 3\cdot 2^2,\ \cdots,\ 3\cdot 2^n$ $(n+1$개$)$

이므로

$$S_n = \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}} = 2+\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

답 ④

G053 | 답 ③

[풀이]

두 점 A_n, B_n의 x좌표를 각각 α_n, β_n이라고 하자.

문제에서 주어진 곡선과 직선의 방정식을 연립하면

$x^2-2x-n=0$

이 이차방정식의 두 실근은 각각 α_n, β_n이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=2$, $\alpha_n\beta_n=-n$

$$\beta_n-\alpha_n = \sqrt{(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n} = 2\sqrt{n+1}$$

이므로

$$a_n = \sqrt{(\beta_n-\alpha_n)^2+(2\beta_n-2\alpha_n)^2}$$
$$= \sqrt{5}\,(\beta_n-\alpha_n) = 2\sqrt{5n+5}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+1}}{a_n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+1}}{2\sqrt{5n+5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5+\frac{1}{n}}}{2\sqrt{5+\frac{5}{n}}} = \frac{1}{2}$$

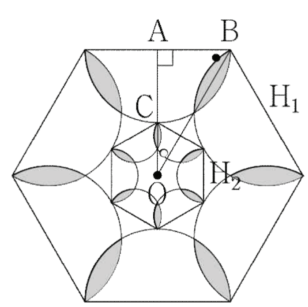
답 ③

G054 | 답 ①

[풀이]

정육각형 H_1의 한 변의 길이를 2로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

정육각형 H_1의 대각선들의 교점을 O라고 하자. 아래 그림에서 A, B는 H_1 위의 점이고, C는 H_2 위의 점이다.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

직각삼각형 AOB에서

$\overline{AO}=\sqrt{3}$이므로 $\overline{CO}=\sqrt{3}-1$

두 정육각형 H_1, H_2의 닮음비는 $\overline{OB}:\overline{OC}=2:\sqrt{3}-1$이므로 넓이의 비는

$2^2:(\sqrt{3}-1)^2$, 즉 $2:2-\sqrt{3}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

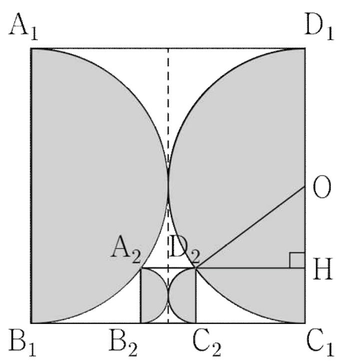
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{S_1}{1-\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}S_1$$

답 ①

G055 | 답 ②

[풀이]

선분 C_1D_1을 지름으로 하는 반원의 중심을 O, 점 D_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 선분 C_nD_n을 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이를 r_n이라고 하자. (단, $r_1=1$이다.)



원의 정의에 의하여

$\overline{OD_2}=1$

두 선분 D_2H, HO의 길이는 각각

$\overline{D_2H}=1-r_2$, $\overline{HO}=1-2r_2$

직각삼각형 OD_2H에서 피타고라스의 정리에 의하여

$1^2=(1-r_2)^2+(1-2r_2)^2$

우변을 전개하여 정리하면

$5r_2^2-6r_2+1=0$, $(5r_2-1)(r_2-1)=0$

풀면

$r_2=\frac{1}{5}(\because r_2\neq 1)$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$r_{n+1}=\frac{1}{5}r_n$

수열 $\{r_n\}$의 귀납적 정의는

$r_1=1$, $r_{n+1}=\frac{1}{5}r_n$

수열 $\{S_n\}$의 귀납적 정의는

$S_1=\pi$, $S_{n+1}=\frac{1}{25}S_n$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\pi}{1-\frac{1}{25}}=\frac{25}{24}\pi$$

답 ②

G056 | 답 18

[풀이]

조건 (가)에서 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{r-5}{8}<1$

연립부등식을 풀면

$-3<r<13$

• (1) $-3<r<7$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-7^n+2}{r^n+7^{n+1}+2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r\left(\frac{r}{7}\right)^n-1+\frac{2}{7^n}}{\left(\frac{r}{7}\right)^n+7+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n}$$

$$=\frac{0-1+0}{0+7+0}=-\frac{1}{7}$$

• (2) $r=7$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}-7^n+2}{7^n+7^{n+1}+2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times 7^n+2}{8\times 7^n+2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{2}{7^n}}{8+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n}$$

$$=\frac{6+0}{8+0}=\frac{3}{4}\neq-\frac{1}{7}$$

• (3) $7<r<13$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-7^n+2}{r^n+7^{n+1}+2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r-\left(\frac{7}{r}\right)^n+\frac{2}{r^n}}{1+7\left(\frac{7}{r}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}\right)^n}$$

$= \dfrac{r-0+0}{1+0+0} = r \neq -\dfrac{1}{7}$

(1), (2), (3)에서 r의 범위는

$-3 < r < 7$

따라서 모든 정수 r의 값의 합은

$-2+(-1)+0+1+2+3+4+5+6$

$=3+4+5+6=18$

답 18

G057 | 답 ④

[풀이]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{16^n+a^n}-4^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{\sqrt{16^n+a^n}+4^n} \qquad \cdots(*)$$

• (1) $1 \le a \le 3$인 경우

$$(*)= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{16}\right)^n}+1} = \frac{0}{1+1} = 0$$

• (2) $a=4$인 경우

$$(*)= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}+1} = \frac{1}{2}$$

• (3) $5 \le a \le 15$인 경우

$$(*)= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{16}\right)^n}+1} = \infty$$

• (4) $a=16$인 경우

$$(*)= \lim_{n\to\infty}\frac{16^n}{\sqrt{2\times 4^n}+4^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{\sqrt{2}+1} = \infty$$

• (5) $a \ge 17$인 경우

$$(*)= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{a})^n}{\sqrt{\left(\frac{16}{a}\right)^n+1}+\left(\frac{4}{\sqrt{a}}\right)^n} = \infty$$

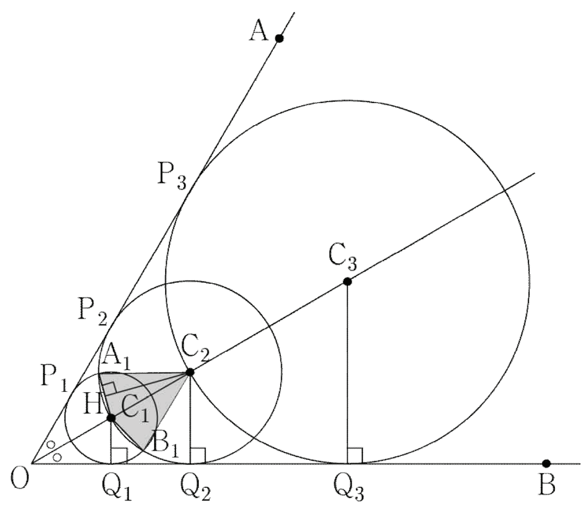
(1)~(5)에서 자연수 a는 4 이하이다.

답 ④

G058 | 답 ⑤

[풀이]

점 C_2에서 선분 A_1C_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.



(단, ○$=30^\circ$)

원 C_n은 점 Q_n에서 직선 OB에 접하므로

$\overline{C_nQ_n} \perp \overline{OB}$

직각삼각형 C_1OQ_1에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{OQ_1}=\sqrt{3}$, $\overline{C_1Q_1}=1(=r_1)$

직각삼각형 C_2OQ_2에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\sin 30^\circ = \dfrac{\overline{C_2Q_2}}{\overline{OC_2}}$ 즉, $\dfrac{1}{2}=\dfrac{r_2}{r_2+2}$

풀면 $r_2=2$

마찬가지의 방법으로 3 이상의 자연수 n에 대하여

$\sin 30^\circ = \dfrac{\overline{C_nQ_n}}{\overline{OC_n}}$

즉, $\dfrac{1}{2}=\dfrac{r_n}{2+r_2+r_3+\cdots+r_n}$

정리하면

$r_n=2+r_2+r_3+\cdots+r_{n-1}$

n의 자리에 $n-1$을 대입하면

$r_{n-1}=2+r_2+r_3+\cdots+r_{n-2}$

위의 두 등식을 변변히 빼서 정리하면

$r_n=2r_{n-1}(n\ge 3)$

수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이다.

일반항 r_n은

$r_n=2^{n-1}(n\ge 1)$

이제 사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이를 구하자.

원의 정의에 의하여

$\overline{A_1C_1}=1$, $\overline{C_2A_1}=2$

이등변삼각형 $C_2A_1C_1$에서 점 H는 선분 A_1C_1의 중점이므로

$\overline{A_1H}=\dfrac{1}{2}$

직각삼각형 C_2A_1H에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{C_2H} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$S_1 = 2 \times (\triangle C_2A_1C_1$의 넓이$)$

$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{15}}{2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{2}$

등비수열 $\{r_n\}$의 공비가 2이므로, 수열 $\{S_n\}$은 공비가 4인 등비수열이다.

일반항 S_n은

$S_n = \frac{\sqrt{15}}{2} \times 4^{n-1} (n \geq 1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{4^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{15}}{8} \times 4^n}{4^n + 3^n} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

답 ⑤

G059 | 답 12

[풀이]

2^n 이하의 자연수 중에서 2^n과 서로소인 자연수를 크기 순서대로 모두 쓰면

$1, 3, 5, \cdots, 2^n - 1$ (즉, 홀수)

이다.

$S_n = \frac{1 + (2^n - 1)}{2} \times 2^{n-1} = 4^{n-1}$

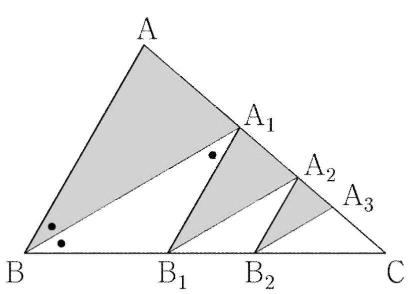
등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{9}{1 - \frac{1}{4}} = 12$

답 12

G060 | 답 19

[풀이]



(단, $\bullet = 30^\circ$)

$\overline{AB} // \overline{A_1B_1}$이므로

$\angle B_1A_1B = 30^\circ = \angle ABA_1$ (엇각)

이때, 삼각형 BB_1A_1은 이등변삼각형이다.

$\overline{A_1B_1} = x$로 두자.

두 삼각형 ABC, A_1B_1C는 서로 닮음이므로

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A_1B_1} : \overline{B_1C}$, 즉 $4 : 6 = x : (6 - x)$

풀면 $x = \frac{12}{5}$

삼각형 BB_1A_1에서 $\overline{BA_1} = \frac{12}{5}\sqrt{3}$이므로

$S_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{12}{5}\sqrt{3} \times \sin\frac{\pi}{6} = \frac{12}{5}\sqrt{3}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

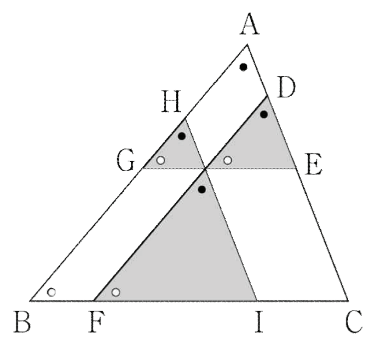
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{12}{5}\sqrt{3}}{1 - \left(\frac{\frac{12}{5}}{4}\right)^2} = \frac{15}{4}\sqrt{3}$

$\therefore p + q = 19$

답 19

G061 | 답 25

[풀이1]



평행선의 성질(동위각이 같음)을 이용하면 위와 같이 크기가 같은 각들을 찾을 수 있다. 위의 그림에서 삼각형 ABC와 어둡게 색칠된 세 개의 삼각형이 닮음임을 알 수 있다. 이 세 개의 삼각형의 넓이는 가장 작은 것부터 넓이 순서대로 각각

$\left(\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}\right)^2 M$, $\left(\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}}\right)^2 M$, $\left(\frac{\overline{EC}}{\overline{AC}}\right)^2 M$

즉, $\left(\frac{n}{6n+3}\right)^2 M$, $\left(\frac{2n+1}{6n+3}\right)^2 M$, $\left(\frac{3n+2}{6n+3}\right)^2 M$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + (2n+1)^2 + (3n+2)^2}{(6n+3)^2} M$

$= \frac{1+4+9}{36} M = \frac{7}{18} M$

$\therefore p + q = 25$

답 25

[풀이2] 시험장

$n\to\infty$일 때,

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{EC}}\approx 1:2:3=\frac{1}{6}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$

이므로

문제에서 주어진 세 개의 색칠된 삼각형의 넓이는 가장 작은 것부터 넓이 순서대로

$\left(\frac{1}{6}\right)^2 M,\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 M,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 M$

에 수렴한다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n$

$=\left(\frac{1}{6}\right)^2 M+\left(\frac{1}{3}\right)^2 M+\left(\frac{1}{2}\right)^2 M=\frac{7}{18}M$

$\therefore\ p+q=25$

답 25

G062 | 답 ②

[풀이]

〈과정〉

$a_n>0$, $K>0$이고 $a_1\ge K$이므로

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{K^2}{a_n}\right)\ge\sqrt{a_n\cdot\frac{K^2}{a_n}}=\boxed{K}$이다.

($\because$ 산술기하절대부등식)

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$a_n\ge\boxed{K}$ $\cdots$㉠

이다.

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{K^2}{a_n}\right)$이므로

2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{K^2}{a_{n-1}}\right)$이다.

$a_n-K=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{K^2}{a_{n-1}}\right)-K$

$=\frac{a_{n-1}^2-2Ka_{n-1}+K^2}{2a_{n-1}}=\frac{(a_{n-1}-K)^2}{2a_{n-1}}$

$=\frac{1}{2}\left(\boxed{a_{n-1}-K}\right)\left(1-\frac{K}{a_{n-1}}\right)\le\frac{1}{2}\left(\boxed{a_{n-1}-K}\right)$

$\left(\because 0<\frac{K}{a_{n-1}}\right)$

이 성립하므로

$a_n-K\le\frac{1}{2}\left(\boxed{a_{n-1}-K}\right)\le\frac{1}{2^2}(a_{n-2}-K)$

$\le\frac{1}{2^3}(a_{n-3}-K)\le\cdots\le\boxed{\frac{1}{2^{n-1}}}(a_1-K)$ $\cdots$㉡

이다.

㉠, ㉡에 의하여 $0\le a_n-K\le\boxed{\frac{1}{2^{n-1}}}(a_1-K)$이다.

$\lim_{n\to\infty}0=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}(a_1-K)=0$이므로

수렴하는 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}(a_n-K)=0$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{K}$이다.

(가): K

(나): $a_{n-1}-K$

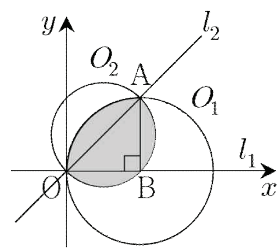
(다): $\frac{1}{2^{n-1}}$

답 ②

G063 | 답 ④

[풀이]

두 원 O_1, O_2의 두 교점 중에서 O가 아닌 점을 A, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라고 하자. 이때, 점 B는 원 O_1의 중점이다.



$S_1=$(호 AO와 현 AO로 둘러싸인 활꼴의 넓이)

$+\frac{1}{2}\times$(원 O_2의 넓이)

$=\frac{9}{4}\pi-\frac{9}{2}+\frac{9}{4}\pi=\frac{9}{2}\pi-\frac{9}{2}$

두 원 O_1, O_2의 닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$S_2=\frac{1}{2}S_1$ (그리고 $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$)

등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{2}\pi-\frac{9}{2}}{1-\frac{1}{2}}=9\pi-9$

답 ④

G064 | 답 ④

[풀이] ★

▸ ㄱ. (참)

주어진 부등식의 각 변을 $b_n^2(>0)$으로 나누면

$$0 < \frac{a_n}{b_n^2} < \frac{1}{b_n}$$

$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n^2} = 0$$

▸ ㄴ. (거짓)

(반례)

$a_n = 2+(-1)^n$, $b_n = 2-(-1)^n$이면

$a_n b_n = 3$이다.

이때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 발산하지만 수열 $\{a_n b_n\}$은 수렴한다.

▸ ㄷ. (참)

2 이상의 자연수 n에 대하여

$(n+1)a_n = p_n$, $(n-1)c_n = r_n$

으로 두자.

정리하면

$$a_n = \frac{p_n}{n+1},\ c_n = \frac{r_n}{n-1} \text{(단, } n \ge 2)$$

이고, $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} r_n = 1$

이를 주어진 부등식에 대입하면

$$\frac{p_n}{n+1} < b_n < \frac{r_n}{n-1} \text{(단, } n \ge 2)$$

각 변에 n을 곱하면

$$\frac{np_n}{n+1} < nb_n < \frac{nr_n}{n-1} \text{(단, } n \ge 2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{np_n}{n+1} = 1\times 1 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nr_n}{n-1} = 1\times 1 = 1$$

이므로 수렴하는 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} nb_n = 1$$

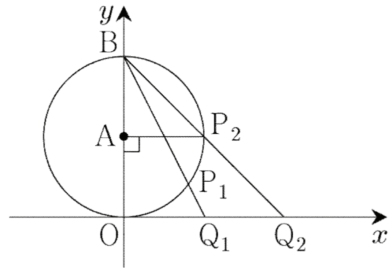
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

G065 | 답 ③

[풀이]

$\angle P_nAP_{n-1} = \theta_n$으로 두자. (단, $n \ge 1$)



중심각과 원주각의 관계에 의하여

$\angle P_2AO = 2\angle P_2BO = 90^\circ$

이므로

$$l_1 + l_2 = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2},\ \text{즉 } \theta_1 + r\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \cdots ㉠$$

조건 (나)에 의하여 수열 $\{l_n\}$은 등비수열이므로

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\theta_1}{1-r} = \frac{8}{15}\pi \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$\frac{\frac{\pi}{2(1+r)}}{1-r} = \frac{8}{15}\pi,\ r^2 = \frac{1}{16}$$

$$\therefore r = \frac{1}{4}$$

답 ③

G066 | 답 ①

[풀이]

$$l_1 = 2\times\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

한편

($\triangle A_2B_2C_2$의 높이)=($\triangle A_1B_1C_1$의 높이)-2

$=3\sqrt{3}-2$

에서 두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$의 닮음비는

$3\sqrt{3} : (3\sqrt{3}-2)$이므로

$$l_2 = \frac{3\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}} l_1$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\frac{3\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{3}\pi$$

답 ①

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2022 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2022 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통 〉

- 공통 1 : 문제를 보자마자 a^2-b^2이 떠올라야 함. 1번부터 '이 시험은 교과서/기출문제를 풀었던 기억으로 푼다.'를 의도적으로 말하고 있음. 즉, '정해진 풀이를 따르지 않으면 망한다.'를 노골적으로 표현.
- 공통 8 : 이차함수의 정적분 → 대칭축을 생각한다.
- 공통 13 : 그림을 그릴 수 없으니, 처음부터 끝까지 계산. 로그문제에서 a^b이 나오면 $\log a^b = b\log a$ 생각이 들어야.
- 공통 14 : x축에서 점 P를 움직이는게 우선.
- 공통 15 : 역대 평가원 기출 중에서 " 코사인법칙에 의하여 " 란 문구가 등장한 첫 번째 문제. 어떤 공식을 써야 하는지 알려 주었는데. 어려운 문제일리 없다. 읽는데 4점.
- 공통 21 : $2+2^2+2^3<2^4$과 같은 계산을 해보았는가? '기하급수적으로 빨라진다.'의 의미를 아는가를 평가.
- 공통 22 : $f(1)=f(4)$에서 $f(x)$의 그래프의 개형이 바로 나와야 함. 삼차함수의 비율관계.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 28 : 분할, 여사건 모두 가능. 이 문제 보다 경우 구분이 많은 함수 개수 세는 문제는 기출에 널려있음.
- 확률과 통계 29 : 적분 기호 쓰면 좀 더 편하긴 한데. $y=k$ 그리면 더 단순하게 해결 가능.
- 확률과 통계 30 : 답을 맞히기 상당히 어려운, 실수하기 딱 좋은 문제. 수형도 그냥 다 그리는 편이 나음.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 : 평행이동/대칭성 & 기출을 풀었던 경험. 풀이 중간 과정에서 답을 바로 알 수 있음.
- 미적분 29 : 계산이 복잡하니. 극한의 근사적 계산으로 접근하면 실수 없이 빠르게 계산 가능.
- 미적분 30 : (나)의 항등식에 $x=1,\ 2,\ 4$ 대입하여 점찍고, 확대해서 그리면 끝. 역함수의 정적분 계산 말고, 그림으로 해결.

〈 기하 〉

- 기하 26 : 동일하게 쌍곡선으로 수능에 출제된 적이 있음. 원 밖의 점에서 접선 2개 그으면 합동인 직각삼각형 2개 찾는다.
- 기하 28 : 빗변 주면, 직각삼각형 그리고. 기울기 없으니, 피타 쓰고. 포물선의 정의대로 선분 그으면 직각 안에 수선 그려지니 닮음 쓰고.
- 기하 29 : 문제에서 원 위의 점 주었으니. (나)는 직선(선분)일 수밖에. 이 유형의 문제 중에서도 중급 수준.
- 기하 30 : 평가원 기출 중, 구/직선 정사영 내려서 점의 이동 관찰하는 문제의 확장판. 풀다보면 이면각 보다는 정사영이 좀 더 편하긴 하지만. 이면각의 정의에 의한 풀이도 계산이 거의 없음. 기존 공도 기출과 비교하여 중급 수준.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

구성

▶ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 기하'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 159개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2021년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2022학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2022학년도 (학년도 기준)

▶ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▶ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
대단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

▶ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

목 차

기하

단원별 알파벳구성

<table>
<tr><th>과목</th><th>대단원</th><th>알파벳</th><th>과목</th><th>대단원</th><th>알파벳</th></tr>
<tr><td rowspan="3">수학 Ⅰ</td><td>지수함수와 로그함수</td><td>A</td><td rowspan="3">기하</td><td>이차곡선</td><td>M</td></tr>
<tr><td>삼각함수</td><td>B</td><td>평면벡터</td><td>N</td></tr>
<tr><td>수열</td><td>C</td><td>공간도형과 공간좌표</td><td>P</td></tr>
<tr><td rowspan="3">수학 Ⅱ</td><td>함수의 극한과 연속</td><td>D</td><td rowspan="6">수학</td><td>다항식</td><td>Q</td></tr>
<tr><td>미분</td><td>E</td><td>방정식과 부등식</td><td>R</td></tr>
<tr><td>적분</td><td>F</td><td>도형의 방정식</td><td>S</td></tr>
<tr><td rowspan="3">미적분</td><td>수열의 극한</td><td>G</td><td>집합과 명제</td><td>T</td></tr>
<tr><td>미분법</td><td>H</td><td>함수</td><td>U</td></tr>
<tr><td>적분법</td><td>I</td><td>순열과 조합</td><td>V</td></tr>
<tr><td rowspan="3">확률과
통계</td><td>경우의 수</td><td>J</td><td colspan="2">교육과정 外</td><td>Z</td></tr>
<tr><td>확률</td><td>K</td></tr>
<tr><td>통계</td><td>L</td></tr>
</table>

M 이차곡선

- 2015개정 교육과정

◆ 수학 I (공통과목)에서 라디안을 배우므로 라디안으로 출제된 기출은 변형하지 않았습니다.

○ 육십분법 도입

○ 기울기가 주어진 접선의 공식 귀환

○ 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 출제 가능

M. 이차곡선

M001

○○
(2003(10)고3-자연계14)

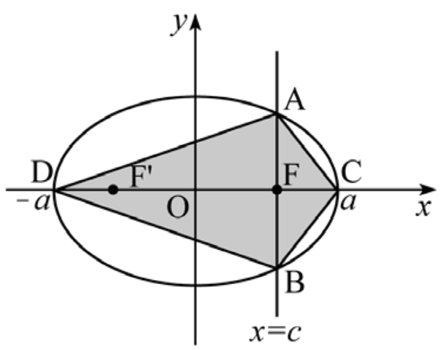
쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 위의 한 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 $\angle FPF'=60°$ 일 때, $\triangle PFF'$의 넓이는? [3점]

① $6\sqrt{2}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{3}$
④ $9\sqrt{2}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

M002

○○
(2005(10)고3-가형23)

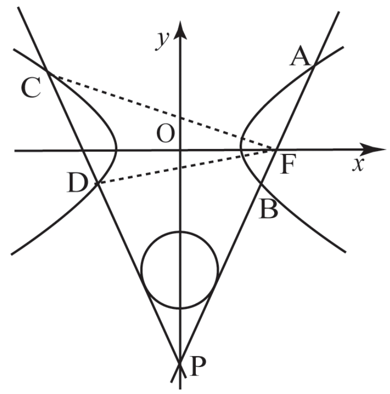
그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F′$(-c,\ 0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1$과 직선 $x=c$의 교점을 A, B라 하자. 두 점 C$(a,\ 0)$, D$(-a,\ 0)$에 대하여, 사각형 ADBC의 넓이를 구하시오. (단, a와 c는 양수이다.) [4점]



M003

○○
(2005사관(1차)-이과25)

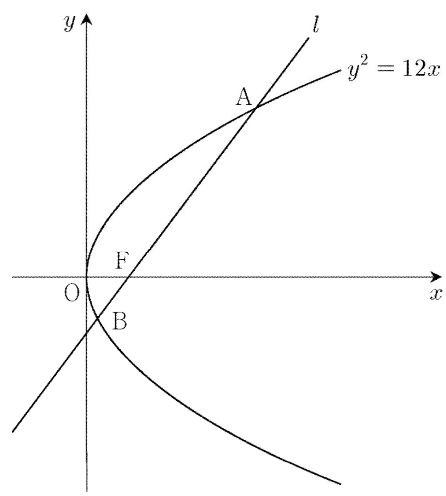
오른쪽 그림과 같이 y축 위의 점 P에서 원 $x^2+(y+k)^2=5$에 그은 두 접선이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$과 만나는 교점을 각각 A, B와 C, D라 한다. $\overline{AB}=10$일 때, $\overline{AB}$와 x축과의 교점 F$(5,\ 0)$에 대하여 $\overline{CF}+\overline{DF}$의 값을 구하시오. [3점]



M004

○○○
(2005사관(1차)-이과7)

그림과 같이 포물선 $y^2=12x$의 초점 F를 지나는 직선 l과 이 포물선이 만나는 두 점을 A, B라 하자. $\overline{AF}:\overline{BF}=4:1$일 때 직선 l의 방정식은 $ax+by=12$이다. 이 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? [3점]



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

M005

○○○
(2006(10)고3-가형8)

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{18}=1$과 직선 $y=ax+b$(a, b는 상수)의 교점의 개수에 대한 설명 중 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? [3점]

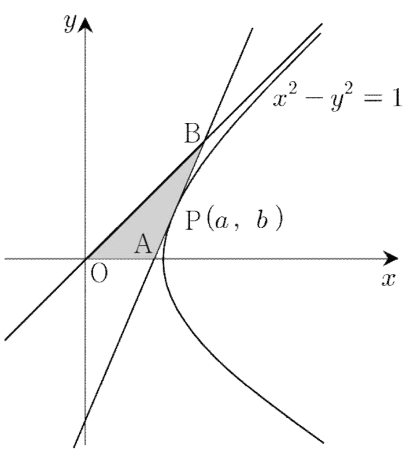
ㄱ. $a=-4$이고 $b=0$일 때 교점은 없다.
ㄴ. $a=3$이고 $b>0$일 때 교점은 1개다.
ㄷ. $a=\dfrac{1}{3}$이고 $b<0$일 때 교점은 2개다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

M006

○○○
(2007사관(1차)-이과17)

그림과 같이 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ (단, $a>1$, $b>0$)에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A, 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $\lim\limits_{a\to\infty}S(a)$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

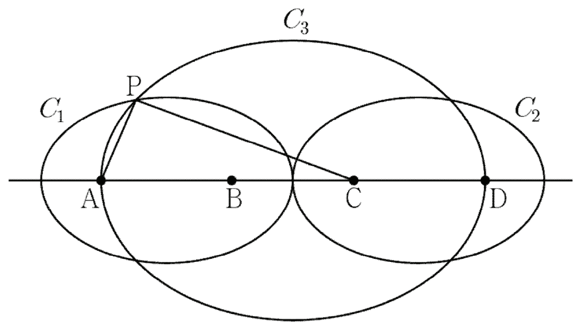


① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

M007

○○
(2007사관(1차)-이과18)

그림과 같이 서로 합동인 두 타원 C_1, C_2가 외접하고 있다. 두 점 A, B는 타원 C_1의 초점, 두 점 C, D는 타원 C_2의 초점이고, 네 점 A, B, C, D는 모두 한 직선 위에 있다. 두 점 B, C를 초점, 선분 AD를 장축으로 하는 타원을 C_3이라 하고, 두 타원 C_1, C_3의 교점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=8$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=6$일 때, $\overline{\mathrm{CP}}-\overline{\mathrm{AP}}$의 값은? [4점]

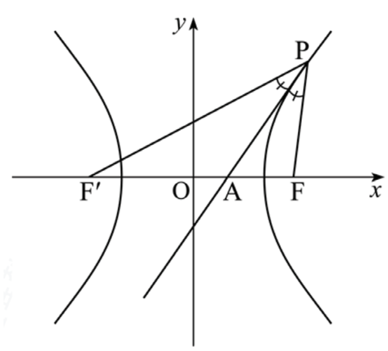


① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

M008

○○
(2007(10)고3-가형19)

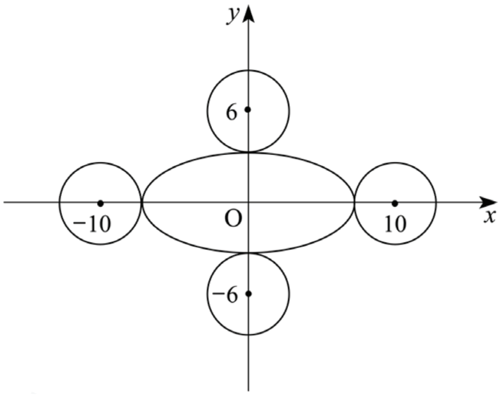
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 ∠F′PF의 이등분선이 x축과 점 A(1, 0)에서 만날 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이를 구하시오. [3점]



M009

○○ (2007(10)고3-가형21)

그림과 같이 좌표평면에 중심의 좌표가 각각 $(10,\ 0)$, $(-10,\ 0)$, $(0,\ 6)$, $(0,\ -6)$이고 반지름의 길이가 모두 같은 4개의 원에 동시에 접하고, 초점이 x축 위에 있는 타원이 있다.

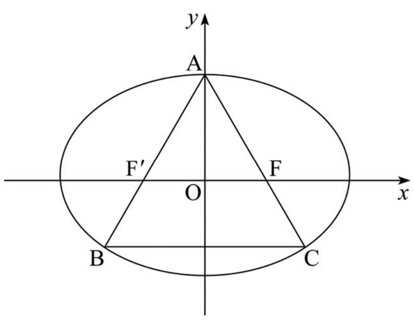


이 타원의 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{10}$일 때, 장축의 길이를 구하시오. (단, 네 원의 중심은 타원의 외부에 있다.) [4점]

M010

○○ (2008(10)고3-가형5)

그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<a)$에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. 타원의 두 초점 F, F$'$이 각각 선분 AC, AB 위에 있을 때, $\dfrac{b}{a}$의 값은? (단, 점 A는 y축 위에 있다.) [3점]



① $\dfrac{3}{5}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

M011

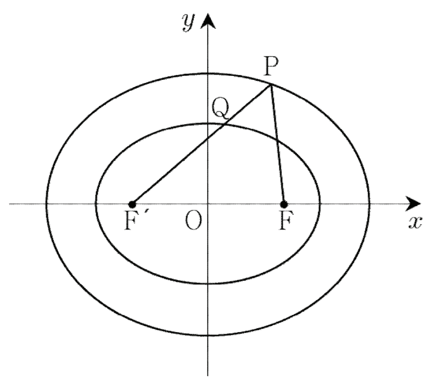
○○○ (2008사관(1차)-이과27)

y축을 준선으로 하고 초점이 x축 위에 있는 두 포물선이 있다. 두 포물선이 y축에 대하여 서로 대칭이고, 두 포물선의 꼭짓점 사이의 거리는 4이다. 두 포물선에 동시에 접하고 기울기가 양수인 직선을 그을 때, 두 접점 사이의 거리를 d라 하자. d^2의 값을 구하시오. [4점]

M012

○○ (2008사관(1차)-이과6)

그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{75}=1$의 두 초점을 F, F$'$이라 하고, 이 타원 위의 점 P에 대하여 선분 F$'$P가 타원 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{24}=1$과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{F'Q}}=8$일 때, 선분 FP의 길이는? [3점]



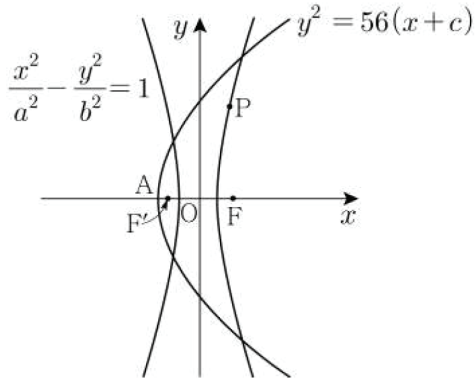
① 7 ② $\dfrac{29}{4}$ ③ $\dfrac{15}{2}$

④ $\dfrac{31}{4}$ ⑤ 8

M013

○○○
(2009(10)고3-가형8)

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(k,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-k,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 점 F를 초점으로 하는 포물선 $y^2=56(x+c)$가 있다.



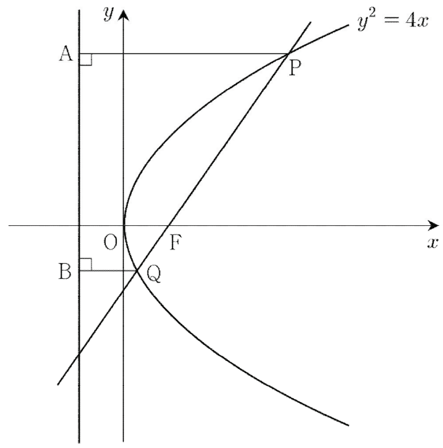
쌍곡선 위의 임의의 점 P에 대하여 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=10$이 성립하고, 포물선의 꼭짓점 A에 대하여 $\overline{\mathrm{AF'}}:\overline{\mathrm{FF'}}=1:6$이 성립한다. 이때, $\dfrac{c^2}{a^2-b^2}$의 값은? (단, $0<k<c$이다.) [4점]

① $\dfrac{53}{14}$ ② $\dfrac{55}{14}$ ③ $\dfrac{30}{7}$ ④ $\dfrac{32}{7}$ ⑤ $\dfrac{34}{7}$

M014

○○○
(2009사관(1차)-이과14)

그림과 같이 포물선 $y^2=4x$의 초점 F를 지나는 직선이 이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=5$일 때, 사각형 ABQP의 넓이는? [3점]

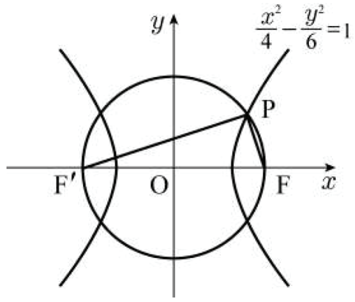


① $\dfrac{57}{4}$ ② $\dfrac{115}{8}$ ③ 15 ④ $\dfrac{125}{8}$ ⑤ $\dfrac{135}{8}$

M015

○○ (2010(10)고3-가형8)

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$이라 하자. 두 점 F, F′을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, $\cos(\angle \mathrm{PFF'})$의 값은? (단, c는 양수이다.) [4점]

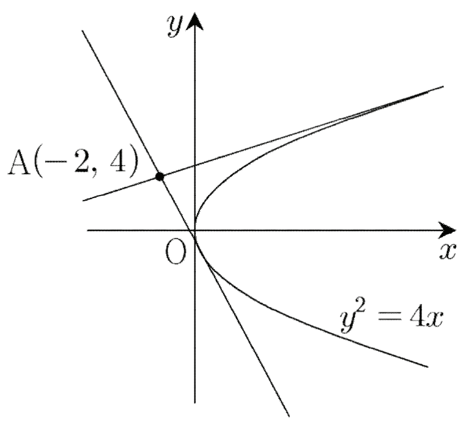


① $\frac{\sqrt{10}}{10}$　② $\frac{\sqrt{10}}{15}$　③ $\frac{2\sqrt{10}}{15}$
④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$　⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

M016

○○ (2010사관(1차)-이과3)

점 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$에서 포물선 $y^2=4x$에 그은 두 접선의 기울기의 곱은? [2점]



① $-\frac{1}{4}$　② $-\frac{3}{8}$　③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{5}{8}$　⑤ $-\frac{3}{4}$

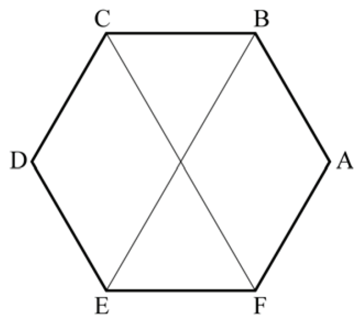
M017

○○○ (2011(10)고3-가형16)

한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF와 쌍곡선 H가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 쌍곡선 H의 초점은 점 A와 점 D이다. (나) 쌍곡선 H의 점근선은 직선 BE와 직선 CF이다.

쌍곡선 H와 변 AB가 만나는 점을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{DP}}-\overline{\mathrm{AP}}$의 값은? [3점]



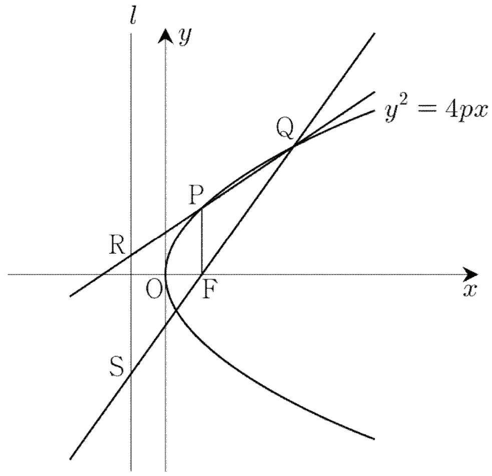
① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$　⑤ 2

M018

○○ (2011사관(1차)-이과9)

좌표평면에서 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$의 초점을 F, 준선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선과 포물선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 또, 제1사분면에 있는 포물선 위의 점 Q에 대하여 두 직선 QP, QF가 준선 l과 만나는 점을 각각 R, S라 하자.

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{QF}}=2:5$일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{FS}}}$의 값은? [3점]



① $\dfrac{5}{3}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{4}{3}$
④ $\dfrac{5}{4}$ ⑤ $\dfrac{6}{5}$

M019

○○ (2011사관(1차)-이과27)

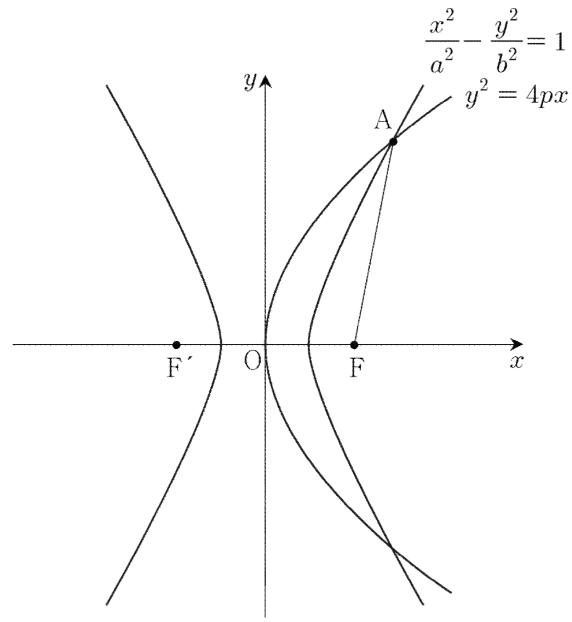
좌표평면에서 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(3,\ \dfrac{16}{5}\right)$에서의 접선을 l이라 하자. 타원의 두 초점 F, F$'$과 직선 l 사이의 거리를 각각 d, d'이라 할 때, dd'의 값을 구하시오. [3점]

M020

○○○ (2012(7)고3-가형20)

그림과 같이 F$(p,\ 0)$을 초점으로 하는 포물선 $y^2=4px$와 F$(p,\ 0)$과 F$'(-p,\ 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자.

$\overline{\mathrm{AF}}=5$, $\cos(\angle\mathrm{AFF'})=-\dfrac{1}{5}$일 때, ab의 값은? (단, a, b, p는 모두 양수이다.) [4점]



① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ 3

M021

○ (2012(10)고3-가형5)

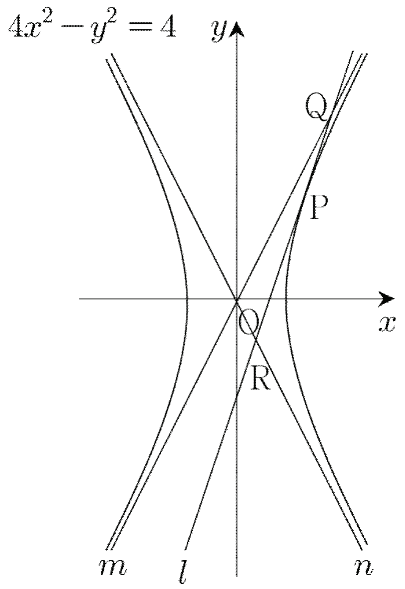
쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선이 y축과 만나는 점의 y좌표는? [3점]

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

M022

○○
(2012사관(1차)-이과10)

그림과 같이 쌍곡선 $4x^2-y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ 2)$에서의 접선을 l이라 하고, 이 쌍곡선의 두 점근선 중 기울기가 양수인 것을 m, 기울기가 음수인 것을 n이라 하자. l과 m의 교점을 Q, l과 n의 교점을 R이라 할 때, $\overline{\mathrm{QR}}=k\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족시키는 k의 값은? [3점]

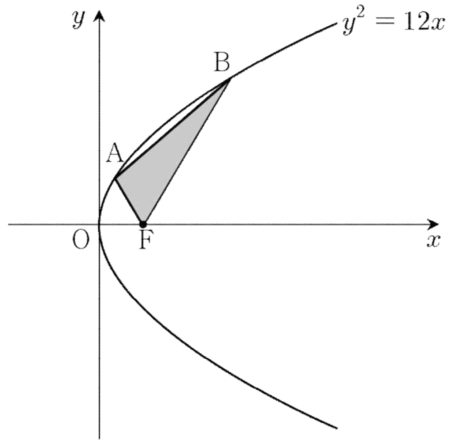


① $\sqrt{2}$　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{7}{3}$　⑤ $1+\sqrt{2}$

M023

○○○
(2012(10)고3-가형13)

그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위에 $\angle\mathrm{OFA}=\angle\mathrm{AFB}=\frac{\pi}{3}$인 두 점 A, B가 있다. 삼각형 AFB의 넓이는? (단, O는 원점이고 두 점 A, B는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]

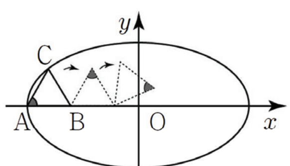


① $8\sqrt{3}$　② $10\sqrt{3}$　③ $12\sqrt{3}$
④ $14\sqrt{3}$　⑤ $16\sqrt{3}$

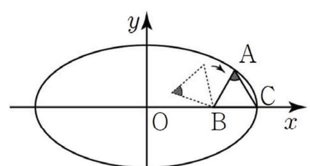
M024

○○
(2013(7)고3-B형28)

[그림1]과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC가 있다. 변 AB는 x축 위에 있고 꼭짓점 A, C는 타원 위에 있다. 한 변이 x축 위에 놓이도록 정삼각형 ABC를 x축을 따라 양의 방향으로 미끄러짐 없이 회전시킨다. 처음 위치에서 출발한 후 변 BC가 두 번째로 x축 위에 놓이고 꼭짓점 C는 타원 위에 놓일 때가 [그림2]이다. a^2+3b^2의 값을 구하시오. [4점]



[그림 1]



[그림 2]

M025

○○
(2013사관(1차)-이과11)

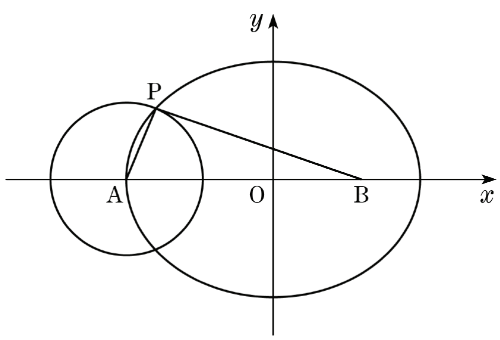
포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 A, B라 하자.
$\overline{AF}:\overline{BF}=3:1$일 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① $\frac{26}{3}$ ② $\frac{28}{3}$ ③ 10
④ $\frac{32}{3}$ ⑤ $\frac{34}{3}$

M026

○○○
(2013(10)고3-B형27)

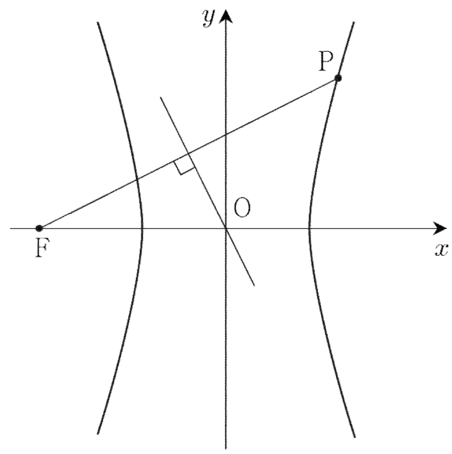
그림과 같이 점 $\mathrm{A}(-5,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원과 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 한 교점을 P라 하자. 점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}=10$일 때, $10r$의 값을 구하시오. [4점]



M027

○○○
(2013(10)고3-B형16변형)

한 초점이 F인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 PF의 수직이등분선은 원점을 지난다. $\overline{PF}=12$이고, 원점과 직선 PF 사이의 거리가 3일 때, ab의 값은? (단, $a>0$, $b>0$이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]

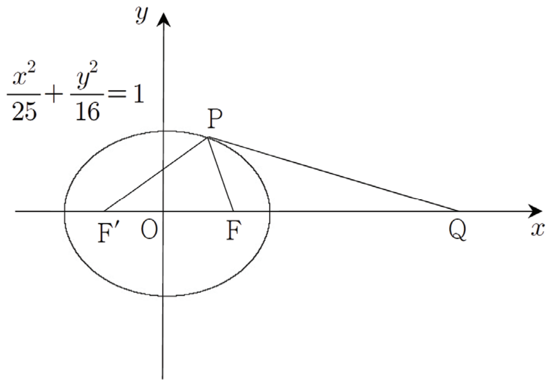


① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

M028

○○○
(2014사관(1차)-B형25)

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하자. 타원 위의 한 점 P와 x축 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF}}:\overline{\mathrm{QF'}}=2:3$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 값을 구하시오. (단, 점 Q는 타원 외부의 점이다.) [3점]

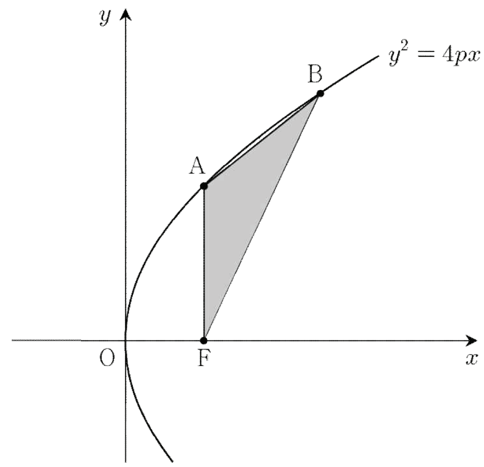


M029

○○
(2014(7)고3-B형18변형)

초점이 F인 포물선 $y^2=4px(p>0)$ 위의 두 점 A, B에 대하여 다음의 두 조건이 성립한다.

(가) 점 A를 중심으로 하는 원이 점 F에서 x축에 접한다.
(나) $\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=4:7$



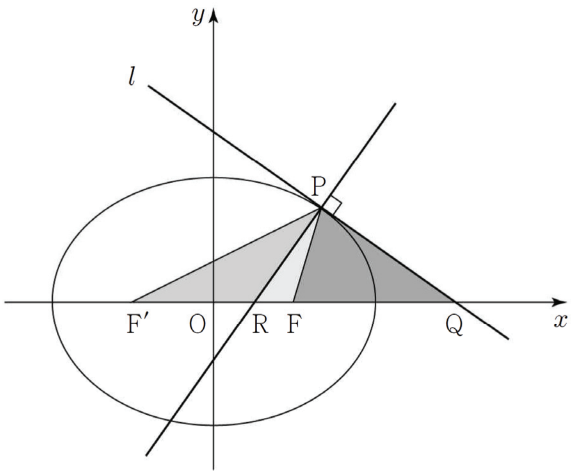
삼각형 AFB의 넓이가 24일 때, p의 값은? (단, 두 점 A, B는 제1사분면 위에 있다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

M030

○○○
(2014(7)고3-B형20)

그림과 같이 두 초점이 F, F′인 타원 $3x^2+4y^2=12$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 P에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 접선 l과 수직인 직선을 그어 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 세 삼각형 PRF, PF′R, PFQ의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? [4점]



① $\frac{13}{12}$　② $\frac{7}{6}$　③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{17}{12}$

M031

○○○
(2014(10)고3-B형18)

중심이 $(0,\ 3)$이고 반지름의 길이가 5인 원이 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자.

이 원과 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$이 만나는 점 중 한 점을 P라 할 때, $\overline{AP}\times\overline{BP}$의 값은? [4점]

① $\frac{41}{4}$　② $\frac{21}{2}$　③ $\frac{43}{4}$

④ 11　⑤ $\frac{45}{4}$

M032

○○
(2014(10)고3-B형25)

자연수 n에 대하여 점 $(-n,\ 0)$을 지나고 제1사분면에서 포물선 $y^2=4x$에 접하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2$의 값을 구하시오. [3점]

M033

○○○
(2015사관(1차)-B형12)

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원이 있다. 초점이 B이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이 타원과 만나는 한 점을 P라 할 때, 선분 PB의 길이는? [3점]

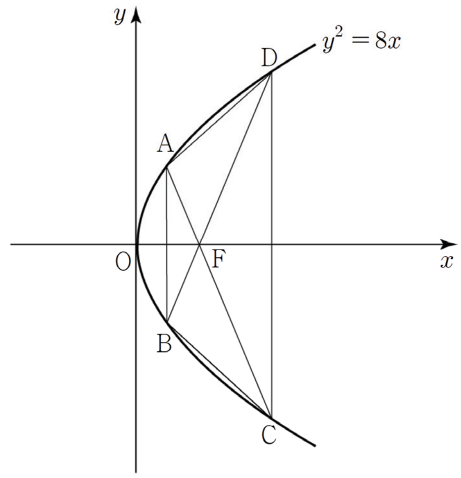
① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{23}{7}$ ③ $\frac{24}{7}$

④ $\frac{25}{7}$ ⑤ $\frac{26}{7}$

M034

○○○
(2015(7)고3-B형17)

그림과 같이 포물선 $y^2=8x$ 위의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD에 대하여 두 선분 AB와 CD가 각각 y축과 평행하다. 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 포물선의 초점 F와 일치하고 $\overline{\mathrm{DF}}=6$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $14\sqrt{2}$ ② $15\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$

④ $17\sqrt{2}$ ⑤ $18\sqrt{2}$

M035

○○
(2015(7)고3-B형9)

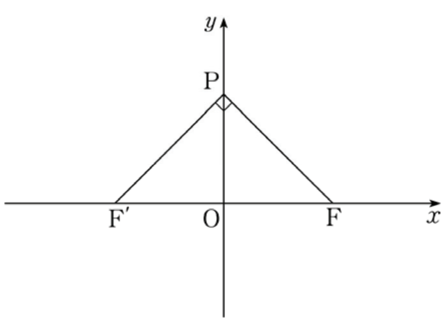
원 $x^2+y^2=8$과 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 서로 다른 네 점에서 만나고 이 네 점은 원의 둘레를 4등분한다. 이 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

M036

○○○
(2015(10)고3-B형14)

그림과 같이 좌표평면에 x축 위의 두 점 F, F′과 점 P $(0, n)(n>0)$이 있다. 그리고 삼각형 PF′F는 $\angle \mathrm{FPF'}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.



두 점 F, F′을 초점으로 하고 점 P를 지나는 타원과 직선 PF′이 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 FPQ의 둘레의 길이가 $12\sqrt{2}$일 때, 삼각형 FPQ의 넓이는? [4점]

① 11　② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

M037

○○
(2015(10)고3-B형25)

좌표평면에서 포물선 $y^2=16x$에 접하는 기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오. [3점]

M038

○○○
(2016(4)고3-가형21)

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-2\le x\le 0) \\ -x+2 & (0<x\le 2) \end{cases}$$

이다.
좌표평면에서 $k>1$인 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(k)$라 하자. 함수 $g(k)$가 불연속이 되는 모든 k의 값들의 제곱의 합은? [4점]

① 6　② $\dfrac{25}{4}$　③ $\dfrac{13}{2}$
④ $\dfrac{27}{4}$　⑤ 7

M039

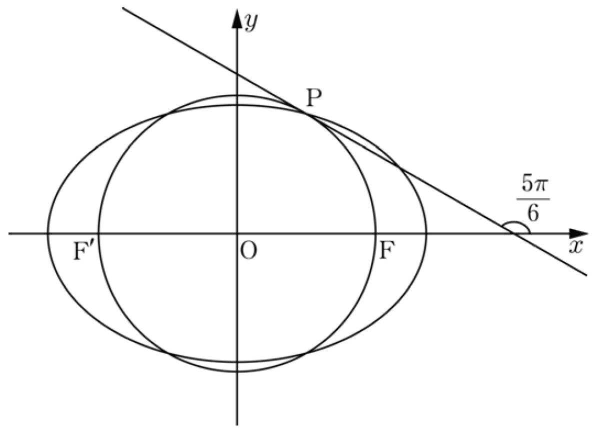
○○○
(2016(7)고3-가형28)

두 양수 m, p에 대하여 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=m(x-4)$가 만나는 두 점 중 제1사분면 위의 점을 A, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 B, 직선 $y=m(x-4)$와 y축이 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심이 포물선의 초점 F와 일치할 때, $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}$의 값을 구하시오. [4점]

M040

○○○
(2016(10)고3-가형20)

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 F$(6,\ 0)$, F$'(-6,\ 0)$에 대하여 선분 F$'$F를 지름으로 하는 원이 있다. 타원과 원의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 원 위의 점 P에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{5\pi}{6}$일 때, 타원의 장축의 길이는? (단, a, b는 $0<\sqrt{2}b<a$인 상수이다.) [4점]



① $5+6\sqrt{3}$ ② $6+6\sqrt{3}$ ③ $7+6\sqrt{3}$
④ $6+7\sqrt{3}$ ⑤ $7+7\sqrt{3}$

M041

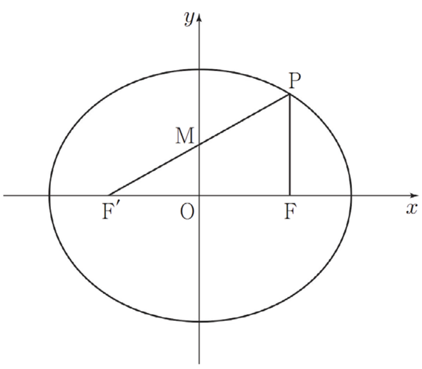
○○
(2016(4)고3-가형24)

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 $(5,\ 3)$을 지나고 두 점근선의 방정식이 $y=x$, $y=-x$이다. 이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

M042

○○○
(2016(4)고3-가형17)

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F$'$이라 하자. 타원 위의 점 P에 대하여 선분 PF$'$의 중점 M의 좌표가 $(0,\ 1)$이고 $\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{PF}}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]



① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

M043

○○
(2017(4)고3-가형19)

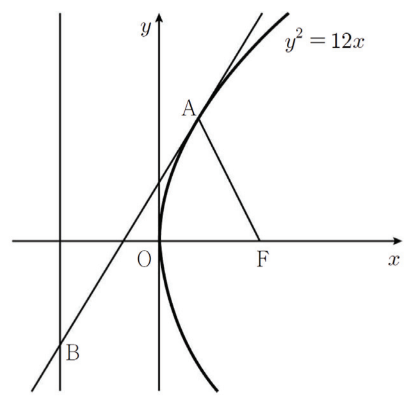
좌표평면에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$이고 한 초점이 $\mathrm{F}(4\sqrt{3},\ 0)$이다. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

M044

○○○
(2017(7)고3-가형28)

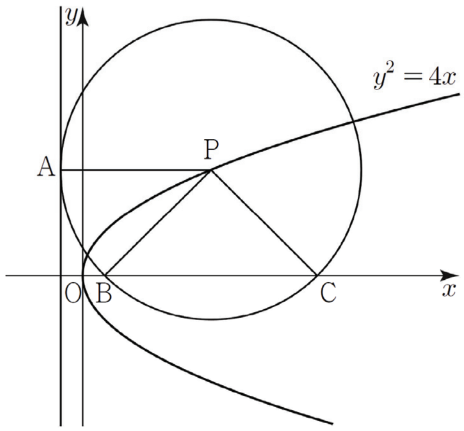
그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$가 있다. 포물선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선과 포물선의 준선이 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AF}}$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AF}}$의 값을 구하시오. [4점]



M045

(2017사관(1차)-가형10)

그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점 P를 중심으로 하고 준선과 점 A에서 접하는 원이 x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 부채꼴 PBC의 넓이가 부채꼴 PAB의 넓이의 2배일 때, 원의 반지름의 길이는? (단, 점 P의 x좌표는 1보다 크고, 점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.) [3점]



① $2+2\sqrt{3}$ ② $3+2\sqrt{2}$ ③ $3+2\sqrt{3}$
④ $4+2\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{3}$

M046

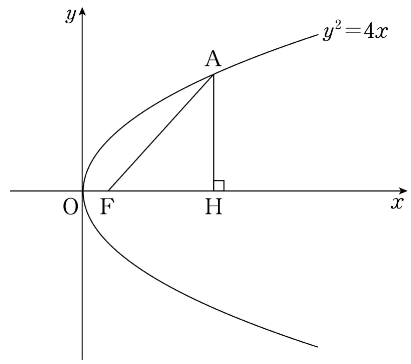
(2017(4)고3-가형25)

좌표평면에서 점 $(2,\ 0)$을 지나고 기울기가 양수인 직선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이가 17일 때, 두 점 P, Q의 x좌표의 합을 구하시오. [3점]

M047

(2017(10)고3-가형8)

그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 포물선 $y^2=4x$의 초점 F에 대하여 $\overline{\mathrm{AF}}=5$일 때, 삼각형 AFH의 넓이는? [3점]



① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

M048

(2018(10)고3-가형10)

직선 $y=mx$가 두 쌍곡선 $x^2-y^2=1$, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{64}=-1$ 중 어느 것과도 만나지 않도록 하는 정수 m의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

M049

○○○ (2018사관(1차)-가형24)

좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$이라 하자. 이 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F'을 중심으로 하고 점 P를 지나는 원과 직선 PF'이 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 점 F를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원과 직선 PF가 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 삼각형 PQR의 둘레의 길이를 구하시오. [3점]

M050

○○ (2018(4)고3-가형12)

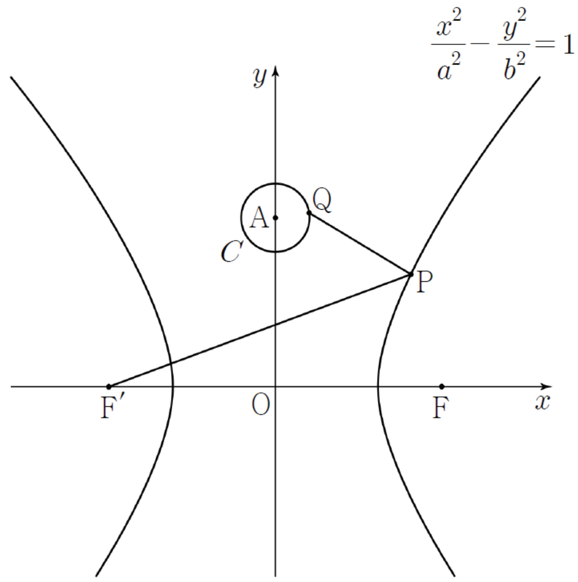
좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$을 초점으로 하고 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나는 타원 C가 있다. 두 점 A, F'을 지나는 직선이 타원 C와 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 B라 하자. 삼각형 ABF의 둘레의 길이가 16일 때, 선분 FF'의 길이는? [3점]

① 6　② $4\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{15}$
④ $6\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{21}$

M051

○○○ (2018(4)고3-가형28)

그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)(c>0)$이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위를 움직이는 점 P와 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}'}$의 최솟값이 12일 때, a^2+3b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

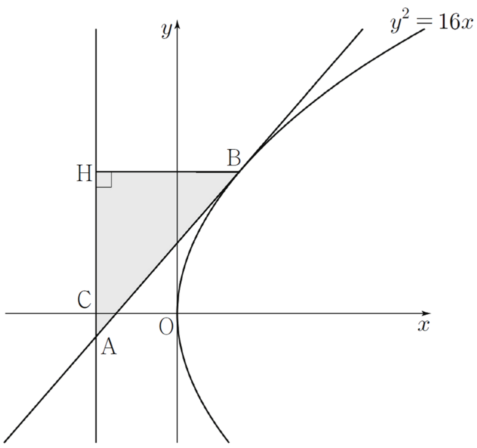


M052

○○○
(2018(4)고3-가형18)

그림과 같이 포물선 $y^2=16x$에 대하여 포물선의 준선 위의 한 점 A가 제3사분면에 있다. 점 A에서 포물선에 그은 기울기가 양수인 접선과 포물선이 만나는 점을 B, 점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H, 준선과 x축이 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{AC}\times\overline{CH}=8$일 때, 삼각형 ABH의 넓이는? [4점]



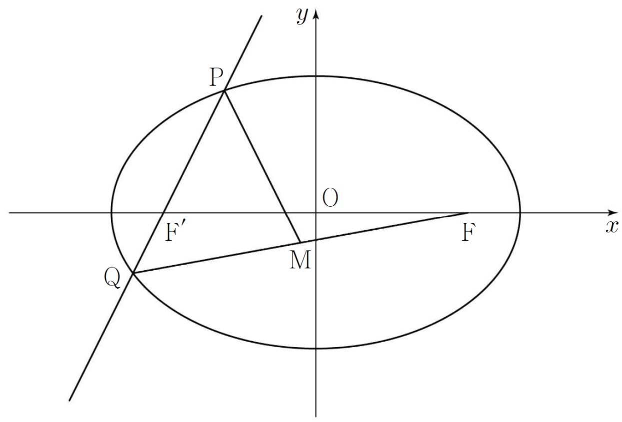
① $15\sqrt{3}$ ② $\dfrac{46}{3}\sqrt{3}$ ③ $\dfrac{47}{3}\sqrt{3}$

④ $16\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{49}{3}\sqrt{3}$

M053

○○○
(2018(7)고3-가형28)

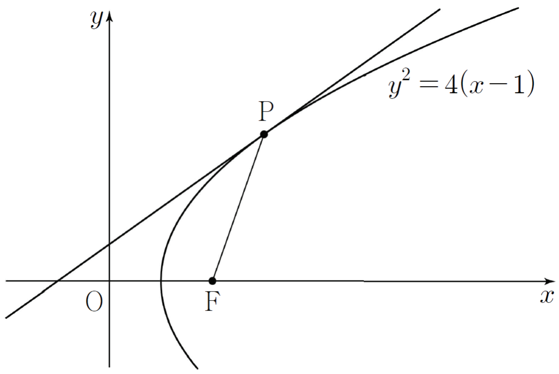
그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\,(c>0)$이라 하고 점 F′을 지나는 직선이 타원과 만나는 두 점을 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=6$이고 선분 FQ의 중점 M에 대하여 $\overline{FM}=\overline{PM}=5$일 때, 이 타원의 단축의 길이를 구하시오. [4점]



M054

○○
(2018(7)고3-가형12)

포물선 $y^2=4(x-1)$ 위의 점 P는 제1사분면 위의 점이고 초점 F에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=3$이다. 포물선 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? [3점]



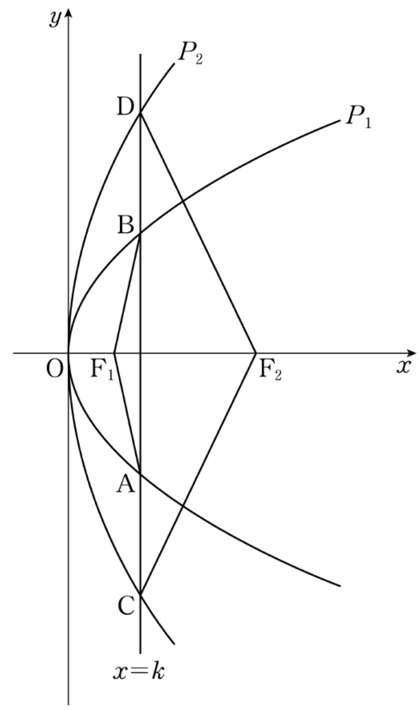
① $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

M055

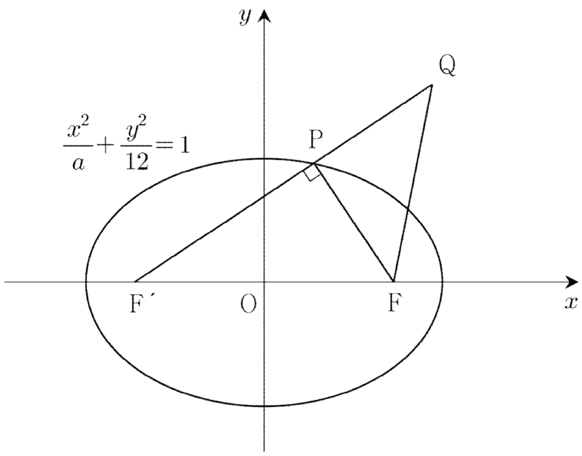
○○○
(2018(10)고3-가형27)

그림과 같이 원점을 꼭짓점으로 하고 초점이 $\mathrm{F_1}(1,\ 0)$, $\mathrm{F_2}(4,\ 0)$인 두 포물선을 각각 P_1, P_2라 하자. 직선 $x=k$ $(1<k<4)$가 포물선 P_1과 만나는 두 점을 A, B라 하고, 포물선 P_2와 만나는 두 점을 C, D라 하자. 삼각형 $\mathrm{F_1AB}$의 둘레의 길이를 l_1, 삼각형 $\mathrm{F_2DC}$의 둘레의 길이를 l_2라 하자. $l_2-l_1=11$일 때, $32k$의 값을 구하시오. [4점]



M056
○○○ (2019사관(1차)-가형15)

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하자. 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{12}=1$ 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 F′P의 연장선 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{F'Q}}=10$이 되도록 잡는다. 삼각형 PFQ가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 QF′F의 넓이는? (단, $a>12$) [4점]



① 15　② $\frac{35}{2}$　③ 20　④ $\frac{45}{2}$　⑤ 25

M057
○○ (2019(4)고3-가형26)

좌표평면에서 점 P$(-2,\ k)$와 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF}}=10$일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [4점]

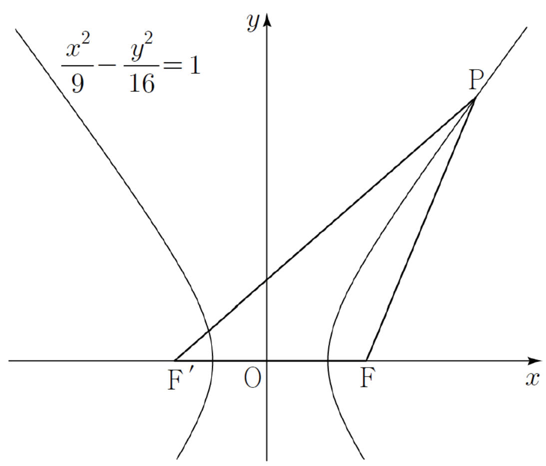
M058
○○○ (2019(4)고3-가형15)

좌표평면 위에 두 점 A$(-4,\ 0)$, B$(4,\ 0)$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$이 있다. 쌍곡선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$일 때, 원점을 중심으로 하고 직선 AP에 접하는 원의 반지름의 길이는? [4점]

① $\sqrt{7}-2$　② $\sqrt{7}-1$　③ $2\sqrt{2}-1$　④ $\sqrt{7}$　⑤ $2\sqrt{2}$

M059
●●● (2019(7)고3-가형28)

그림과 같이 두 점 F, F′을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 삼각형 PF′F에 내접하는 원의 반지름의 길이가 3일 때, 이 원의 중심을 Q라 하자. 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}^2$의 값을 구하시오. (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [4점]

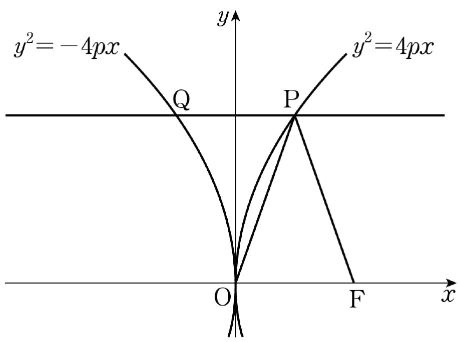


M060

○○

(2019(10)고3-가형11)

그림과 같이 점 F가 초점인 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 P를 지나고 y축에 수직인 직선이 포물선 $y^2=-4px$와 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PF}}$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=6$일 때, 선분 PF의 길이는? (단, O는 원점이고, p는 양수이다.) [3점]



① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

M061

○○

(2019(10)고3-가형25)

점 A$(6,\ 4)$에서 타원 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [3점]

M062

○○

(2020사관(1차)-가형13)

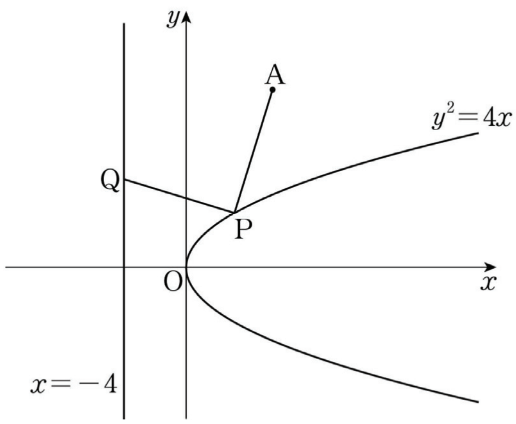
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 중심으로 하는 원 C가 있다. 점 $(3,\ 0)$을 지나고 원 C에 접하는 두 직선이 각각 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$과 한 점에서만 만날 때, 원 C의 반지름의 길이는? [3점]

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

M063

○○○
(2021(3)고3-기하27)

점 $A(6,\ 12)$와 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P,
직선 $x=-4$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}$의 최솟값은?
[3점]



① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

M064

○○○
(2021(3)고3-기하28)

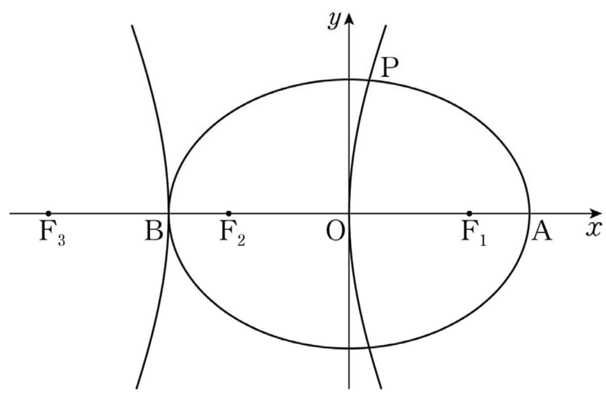
자연수 n에 대하여 초점이 F인 포물선 $y^2=2x$ 위의 점 P_n이 $\overline{FP_n}=2n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{8}\overline{OP_n}^2$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 P_n은 제1사분면 위에 있다.) [4점]

① 874 ② 876 ③ 878
④ 880 ⑤ 882

M065

○○○
(2021(3)고3-기하29)

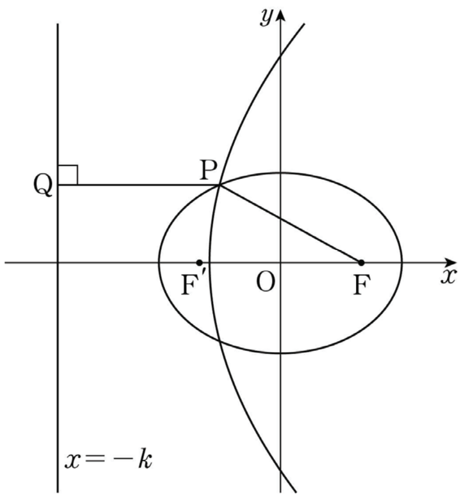
두 초점이 $F_1(c,\ 0)$, $F_2(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원이 x축과 두 점 $A(3,\ 0)$, $B(-3,\ 0)$에서 만난다. 선분 BO가 주축이고 점 F_1이 한 초점인 쌍곡선의 초점 중 F_1이 아닌 점을 F_3이라 하자. 쌍곡선이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF_3F_2의 둘레의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



M066

●●● (2021(3)고3-기하30)

그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F가 초점이고 직선 $x=-k$ $(k>0)$이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 $x=-k$에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.



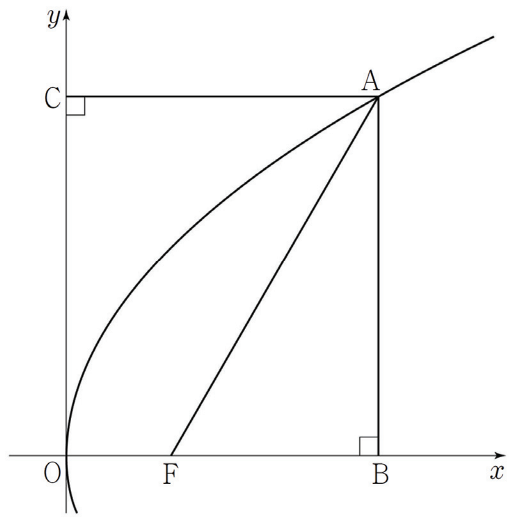
(가) $\cos(\angle \mathrm{F}'\mathrm{FP})=\dfrac{7}{8}$
(나) $\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}=\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{FF}'}$

$c+k$의 값을 구하시오. [4점]

M067

○○○ (2021(4)고3-기하26)

그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ $(p>0)$인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하자. $\overline{\mathrm{FA}}=8$이고 사각형 OFAC의 넓이와 삼각형 FBA의 넓이의 비가 $2:1$일 때, 삼각형 ACF의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면 위의 점이고, 점 A의 x좌표는 p보다 크다.) [3점]

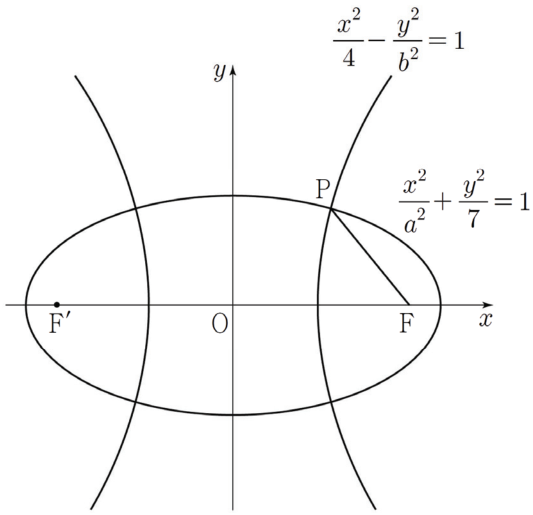


① $\dfrac{27}{2}$　② $9\sqrt{3}$　③ 18　④ $12\sqrt{3}$　⑤ 24

M068

○○○
(2021(4)고3-기하27)

그림과 같이 두 점 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{7}=1$과 두 점 F, F′를 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{PF}=3$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

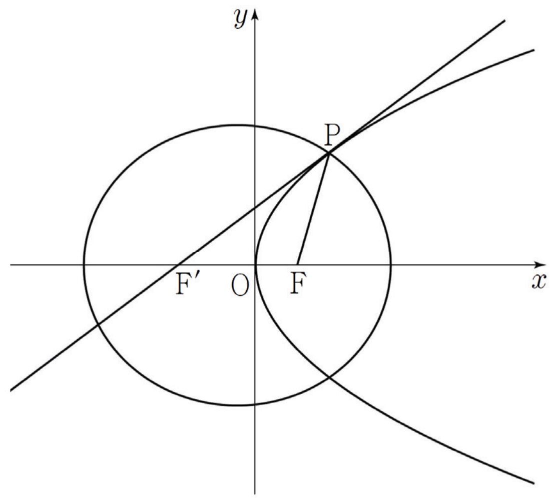


① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

M069

●●●
(2021(4)고3-기하28)

좌표평면에서 두 점 $F\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 타원과 포물선 $y^2=9x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. $\overline{PF}=\frac{25}{4}$이고 포물선 $y^2=9x$ 위의 점 P에서의 접선이 점 F′를 지날 때, 타원의 단축의 길이는? [4점]



① 13 ② $\frac{27}{2}$ ③ 14
④ $\frac{29}{2}$ ⑤ 15

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

M 이차곡선

1	⑤	2	32	3	22	4	④	5	⑤
6	①	7	②	8	18	9	14	10	⑤
11	128	12	③	13	④	14	④	15	①
16	③	17	⑤	18	②	19	16	20	②
21	①	22	③	23	③	24	50	25	④
26	26	27	②	28	192	29	④	30	④
31	⑤	32	55	33	④	34	⑤	35	③
36	②	37	64	38	⑤	39	14	40	②
41	8	42	②	43	①	44	32	45	④
46	13	47	①	48	④	49	36	50	③
51	54	52	⑤	53	8	54	③	55	50
56	③	57	8	58	②	59	18	60	9
61	18	62	②	63	③	64	⑤	65	12
66	15	67	④	68	⑤	69	⑤	70	63
71	③	72	66	73	②	74	32		

N 평면 벡터

1	③	2	①	3	①	4	③	5	⑤
6	②	7	⑤	8	⑤	9	④	10	②
11	④	12	①	13	②	14	③	15	80
16	②	17	120	18	①	19	180	20	②
21	27	22	40	23	486	24	④	25	37
26	60	27	50	28	115	29	108	30	④
31	37	32	④	33	①				

P 공간도형과 공간좌표

1	④	2	②	3	②	4	③	5	60
6	③	7	②	8	②	9	⑤	10	45
11	7	12	⑤	13	②	14	③	15	②
16	③	17	8	18	⑤	19	④	20	⑤
21	④	22	20	23	13	24	350	25	14
26	16	27	⑤	28	15	29	①	30	①
31	③	32	③	33	③	34	60	35	④
36	47	37	⑤	38	④	39	④	40	28
41	④	42	④	43	③	44	②	45	450
46	⑤	47	25	48	②	49	①	50	⑤
51	⑤	52	7						

해설 목차

기하

M 이차곡선

1	⑤	2	32	3	22	4	④	5	⑤
6	①	7	②	8	18	9	14	10	⑤
11	128	12	③	13	④	14	④	15	①
16	③	17	⑤	18	②	19	16	20	②
21	①	22	③	23	③	24	50	25	④
26	26	27	②	28	192	29	④	30	④
31	⑤	32	55	33	④	34	⑤	35	③
36	②	37	64	38	⑤	39	14	40	②
41	8	42	②	43	①	44	32	45	④
46	13	47	①	48	④	49	36	50	③
51	54	52	⑤	53	8	54	③	55	50
56	③	57	8	58	②	59	18	60	9
61	18	62	②	63	③	64	⑤	65	12
66	15	67	④	68	⑤	69	⑤	70	63
71	③	72	66	73	②	74	32		

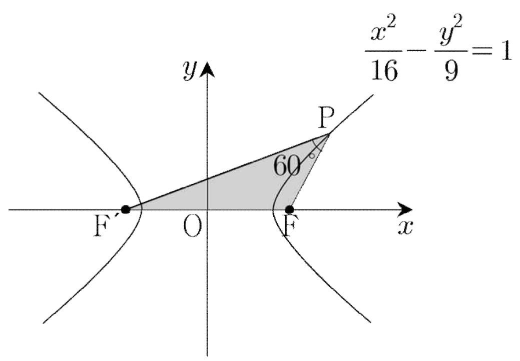
M001 | 답 ⑤

[풀이]

$16+9=5^2$이므로

$\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$, 즉 $\overline{\mathrm{FF}'}=10$

$\overline{\mathrm{PF}}=p$, $\overline{\mathrm{PF}'}=q$라고 하자.



코사인법칙에 의하여

$10^2=p^2+q^2-2pq\cos 60^\circ$, 즉

$p^2+q^2=100+pq$

쌍곡선의 정의에 의하여

$q-p=8$

곱셈공식에 의하여

$(q-p)^2=p^2+q^2-2pq$

즉, $8^2=100+pq-2pq$, $pq=36$

$\therefore$ ($\triangle\mathrm{PFF}'$의 넓이)$=\dfrac{1}{2}pq\sin 60^\circ$

$=9\sqrt{3}$

답 ⑤

M002 | 답 32

[풀이]

타원의 방정식에서

$a^2=c^2+16$ $\cdots$㉠

점 A의 좌표는 $\mathrm{A}\left(c,\ 4\sqrt{1-\dfrac{c^2}{a^2}}\right)$이고,

두 점 A, B는 x축에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=8\sqrt{1-\dfrac{c^2}{a^2}}=\dfrac{32}{a}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore$ (□ADBC의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{32}{a}\times 2a$

$=32$

답 32

M003 | 답 22

[풀이]

문제에서 주어진 원과 쌍곡선은 모두 y축에 대하여 대칭이고 점 P는 y축 위에 있으므로 두 직선 AB, CD도 y축에 대하여 대칭이다.

$\sqrt{9+16}=5$이므로 점 $\mathrm{F}(5,\ 0)$는 문제에서 주어진 쌍곡선의 두 초점 중에서 하나이다. 나머지 하나를 F'라고 하면

$\mathrm{F}'(-5,\ 0)$

이고, 직선 CD가 x축과 만나서 생기는 점이다.

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{CF}}-\overline{\mathrm{CF}'}=6$, $\overline{\mathrm{DF}}-\overline{\mathrm{DF}'}=6$

두 식을 변변히 더하면

$\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{DF}}-(\overline{\mathrm{CF}'}+\overline{\mathrm{DF}'})=12$

그런데 $\overline{\mathrm{CF}'}+\overline{\mathrm{DF}'}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AB}}=10$이므로

$\therefore$ $\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{DF}}=22$

답 22

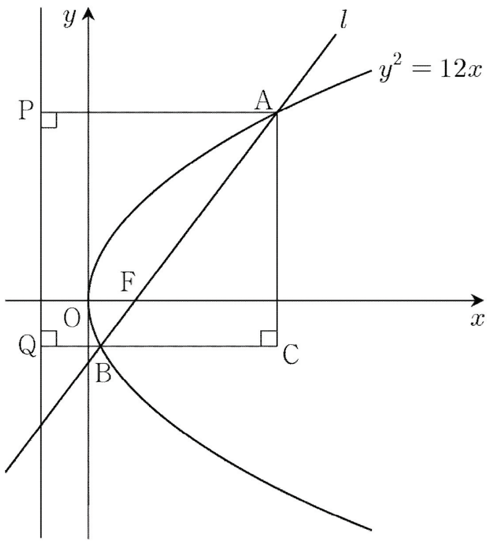
M004 | 답 ④

[풀이1] ★

$y^2=4\times 3\times x$이므로 이 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식은 각각

$\mathrm{F}(3,\ 0)$, $x=-3$

두 점 A, B에서 직선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, 점 A에서 직선 QB에 내린 수선의 발을 C라고 하자.



양수 k에 대하여 $\overline{\mathrm{BF}}=k$로 두면

$\overline{\mathrm{AF}}=4k$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=5k$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AF}}=4k$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BF}}=k$

이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{QB}}=3k$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}=4k$

이므로

(직선 l의 기울기)$=\dfrac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{4k}{3k}=\dfrac{4}{3}$

직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{4}{3}(x-3)$ 정리하면 $4x-3y=12$

$a=4$, $b=-3$

$\therefore\ a-b=7$

답 ④

[풀이2]

$y^2=4\times3\times x$이므로 이 포물선의 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(3,\ 0)$

양수 k에 대하여 $\overline{\mathrm{BF}}=k$로 두면 $\overline{\mathrm{AF}}=4k$이므로

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4k}+\dfrac{1}{k}$ 풀면 $k=\dfrac{15}{4}$ 즉, $\overline{\mathrm{AF}}=15$

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(t,\ 2\sqrt{3t})$로 두자. (단, $t>0$)

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{(t-3)^2+(2\sqrt{3t})^2}=15$

양변을 제곱하여 정리하면

$t^2+6t-12\times18=0$, $(t-12)(t+18)=0$

풀면 $t=12$ 즉, $\mathrm{A}(12,\ 12)$

(직선 l의 기울기)=(직선 AF의 기울기)$=\dfrac{12-0}{12-3}=\dfrac{4}{3}$

직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{4}{3}(x-3)$ 정리하면 $4x-3y=12$

$a=4$, $b=-3$

$\therefore\ a-b=7$

답 ④

[풀이3] (교육과정 외)

공식

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

$\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{2\times3}{1-\cos\theta}$, $\overline{\mathrm{BF}}=\dfrac{2\times3}{1-\cos(\pi+\theta)}$

이므로

$\dfrac{6}{1-\cos\theta}:\dfrac{6}{1+\cos\theta}=4:1$, 즉 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

(직선 l의 기울기)$=-\dfrac{a}{b}=\tan\theta=\dfrac{4}{3}$ $\cdots$㉠

직선 l은 점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$을 지나므로

$3a=12$, $a=4$, $b=-3$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ a-b=7$

답 ④

M005 | 답 ⑤

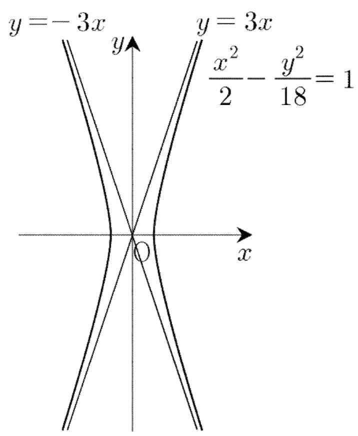
[풀이] ★

우선 문제에서 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하자.

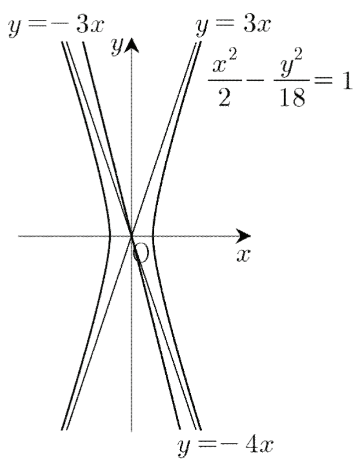
$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{18}=0$

정리하면

$y=3x$ 또는 $y=-3x$

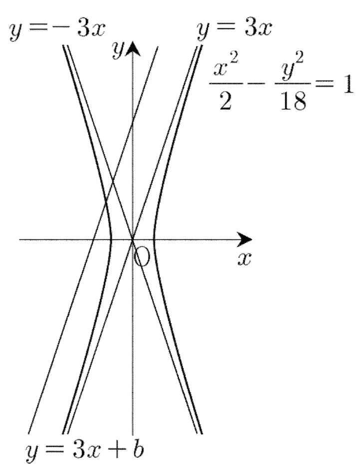


▸ ㄱ. (참)



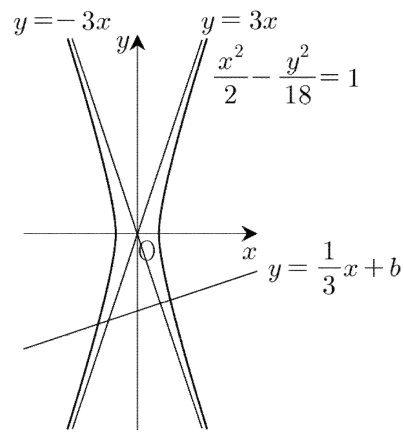
문제에서 주어진 쌍곡선과 직선 $y=-4x$는 만나지 않는다.

▸ ㄴ. (참)



문제에서 주어진 쌍곡선과 직선 $y=3x+b(b>0)$은 오직 한 점에서만 만난다.

▸ ㄷ. (참)



문제에서 주어진 쌍곡선과 직선 $y=\frac{1}{3}x+b(b<0)$은 서로 다른 두 점에서 만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

M006 | 답 ①

[풀이]

쌍곡선의 점근선의 방정식은

$y=\pm x$

접선의 방정식은

$ax-by=1$

이 직선의 방정식에 $y=0$을 대입하면 $x=\frac{1}{a}$이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{a},\ 0\right)$

접선과 기울기가 양수인 쌍곡선의 점근선의 방정식을 연립하면

$ax-bx=1$에서 $x=\frac{1}{a-b}$

$\mathrm{B}\left(\frac{1}{a-b},\ \frac{1}{a-b}\right)$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S(a)=\frac{1}{2a(a-b)}=\frac{1}{2a\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)}$$

($\because$ 점 P는 쌍곡선 위의 점이므로 $a^2-b^2=1$)

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

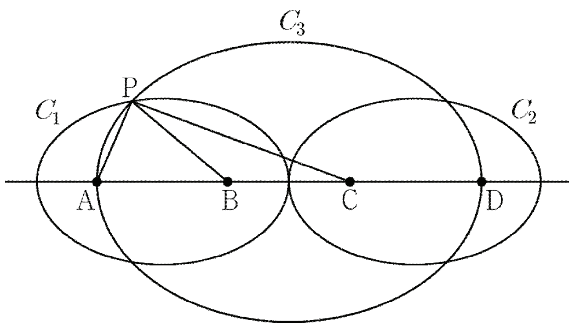
$$\lim_{a\to\infty}S(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2a}=\frac{1+1}{2}=1$$

답 ①

M007 | 답 ②

[풀이]



타원 C_3의 장축의 길이는

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 8+6+8=22$

타원의 정의에 의하여

$\overline{BP} + \overline{CP} = 22$ … ㉠

타원 C_1의 장축의 길이는

$\overline{AB} + \overline{BC} = 14$

타원의 정의에 의하여

$\overline{AP} + \overline{BP} = 14$ … ㉡

㉠−㉡: $\overline{CP} - \overline{AP} = 8$

답 ②

M008 | 답 18

[풀이]

문제에서 주어진 쌍곡선의 x절편은 -2, 2이므로

쌍곡선의 주축의 길이는 4이다.

두 초점 F, F′의 좌표는

$F(\sqrt{4+5},\ 0)$, $F'(-\sqrt{4+5},\ 0)$

즉, $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 4$ … ㉠

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{PF'} : \overline{PF} = \overline{F'A} : \overline{FA} = 2:1$

즉, $\overline{PF'} = 2\overline{PF}$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\overline{PF} = 4$, $\overline{PF'} = 8$

따라서 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$8+4+6=18$

답 18

M009 | 답 14

[풀이]

문제에서 주어진 원의 반지름의 길이를 r이라고 하자.

타원의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $a>0$, $b>0$)

으로 두자.

$a = 10-r$, $b = 6-r$ … ㉠

타원의 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{10}$이므로

두 초점의 좌표는 각각 $(2\sqrt{10},\ 0)$, $(-2\sqrt{10},\ 0)$이다.

$a^2 = b^2 + (2\sqrt{10})^2$

㉠을 대입하면

$(10-r)^2 = (6-r)^2 + (2\sqrt{10})^2$

풀면

$r = 3$

타원의 장축의 길이는

$\therefore\ 2a = 14$

답 14

M010 | 답 ⑤

[풀이]

점 F의 좌표는

$F(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

직각삼각형 AOF에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\overline{OF}}{\overline{AO}} = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

즉, $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

양변을 제곱하여 정리하면

$\therefore\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

M011 | 답 128

[풀이]

두 포물선의 꼭짓점의 사이의 거리가 4이므로, 두 포물선의 꼭짓점의 좌표는 각각 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$이다. 두 포물선의 준선이 y축이므로, 두 포물선의 초점의 좌표는 각각 $(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$이다. 두 포물선의 방정식은

$y^2 = 4\times 2\times (x-2)$

즉, $y^2 = 8(x-2)$

$y^2 = 4\times(-2)\times(x+2)$

즉, $y^2 = -8(x+2)$

두 포물선은 원점에 대하여 대칭이므로, 접선은 원점을 지나야 한다.

포물선 $y^2 = 8(x-2)$ 위의 점 $\left(2+\frac{t^2}{8},\ t\right)$(단, $t>0$)에서의 접선의 방정식은

$$ty = 8\left(\frac{x+2+\frac{t^2}{8}}{2}-2\right)$$

이 접선이 원점을 지나므로, $x=y=0$을 대입하여 정리하면

$t=4$

접점의 좌표는 $(4,\ 4)$이다.

이 접선은 점 $(-4,\ -4)$에서 포물선 $y^2=-8(x+2)$에 접한다.

두 점 사이의 거리의 공식에 의하여

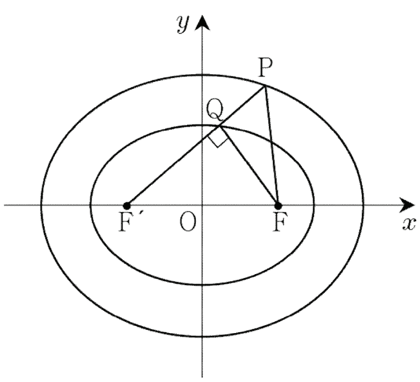
$d = 8\sqrt{2}$ 이므로

$\therefore\ d^2 = 128$

답 128

M012 | 답 ③

[풀이]



$\sqrt{100-75} = \sqrt{49-24} = 5$

이므로 문제에서 주어진 두 타원의 초점은 일치한다.

두 점 F, F′의 좌표는 각각

$\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-5,\ 0)$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF}'}=14$ 즉, $\overline{\mathrm{QF}}=6$

삼각형 QF′F에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FQ}}^2+\overline{\mathrm{QF}'}^2=\overline{\mathrm{F'F}}^2$ $(6^2+8^2=10^2)$

이므로 $\angle \mathrm{FQF}'=90^\circ$ 이다.

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=20$

그런데 $\overline{\mathrm{QF}'}=8$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}}=12$ $\cdots$ ㉠

직각삼각형 PQF에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QF}}^2$

즉, $\overline{\mathrm{PF}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2+36$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}=\frac{15}{2}$

답 ③

M013 | 답 ④

[풀이]

쌍곡선의 정의에 의하여

$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF}'}|=2a=10$ 즉, $a=5$

$y^2=4\times14(x+c)$에서 $\overline{\mathrm{AF}}=14$

$\overline{\mathrm{AF}'}:\overline{\mathrm{FF}'}=1:6$에서 $\overline{\mathrm{FF}'}=6\overline{\mathrm{AF}'}$

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AF}'}+\overline{\mathrm{F'F}}=7\overline{\mathrm{AF}'}=14$

$\overline{\mathrm{AF}'}=2$, $\overline{\mathrm{FF}'}=12$

$\overline{\mathrm{OF}}=6$이므로

$b^2=k^2-a^2=36-25=11$

포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\mathrm{A}(-c,\ 0)$이므로

$-c=-8$에서 $c=8$

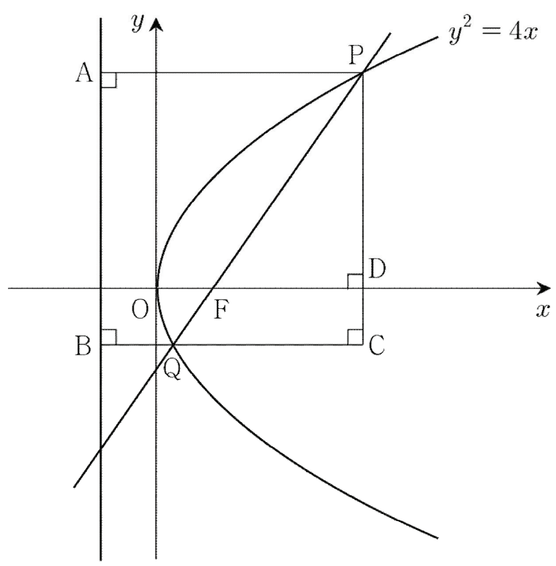
$\therefore\ \frac{c^2}{a^2-b^2}=\frac{64}{25-11}=\frac{32}{7}$

답 ④

M014 | 답 ④

[풀이]

점 P에서 직선 BQ에 내린 수선의 발을 C, 직선 PC가 x축과 만나는 점을 D라고 하자.



$y^2=4\times1\times x$이므로 이 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식은 각각

$\mathrm{F}(1,\ 0),\ x=-1$

$\overline{\mathrm{QF}}=t(t>0)$으로 두면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QB}}=t$이다.

$\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{AP}}-2\overline{\mathrm{OF}}=5-2=3,$

$\overline{\mathrm{QC}}=\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BQ}}=5-t$

서로 닮음인 두 직각삼각형 PFD, PQC에 대하여

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QC}}$ 즉, $5:3=(5+t):(5-t)$

$3(5+t)=5(5-t)$ 풀면 $t=\dfrac{5}{4}$

직각삼각형 PQC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{QC}}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{25}{4}\right)^2-\left(\dfrac{15}{4}\right)^2}=5$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{PC}}=5$이다.

(사각형 ABQP의 넓이)$=\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}}}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{125}{8}$

답 ④

[참고]

선분 QF의 길이를 다음과 같이 구해도 좋다.

$\dfrac{1}{\overline{\mathrm{OF}}}=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{PF}}}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{QF}}}$ 즉, $\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{\overline{\mathrm{QF}}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{5}{4}$

M015 | 답 ①

[풀이]

$c=\sqrt{4+6}=\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{PF}}=t$로 두자.

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}=t+4$

직각삼각형 PF′F에서 피타고라스의 정리에 의하여

$(2\sqrt{10})^2=(t+4)^2+t^2$

정리하면

$t^2+4t-12=0,\ (t-2)(t+6)=0$

풀면 $t=2$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=2,\ \overline{\mathrm{PF'}}=6$

$\therefore\ \cos(\angle\mathrm{PFF'})=\dfrac{2}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

답 ①

M016 | 답 ③

[풀이1]

기울기가 m이면서 포물선 $y^2=4px$에 접하는 접선의 방정식은

$y=mx+\dfrac{p}{m}$

이다. 위의 공식을 이용하면 접선의 방정식은

$y=mx+\dfrac{1}{m}$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$를 지나므로

$4=-2m+\dfrac{1}{m},\ 2m^2+4m-1=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 구하는 값은

$\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

답 ③

[풀이2]

접점의 좌표를 $(s,\ t)$로 두면 접선의 방정식은

$ty=4\times\dfrac{x+s}{2}$, 즉 $y=\dfrac{2}{t}x+\dfrac{2s}{t}$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$를 지나므로

$4=\dfrac{2}{t}(-2)+\dfrac{2s}{t}$, 즉 $s=2t+2$ … ㉠

그런데 점 $(s,\ t)$는 포물선 위에 있으므로

$t^2=4s$ … ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$t^2=4(2t+2),\ t^2-8t-8=0$

양변을 t^2으로 나누어 정리하면

$2\left(\frac{2}{t}\right)^2+4\times\frac{2}{t}-1=0$

이 이차방정식의 두 실근은 두 접선의 기울기이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 구하는 값은

$\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

답 ③

[참고] (교육과정 외)

접선의 방정식을 다음과 같이 유도해도 좋다.

접점의 좌표를 $(s,\ t)$로 두자.

$2y\frac{dy}{dx}=4,\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$

이므로 접선의 방정식은

$y-t=\frac{2}{t}(x-s)$, 즉 $y=\frac{2}{t}x+\frac{t^2-2s}{t}$

$\therefore\ y=\frac{2}{t}x+\frac{2s}{t}$ $(\because\ t^2=4s)$

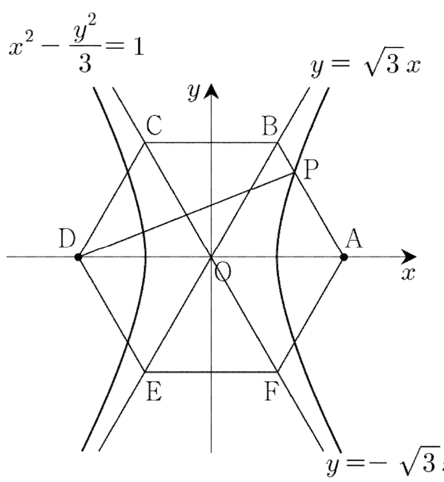
M017 | 답 ⑤

[풀이]

세 점 A, B, D의 좌표가 각각

A$(2,\ 0)$, B$(1,\ \sqrt{3})$, D$(-2,\ 0)$

이 되도록 좌표평면을 도입하자.



위의 그림처럼 쌍곡선 H의 중심은 원점이다.

두 직선 BE, CF의 기울기가 각각 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$이므로

쌍곡선 H의 두 점근선의 방정식은 각각

$y=\sqrt{3}x$, $y=-\sqrt{3}x$

이제 쌍곡선 H의 방정식을 다음과 같이 두자.

H: $\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{3k^2}=1$(단, $k>0$)

점 A$(2,\ 0)$이 쌍곡선 H의 한 초점이므로

$\sqrt{k^2+3k^2}=2$ 즉, $k=1$

쌍곡선 H의 방정식은

H: $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

쌍곡선 H는 x축 위의 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$을 지나므로,

쌍곡선 H의 주축의 길이는 2이다.

쌍곡선의 정의에 의하여

$\therefore\ \overline{\mathrm{DP}}-\overline{\mathrm{AP}}=$(쌍곡선 H의 주축의 길이)$=2$

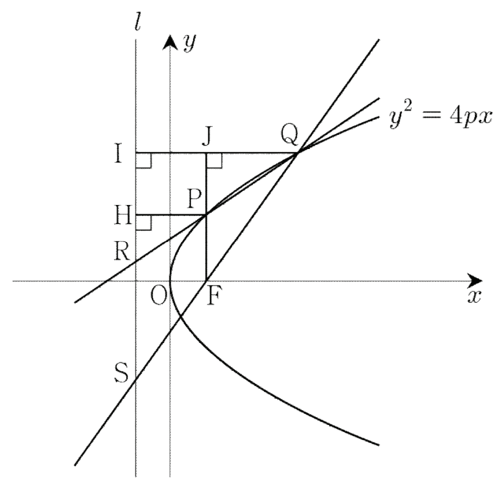
답 ⑤

M018 | 답 ②

[풀이1]

문제에서 주어진 포물선의 방정식에서 F$(p,\ 0)$이다.

두 점 P, Q에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, I, 점 P에서 선분 IQ에 내린 수선의 발을 J라고 하자.



문제에서 주어진 비례식에서

$\overline{\mathrm{PF}}=2k$, $\overline{\mathrm{QF}}=5k$ (단, $k>0$)

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{HP}}=2k$, $\overline{\mathrm{IQ}}=5k$

$\overline{\mathrm{JQ}}=\overline{\mathrm{IQ}}-\overline{\mathrm{HP}}=3k$

$\overline{\mathrm{FS}}:\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{QJ}}=2:3$

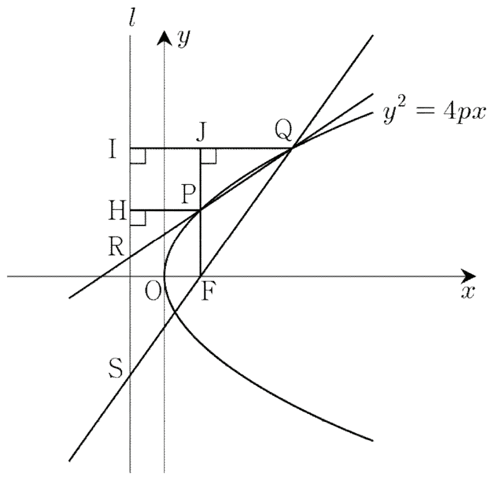
$\therefore\ \frac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{FS}}}=\frac{3}{2}$

답 ②

[풀이2]

문제에서 주어진 포물선의 방정식에서 F$(p,\ 0)$이다.

두 점 P, Q에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, I, 점 P에서 선분 IQ에 내린 수선의 발을 J라고 하자.



문제에서 주어진 비례식에서

$\overline{\mathrm{PF}}=2k$, $\overline{\mathrm{QF}}=5k$ (단, $k>0$)

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{HP}}=2k$, $\overline{\mathrm{IQ}}=5k$

그런데 $\overline{\mathrm{HP}}=2\overline{\mathrm{OF}}=2p$이므로 $k=p$이다.

즉, $\overline{\mathrm{HP}}=2p$, $\overline{\mathrm{IQ}}=5p$

$\overline{\mathrm{JQ}}=\overline{\mathrm{IQ}}-\overline{\mathrm{HP}}=3p$

직각삼각형 FQJ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{JF}}=4p$

직선 FQ의 기울기는 $\dfrac{\overline{\mathrm{JF}}}{\overline{\mathrm{QJ}}}=\dfrac{4}{3}$이다.

점 S의 좌표를 $(-p,\ r)$로 두면

$\dfrac{-r}{2p}=\dfrac{4}{3}$에서 $r=-\dfrac{8p}{3}$이므로

$\mathrm{S}\left(-p,\ -\dfrac{8p}{3}\right)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{FS}}=\sqrt{(2p)^2+\left(\dfrac{8p}{3}\right)^2}=\dfrac{10}{3}p$

$\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{FS}}}=\dfrac{5p}{\dfrac{10}{3}p}=\dfrac{3}{2}$

답 ②

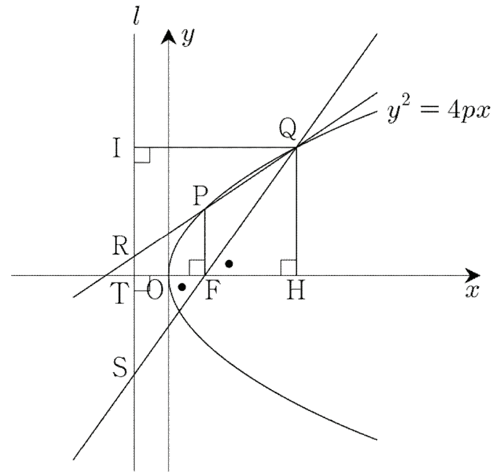
[풀이3] (교육과정 외)

공식

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.

점 Q에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H, I, 직선 l이 x축과 만나는 점을 T라고 하자. 그리고 직선 QF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.



(단, ●$=\theta$)

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2p}{1-\cos90^\circ}=2p$, $\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}(=5p)$

이므로

$2p:\dfrac{2p}{1-\cos\theta}=2:5$, $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

직각삼각형 QFH에서

$\overline{\mathrm{FH}}=3p$

이므로

$\overline{\mathrm{TF}}=\overline{\mathrm{IQ}}-\overline{\mathrm{FH}}=5p-3p=2p$

서로 닮음인 두 직각삼각형 QFH, SFT의 닮음비는 $3:2$이므로

$\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{FS}}}=\dfrac{3}{2}$

답 ②

M019 | 답 16

[풀이]

접선의 방정식은

$\dfrac{3x}{25}+\dfrac{\frac{16}{5}y}{16}=1$, 즉 l: $3x+5y=25$

$\mathrm{F}(\sqrt{25-16},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{25-16},\ 0)$

즉, $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$d=\dfrac{16}{\sqrt{34}}$, $d'=\dfrac{34}{\sqrt{34}}$

$\therefore\ dd'=16$

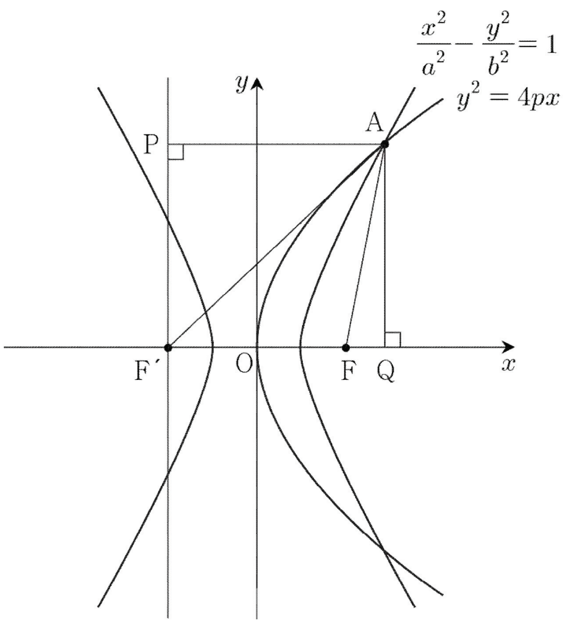
답 16

M020 | 답 ②

[풀이]

포물선 $y^2 = 4px$의 준선은 $x = -p$이다.

점 A에서 준선 $x = -p$과 x축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{AP} = \overline{AF} = 5$

$\angle AFQ = \pi - \angle AFF'$이므로

$\cos(\angle AFQ) = -\cos(\angle AFF') = \frac{1}{5}$

직각삼각형 AFQ에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{FQ} = 1$

직각삼각형 AFQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{FQ}^2} = 2\sqrt{6}$이므로 $\overline{PF'} = 2\sqrt{6}$

직각삼각형 APF′에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AF'} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{PF'}^2} = 7$

$\overline{OF} = \frac{1}{2}(\overline{PA} - \overline{FQ}) = 2$이므로 $p = 2$, $F(2,\ 0)$

쌍곡선의 정의에 의하여

$2a = \overline{AF'} - \overline{AF} = 2$ 즉, $a = 1$

$2^2 = a^2 + b^2$에서 $b = \sqrt{3}$

$\therefore\ ab = \sqrt{3}$

답 ②

[참고] (교육과정 외)

p의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

공식

$\overline{PF} = \frac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 p의 값을 구하자.

직선 AF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\cos\theta = \cos(180^\circ - \angle AFF') = -\cos(\angle AFF') = \frac{1}{5}$

이므로

$\overline{AF} = \frac{2p}{1-\cos\theta} = 5$, 즉 $\frac{2p}{1-\frac{1}{5}} = 5$

$\therefore\ p = 2$

M021 | 답 ①

[풀이]

접선의 방정식은

$2x - y = 1$

이 직선의 y절편은 -1이다.

답 ①

[참고] (교육과정 외)

접선의 방정식은 다음과 같이 구하면 된다.

음함수의 미분법에 의하여

$2x - \frac{2}{3}yy' = 0$, $y' = \frac{3x}{y}$

접선의 기울기는 $y' = \frac{3 \times 2}{3} = 2$이므로

접선의 방정식은

$y = 2(x-2) + 3 = 2x - 1$

M022 | 답 ③

[풀이]

접선 l의 방정식은

l: $4\sqrt{2}x - 2y = 4$ ($\because 4x_1x - y_1y = 4$)

두 점근선의 방정식은

$4x^2 - y^2 = 0$에서 $y = \pm 2x$

이때, m: $y = 2x$, n: $y = -2x$

두 직선 l, m의 방정식을 연립하면

$4\sqrt{2}x - 4x = 4$, $x = \sqrt{2} + 1$,

$Q(\sqrt{2}+1,\ 2\sqrt{2}+2)$

두 직선 l, n의 방정식을 연립하면

$4\sqrt{2}x + 4x = 4$, $x = \sqrt{2} - 1$,

$R(\sqrt{2}-1,\ 2-2\sqrt{2})$

$\overline{QR}=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$,

$\overline{PQ}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

이므로 $\overline{QR}=2\overline{PQ}$

$\therefore\ k=2$

답 ③

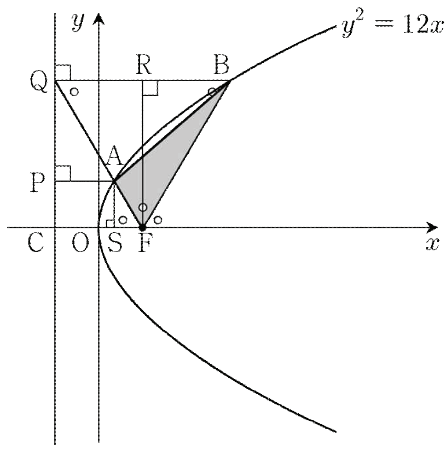
M023 |답 ③

[풀이]

$y^2=4\times3\times x$이므로, 포물선의 초점의 좌표는

F$(3,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

준선이 x축과 만나는 점을 C, 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, 점 F에서 선분 QB에 내린 수선의 발을 R, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 S라고 하자.



x축과 직선 QB가 서로 평행하므로

$\angle\text{QBF}=\dfrac{\pi}{3}$(엇각)

삼각형 BQF의 세 내각의 합이 π이므로

$\angle\text{BQF}=\dfrac{\pi}{3}$

삼각형 BQF는 정삼각형이다.

$\overline{QR}=\overline{CF}=2\overline{OF}=6$이므로 $\overline{QB}=12$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{FB}=\overline{BQ}=12$

이제 $\overline{AF}=x$로 두자.

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PA}=\overline{AF}=x$이므로 $\overline{SF}=\overline{CF}-\overline{PA}=6-x$

직각삼각형 AFS에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\dfrac{\overline{FS}}{\overline{AF}}=\cos\dfrac{\pi}{3}$ 즉, $\dfrac{6-x}{x}=\dfrac{1}{2}$ 풀면 $x=4$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(삼각형 AFB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\overline{FA}\,\overline{FB}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times4\times12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

답 ③

[풀이2] (교육과정 외)

공식

$\overline{PF}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.

두 직선 AF, BF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 120°, 60°이므로

$\overline{AF}=\dfrac{2\times3}{1-\cos120^\circ}=4$, $\overline{BF}=\dfrac{2\times3}{1-\cos60^\circ}=12$

$\therefore$ ($\triangle$AFB의 넓이)

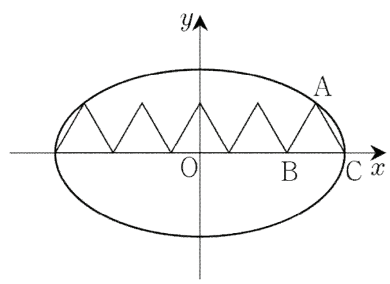
$=\dfrac{1}{2}\times4\times12\times\sin60^\circ=12\sqrt{3}$

답 ③

M024 |답 50

[풀이]

문제에서 주어진 조건에 의하여 아래의 그림을 얻는다.



(타원의 장축의 길이)$=5\times2=10$

이므로 타원의 정의에 의하여 $a=5$이다.

점 C의 좌표가 C$(5,\ 0)$일 때,

점 A의 좌표는 A$(4,\ \sqrt{3})$이다.

($\because$ 특수각의 삼각비의 정의)

이를 타원의 방정식에 대입하면

$\dfrac{16}{25}+\dfrac{3}{b^2}=1$ 풀면 $b=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ a^2+3b^2=25+25=50$

답 50

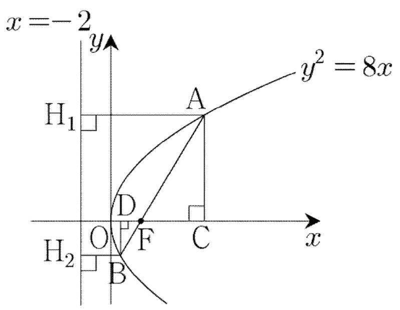
M025 |답 ④

[풀이]

$y^2=4\times2\times x$에서 이 포물선의 초점은 F$(2,\ 0)$이고, 준선

은 $x=-2$이다.

점 A에서 x축과 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, H_1, 점 B에서 x축과 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 D, H_2라고 하자.



$\overline{AF}=3k$, $\overline{BF}=k$로 두면

포물선의 정의에 의하여

$\overline{AH_1}=3k$, $\overline{BH_2}=k$

$\overline{FC}=3k-4$, $\overline{FD}=4-k$

그런데 두 직각삼각형 AFC, BFD의 닮음비는 $3:1$이므로

$\overline{FC}:\overline{FD}=3:1$ 즉, $\overline{FC}=3\overline{FD}$

$3k-4=3(4-k)$, $6k=16$, $k=\dfrac{8}{3}$

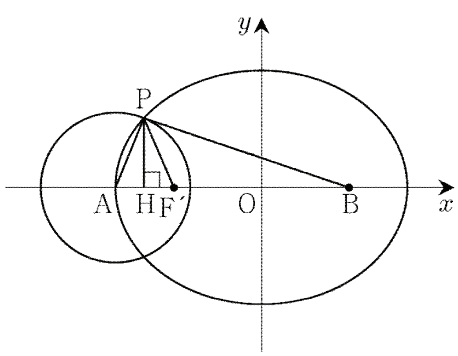
$\therefore$ $\overline{AB}=4k=\dfrac{32}{3}$

답 ④

M026 | 답 26

[풀이]

$\sqrt{25-16}=3$이므로 점 B는 문제에서 주어진 타원의 한 초점이다. 나머지 한 초점을 $F'(-3,\ 0)$이라고 하자. 그리고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



원의 정의에 의하여

$\overline{AP}=r$

타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}+\overline{PB}=10$ $\cdots$ ㉠

문제에서 주어진 등식은

$\overline{PA}+\overline{PB}=10$ $\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡: $\overline{PF'}=\overline{PA}=r$

이를 ㉠에 대입하면

$\overline{PB}=10-r$

그리고

$\overline{AH}=\overline{HF'}=1$, $\overline{F'B}=6$

직각삼각형 PAH, PBH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{PH}=\sqrt{r^2-1}=\sqrt{(10-r)^2-7^2}$

양변을 제곱하여 풀면

$r=\dfrac{13}{5}$

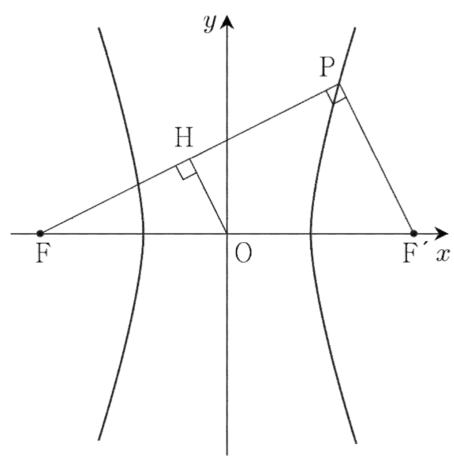
$\therefore$ $10r=26$

답 26

M027 | 답 ②

[풀이]

쌍곡선의 나머지 한 초점을 F', 선분 PF의 중점을 H라고 하자.



$\overline{FH}:\overline{HP}=\overline{FO}:\overline{OF'}(=1:1)$이므로

두 직선 OH, F'P는 서로 평행하다.

평행선의 성질에 의하여

$\angle FPF'=\angle FHO=90°$

서로 닮음인 두 직각삼각형 FHO, FPF'에 대하여

$\overline{HO}:\overline{PF'}=1:2$이므로 $\overline{PF'}=6$

쌍곡선의 정의에 의하여

(쌍곡선의 주축의 길이)$=\overline{PF}-\overline{PF'}=12-6=6$

즉, $2a=6$ 풀면 $a=3$

직각삼각형 PFF'에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{FF'}=\sqrt{\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2}=6\sqrt{5}$ 즉, $\overline{OF}=3\sqrt{5}$

$\overline{OF}=\sqrt{3^2+b^2}=3\sqrt{5}$에서 $b=6$

$\therefore$ $ab=18$

답 ②

M028 | 답 192

[풀이]

주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$F(\sqrt{25-16},\ 0)$, $F'(-\sqrt{25-16},\ 0)$

즉, $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$, $\overline{FF'}=6$

문제에서 주어진 비례식에서

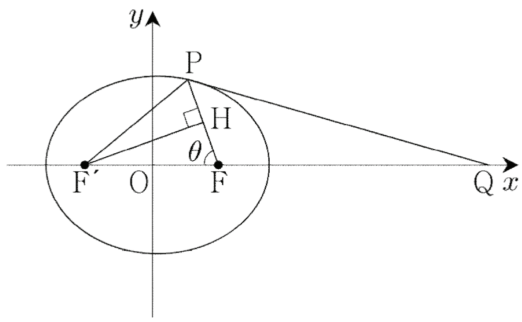
$\overline{PF}=2k$로 두면 $\overline{PF'}=3k$이다.

주어진 타원의 장축의 길이가 $10(=2\times5)$이므로

$2k+3k=10$, $k=2$

즉, $\overline{PF}=4$, $\overline{PF'}=6$

점 F'에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H, $\angle PFF'=\theta$로 두자.



$\cos\theta=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

문제에서 주어진 비례식에서

$\overline{QF}=2l$이면 $\overline{QF'}=3l$이다.

$3l=2l+6$에서 $l=6$

삼각형 PFQ에서 코사인법칙에 의하여

$\therefore\ \overline{PQ}^2=4^2+12^2-2\times4\times12\times\cos(\pi-\theta)$

$=160+32=192$ ($\because \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$)

답 192

M029 | 답 ④

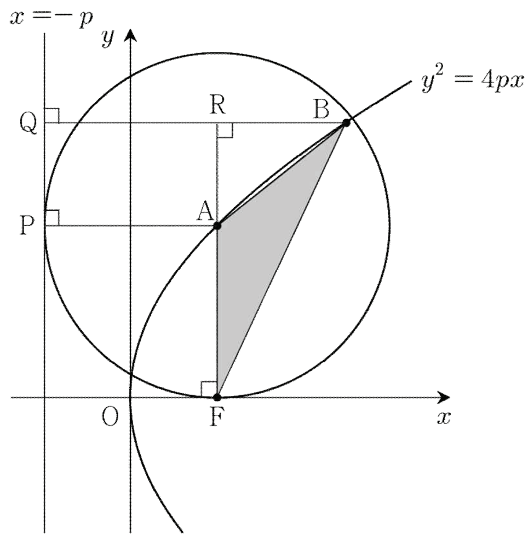
[풀이]

문제에서 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$F(p,\ 0)$, 준선은 $x=-p$이다.

두 점 A, B에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, 점 A에서 선분 QB에 내린 수선의 발을 R이라고 하자.

포물선 위의 점 A를 중심으로 하는 원이 초점 F에서 x축에 접하므로, 이 원은 준선 $x=-p$에 접한다.



$\overline{AF}=4k(>0)$로 두면 $\overline{BF}=7k$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{AP}=\overline{AF}=4k$, $\overline{BQ}=\overline{BF}=7k$

이므로

$\overline{RB}=\overline{QB}-\overline{QR}=7k-4k=3k$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(삼각형 AFB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\overline{AF}\,\overline{BR}=\frac{1}{2}\times4k\times3k=24$ 풀면 $k=2$

$\overline{OF}=\frac{1}{2}\overline{PA}=4$이므로

$\therefore\ p=4$

답 ④

M030 | 답 ④

[풀이]

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점의 좌표는

$F(1,\ 0)$, $F'(-1,\ 0)$

점 P의 좌표를 $P(x_1,\ y_1)$으로 두자.

접선의 방정식은

l: $3x_1x+4y_1y=12$ (기울기: $-\frac{3x_1}{4y_1}$)

점 Q의 좌표는 $Q\left(\frac{4}{x_1},\ 0\right)$

점 P를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

PR: $y=\frac{4y_1}{3x_1}(x-x_1)+y_1$

점 R의 좌표는 $R\left(\frac{x_1}{4},\ 0\right)$

문제에서 주어진 삼각형의 넓이에 대한 조건에 의하여

세 선분 $\overline{\mathrm{RF}}$, $\overline{\mathrm{F'R}}$, $\overline{\mathrm{FQ}}$의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$\overline{\mathrm{F'R}}=\dfrac{x_1}{4}+1$, $\overline{\mathrm{RF}}=1-\dfrac{x_1}{4}$, $\overline{\mathrm{FQ}}=\dfrac{4}{x_1}-1$

등차중항의 정의에 의하여

$$2\left(\frac{x_1}{4}+1\right)=1-\frac{x_1}{4}+\frac{4}{x_1}-1$$

정리하면

$3x_1^2+8x_1-16=0$, $(3x_1-4)(x_1+4)=0$,

$\therefore\ x_1=\dfrac{4}{3}$ $(\because 0<x_1<2)$

답 ④

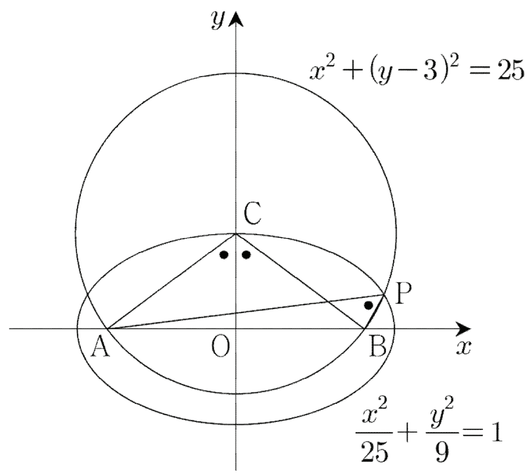
M031 | 답 ⑤

[풀이]

주어진 타원에서 $\sqrt{25-9}=4$이므로

$\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$

점 $(0,\ 3)$을 C, $\overline{\mathrm{PA}}=a$, $\overline{\mathrm{PB}}=b$라고 하자.



(단, $\bullet=\theta$)

호 AB의 중심각을 2θ라고 하면

중심각과 원주각의 관계에 의하여

$\angle\mathrm{BPA}=\theta(=\bullet)$이다.

그리고 두 직각삼각형 CAO, CBO는 서로 합동이므로

$\angle\mathrm{OCA}=\angle\mathrm{OCB}=\theta(=\bullet)$

직각삼각형 CAO에서

$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

이므로 삼각형 ABP에서 코사인법칙을 적용하면

$8^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$, 즉

$64=(a+b)^2-\dfrac{16}{5}ab$

$\therefore\ ab=\dfrac{45}{4}$

($\because$ 타원의 정의에 의하여 $a+b=10$)

답 ⑤

M032 | 답 55

[풀이]

접점의 좌표를 $(x_0,\ y_0)$라고 하자.

접선의 방정식은

$y_0y=2(x+x_0)$ (기울기: $\dfrac{2}{y_0}$)

이 직선이 점 $(-n,\ 0)$을 지나므로

$0=2(-n+x_0)$에서 $x_0=n$

점 $(x_0,\ y_0)$은 포물선 $y^2=4x$ 위에 있으므로

$y_0^2=4n$, 즉 $y_0=2\sqrt{n}$ $(\because y_0>0)$

$a_n=\dfrac{2}{2\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2=\sum_{n=1}^{10}n=\frac{1+10}{2}\times10=55$$

답 55

M033 | 답 ④

[풀이]

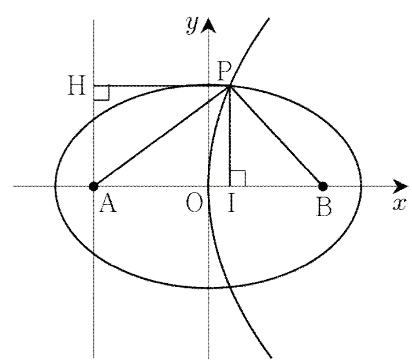
문제에서 주어진 포물선의 방정식은

$y^2=12x$

이고, 이 포물선의 준선의 방정식은

$x=-3$

이다. 점 P에서 포물선의 준선과 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자.



$\overline{\mathrm{PB}}=t$로 두자.

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}=8-t$

두 직각삼각형 PHA, PIB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{HA}}=\sqrt{(8-t)^2-t^2}$,

($\because$ 포물선의 정의에서 $\overline{\mathrm{PH}}=t$)

$\overline{\mathrm{PI}}=\sqrt{t^2-(6-t)^2}$

$\sqrt{(8-t)^2-t^2}=\sqrt{t^2-(6-t)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$\therefore\ t=\dfrac{25}{7}$

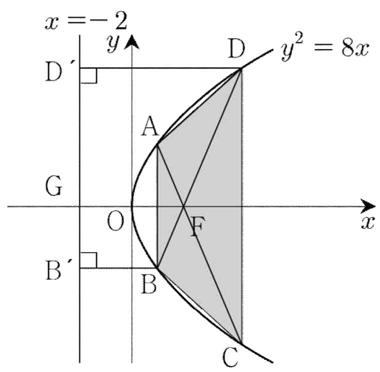
답 ④

M034 |답 ⑤

[풀이]

포물선의 방정식 $y^2=4\times2\times x$에서 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

두 점 B, D에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 B′, D′, 직선 $x=-2$가 x축과 만나는 점을 G라고 하자. 그리고 $\overline{\mathrm{BF}}=x$로 두자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{DD'}}=6,\ \overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{BB'}}=x$

사다리꼴 DD′B′B에서

$$\frac{6\times\overline{\mathrm{BB'}}+x\times\overline{\mathrm{DD'}}}{6+x}=\overline{\mathrm{FG}}$$

즉, $\dfrac{6\times x+x\times6}{6+x}=4$

풀면

$x=3$

두 점 A, D의 x좌표는 각각

(점 A의 x좌표)$=3-2=1$

(점 D의 x좌표)$=6-2=4$

두 점 A, B의 좌표는

$\mathrm{A}(1,\ 2\sqrt{2}),\ \mathrm{D}(4,\ 4\sqrt{2})$

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$$\frac{4\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{2}\times3=18\sqrt{2}$$

답 ⑤

[풀이2] (교육과정 외)

공식

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.

직선 BD가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

$\overline{\mathrm{FD}}=\dfrac{2\times2}{1-\cos\theta}=6,\ \cos\theta=\dfrac{1}{3}\ \left(\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$\overline{\mathrm{BF}}=\dfrac{2\times2}{1-\cos(180^\circ+\theta)}=3$

이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=2\times\overline{\mathrm{FD}}\sin\theta=8\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}}=4\sqrt{2}$

이고, 사다리꼴 ABCD의 높이는 $3(=1+2)$이다.

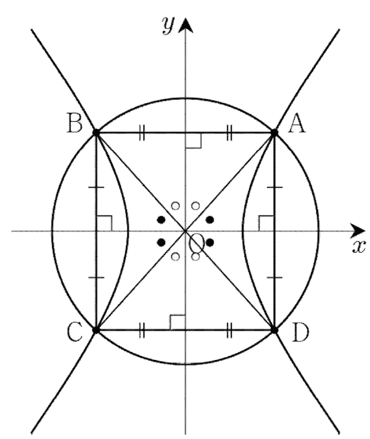
$\therefore$ (□ABCD의 넓이)$=\dfrac{8\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2}\times3==18\sqrt{2}$

답 ⑤

M035 |답 ③

[풀이]

아래 그림처럼 문제에서 주어진 원과 쌍곡선이 만나는 4개의 점을 각각 A, B, C, D라고 하자. 그리고 동경 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라고 하자. 이때, 직선 OA와 y축이 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$이다.



(단, $\bullet=\alpha,\ \circ=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$)

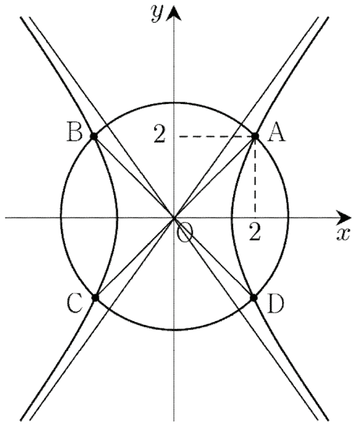
원과 쌍곡선은 모두 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이므로 다음이 성립한다.

두 점 A, D는 x축에 대하여 서로 대칭이므로

직선 OD와 x축이 이루는 예각의 크기는 α이다.
문제에서 주어진 조건에 의하여

$$2\alpha = 2\pi \times \frac{1}{4} \quad \text{즉,} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

따라서 두 직선 OA, OB의 기울기는 각각 1, -1이다.



원과 직선 $y=x$의 교점의 좌표는 A$(2,\ 2)$이므로 쌍곡선은 점 A$(2,\ 2)$를 지난다.
쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{또는} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

(단, $a>0$, $b>0$)(←풀이의 일반성을 잃지 않는다.)

$$\left(\because \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0\text{에서 유도함.}\right)$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2} \quad \text{즉,} \quad b^2 = 2a^2$$

쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1$$

쌍곡선이 점 A$(2,\ 2)$를 지나므로

$$\frac{2^2}{a^2} - \frac{2^2}{2a^2} = 1$$

풀면

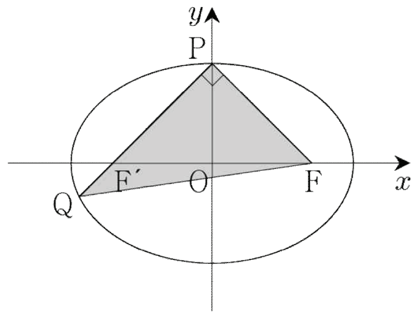
$$a^2 = 2,\ b^2 = 4$$

$$\therefore \ a^2 + b^2 = 6$$

답 ③

M036 | 답 ②

[풀이]
문제에서 주어진 타원의 장축의 길이를 $2a$라고 하면
$a^2 = n^2 + n^2$에서 $a = \sqrt{2}n$
$\overline{\mathrm{QF}} = p$로 두면 타원의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{QF'}} = 2\sqrt{2}n - p$



타원의 정의에 의하여
($\triangle$FPQ의 둘레의 길이)
$= \sqrt{2}n + \sqrt{2}n + \overline{\mathrm{QF}} + \overline{\mathrm{QF'}}$
$= 4\sqrt{2}n = 12\sqrt{2}$에서 $n=3$
즉, $\overline{\mathrm{QF}} = p$, $\overline{\mathrm{QF'}} = 6\sqrt{2} - p$
직각삼각형 PQF에서 피타고라스의 정리에 의하여
$p^2 = (3\sqrt{2})^2 + (9\sqrt{2} - p)^2$
정리하면
$p = 5\sqrt{2}$
$\therefore$ ($\triangle$FPQ의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 12$$

답 ②

M037 | 답 64

[풀이]
기울기가 m이고, 포물선 $y^2 = 4px$에 접하는 접선의 방정식은

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

이다. 이 공식을 이용하면 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + 8$$

이 직선의 x절편과 y절편은 각각 -16, 8이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 16 \times 8 = 64$$

답 64

[참고] (교육과정 외)
음함수의 미분법에 의하여

$$2yy' = 16, \ \text{즉} \ y' = \frac{8}{y}$$

$y' = \dfrac{1}{2}$이면 $y = 16$이고, $x = 16$이다.
접선의 방정식은

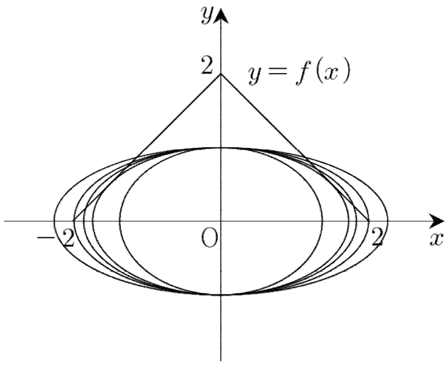
$y=\frac{1}{2}(x-16)+16$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+8$

M038 | 답 ⑤

[풀이]

$k>1$이므로 문제에서 주어진 타원의 장축은 x축 위에 있다.

아래 그림처럼 문제에서 주어진 타원과 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.



직선 $y=-x+2$가 타원에 접할 때의 k의 값을 k_1, 타원이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때의 k의 값을 k_2라고 하자. 두 상수 k_1, k_2의 값을 구하자.

기울기가 -1이고, 타원에 접하는 직선의 방정식은

$y=-x+\sqrt{k^2+1}$

접선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=-2+\sqrt{k^2+1}$

풀면

$k=\sqrt{3}\ (\because k>1)$

따라서 k_1의 값은 $\sqrt{3}$이다.

타원이 점 $(2,\ 0)$을 지나면

$\frac{2^2}{k^2}+0^2=1$에서 $k=2\ (\because k>1)$

따라서 k_2의 값은 2이다.

함수 $g(k)$의 방정식은

$$g(k)=\begin{cases}0 & (1<k<\sqrt{3})\\ 2 & (k=\sqrt{3})\\ 4 & (\sqrt{3}<k\le 2)\\ 2 & (k>2)\end{cases}$$

함수 $g(k)$가 불연속이 되는 모든 k의 값들의 제곱의 합은

$(\sqrt{3})^2+2^2=7$

답 ⑤

[참고] (교육과정 외)

다음과 같이 접선의 방정식을 유도해도 좋다.

음함수의 미분법에 의하여

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{k^2y}$

제1사분면에서 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면

$-\frac{x_1}{k^2y_1}=-1$에서 $x_1=k^2y_1$ …㉠

점 $(x_1,\ y_1)$은 타원 위에 있으므로

$\frac{x_1^2}{k^2}+y_1^2=1$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$x_1=\frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}$, $y_1=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

접선의 방정식은

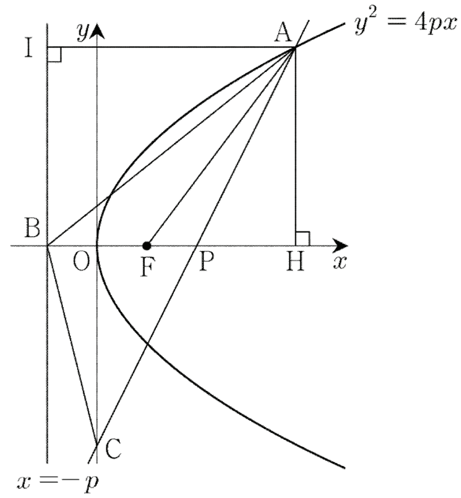
$y=-x+\sqrt{k^2+1}$

M039 | 답 14

[풀이]

문제에서 주어진 포물선의 준선의 방정식은 $x=-p$이다.

문제에서 주어진 포물선의 초점을 $\mathrm{F}(p,\ 0)$, 점 A에서 x축과 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자. 그리고 직선 $y=m(x-4)$가 x축과 만나는 점을 $\mathrm{P}(4,\ 0)$이라고 하자.



삼각형의 무게중심의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{BF}}:\overline{\mathrm{FP}}=2:1$

즉, $2p:\overline{\mathrm{FP}}=2:1$에서 $\overline{\mathrm{FP}}=p$

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OF}}+\overline{\mathrm{FP}}=2p=4$에서 $p=2$

삼각형의 무게중심의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PC}}=1:1$

서로 합동인 두 직각삼각형 APH, CPO에 대하여

$\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{PO}}=1:1$

즉, $\overline{\mathrm{PH}}:4=1:1$에서 $\overline{\mathrm{PH}}=4$

직사각형의 정의와 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{IA}=\overline{BH}=\overline{BF}+\overline{FP}+\overline{PH}$

$=4+2+4=10$

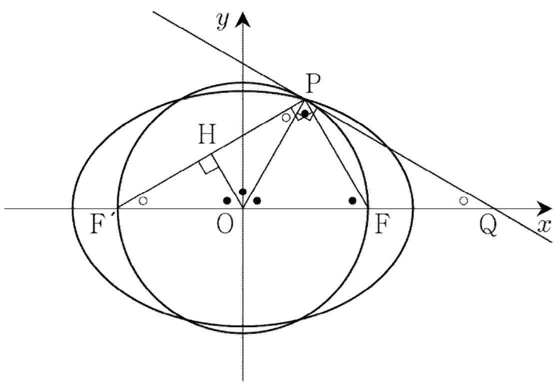
$\therefore\ \overline{AF}+\overline{BF}=10+4=14$

답 14

M040 | 답 ②

[풀이] ★

문제에서 주어진 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 O에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

원의 접선 PQ는 접점 P를 지나는 반지름과 수직이므로

$\angle QPO=90^\circ$

직각삼각형 OQP의 세 내각의 합은 180°이므로

$\angle POQ=60^\circ$

원의 정의에 의하여 $\overline{OF}=\overline{OP}$이므로

삼각형 OPF는 이등변삼각형이다. 그러므로

$\angle FPO=\angle OFP=60^\circ$

정삼각형 POF의 꼭짓점 O에서의 외각의 크기는 120°이므로

$\angle F'OP=120^\circ$

원의 정의에 의하여 $\overline{OP}=\overline{OF'}$이므로

삼각형 F′OP는 이등변삼각형이다. 그러므로

$\angle OF'H=\angle OPH=30^\circ$

직각삼각형 OF′H에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{F'H}=\overline{OF'}\cos30^\circ=3\sqrt{3}$

직각삼각형 OPH에서 마찬가지의 방법으로

$\overline{PH}=3\sqrt{3}$

타원의 정의에 의하여

$\therefore$ (타원의 장축의 길이)$=\overline{F'P}+\overline{PF}=6\sqrt{3}+6$

답 ②

M041 | 답 8

[풀이]

$a>0$, $b>0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

주어진 쌍곡선이 점 $(5,\ 3)$을 지나므로

$$\frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1 \qquad \cdots ㉠$$

주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\text{에서 } y=\pm\frac{b}{a}x\text{이므로 } a=b \qquad \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

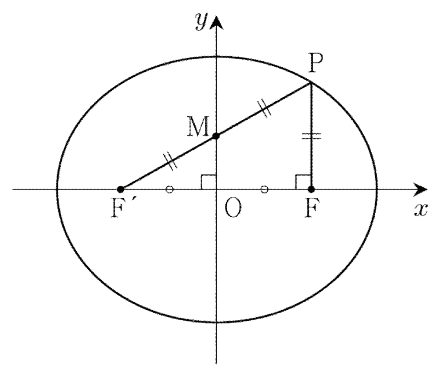
$$\frac{25}{a^2}-\frac{9}{a^2}=1,\ a=4$$

따라서 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 $8(=2a)$이다.

답 8

M042 | 답 ②

[풀이]



문제에서 주어진 타원의 중심이 원점이므로

$\overline{F'O}=\overline{OF}$

선분 PF′의 중점이 M이므로

$\overline{F'M}=\overline{MP}$

정리하면

$\overline{F'O}:\overline{OF}=\overline{F'M}:\overline{MP}=1:1$

이므로 $\overline{MO}\,/\!/\,\overline{PF}$이다.

그런데 직선 MO(y축)은 x축에 수직이므로

$\angle PFF'=\dfrac{\pi}{2}$

서로 닮음인 두 직각삼각형 MOF′, PFF′에 대하여

$\overline{F'M}:\overline{F'P}=\overline{MO}:\overline{PF}$

즉, $1:2=1:\overline{PF}$에서 $\overline{PF}=2$

타원의 정의에 의하여

$2a=\overline{PF'}+\overline{PF}=3\overline{PF}=6$ 즉, $a=3 \qquad \cdots ㉠$

직각삼각형 F′OM에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{F'O}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MF'}}^2-\overline{\mathrm{MO}}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

이므로

$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

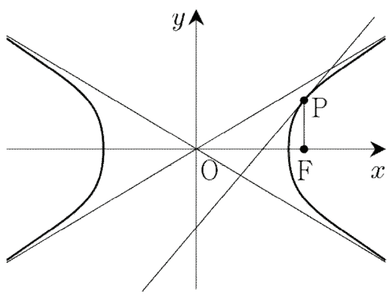
$b=\sqrt{6}$

$\therefore\ a^2+b^2=15$

답 ②

M043 | 답 ①

[풀이]



$a>0,\ b>0$로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

쌍곡선의 방정식에서 점근선의 방정식을 유도하자.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$에서 $y=\pm\frac{b}{a}x$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 즉, $a=\sqrt{3}b$ $\cdots$ ㉠

쌍곡선의 방정식에서

$4\sqrt{3}=\sqrt{a^2+b^2}$ 즉, $a^2+b^2=48$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=6,\ b=2\sqrt{3}$

쌍곡선의 방정식은

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$

점 $\mathrm{P}(4\sqrt{3},\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{4\sqrt{3}x}{36}-\frac{2y}{12}=1$, 즉 $\frac{\sqrt{3}x}{9}-\frac{y}{6}=1$

이때, 이 직선의 기울기는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

답 ①

[참고] (교육과정 외)

음함수의 미분법에 의하여

$\frac{x}{18}-\frac{y}{6}\frac{dy}{dx}=0$ 즉, $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{3y}$

따라서 접선의 기울기는

$\frac{4\sqrt{3}}{3\times2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

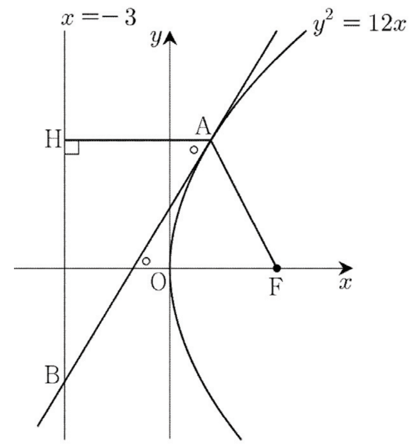
M044 | 답 32

[풀이]

$y^2=4\times3\times x$에서 $p=3$이므로

포물선의 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, ○$=\frac{\pi}{3}$이다.)

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AF}}$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}$ 즉, $\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{BA}}}=\frac{1}{2}$

직각삼각형 AHB에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$\angle\mathrm{BAH}=\frac{\pi}{3}$

x축과 직선 AH가 서로 평행하므로

직선 AB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

(엇각으로 같다.)

접선(AB)의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ $\left(\because y=mx+\frac{p}{m}\right)$

포물선의 방정식과 직선 AB의 방정식을 연립하면

$(\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2=12x,\ (x-1)^2=0,\ x=1$

즉, 점 A의 좌표는 $(1,\ 2\sqrt{3})$이다.

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}=3+1=4$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AF}}=8$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AF}}=32$

답 32

[참고] (교육과정 외)

점 A의 x좌표를 다음과 같이 구해도 좋다.

점 A의 좌표를 $(a,\ 2\sqrt{3a})$라고 하면

점 A에서의 접선의 방정식은

$2\sqrt{3a}\,y = 12\times\dfrac{x+a}{2}$

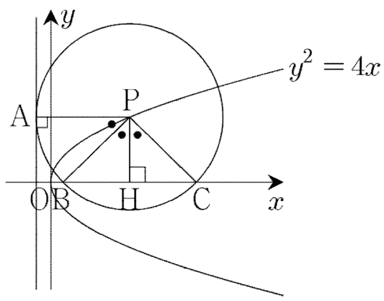
이 직선의 기울기는

$\dfrac{6}{2\sqrt{3a}} = \sqrt{3}$ 풀면 $a=1$

M045 | 답 ④

[풀이]

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 주어진 원의 반지름의 길이를 r이라고 하자.



(단, ●$=45^\circ$)

부채꼴 PBC의 넓이가 부채꼴 PAB의 넓이의 2배이므로 부채꼴 PBC의 중심각의 크기는 부채꼴 PAB의 중심각의 크기의 2배이다.

위의 그림에서

$\angle \mathrm{APH}=90^\circ=$●$+$●

이므로 ●$=45^\circ$이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=2p+\overline{\mathrm{BH}}=2+\overline{\mathrm{BH}}$

($\because$ 포물선 $y^2=4\times1\times x=4px$에서 $p=1$)

$=2+\dfrac{r}{\sqrt{2}}=r$

$\therefore\ r=4+2\sqrt{2}$

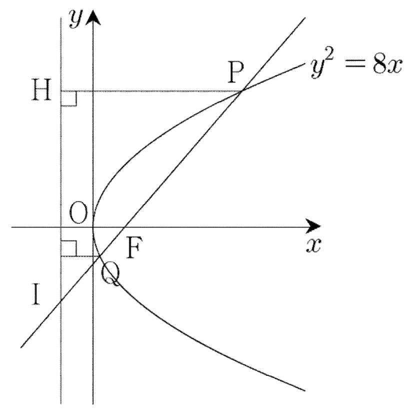
답 ④

M046 | 답 13

[풀이]

포물선 $y^2=4\times2\times x$의 초점과 준선은 각각 $\mathrm{F}(2,\ 0)$, $x=-2$이다.

점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자.



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라고 하자.

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{QI}}$

$=(p+2)+(q+2)=17$

$\therefore\ p+q=13$

답 13

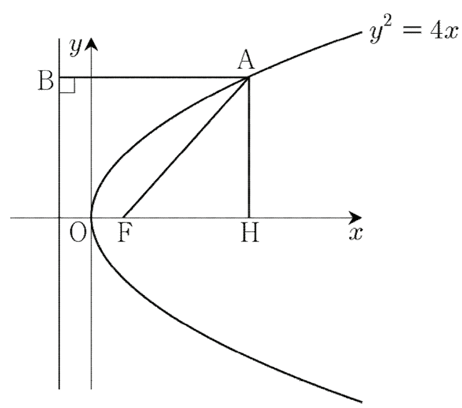
M047 | 답 ①

[풀이]

$y^2=4\times1\times x$이므로 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식은 각각

$\mathrm{F}(1,\ 0)$, $x=-1$

점 A에서 직선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 B라고 하자.



$\overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{BA}}-2\overline{\mathrm{OF}}=5-2=3$

직각삼각형 AFH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}=4$

따라서 삼각형 AFH의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$

답 ①

[풀이2] (교육과정 외)

공식

$\overline{\mathrm{PF}} = \dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의 방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.

직선 AF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\overline{\mathrm{AF}} = \dfrac{2}{1-\cos\theta} = 5$, $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$

직각삼각형 AFH에서

$\overline{\mathrm{AH}} = 4$, $\overline{\mathrm{FH}} = 3$

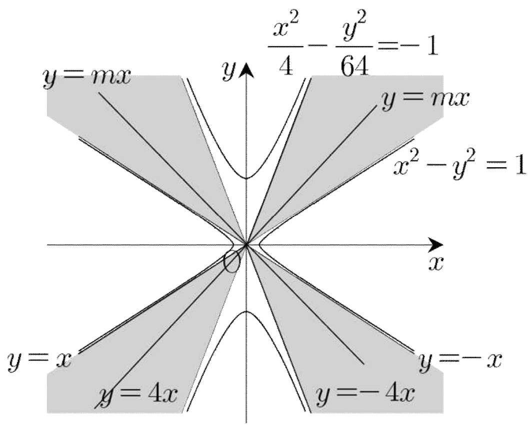
$\therefore$ ($\triangle$AFH의 넓이) $= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$

답 ①

M048 | 답 ④

[풀이]

문제에서 주어진 두 쌍곡선을 좌표평면에 그리면



문제에서 주어진 두 쌍곡선의 점근선의 방정식은 각각

$y = \pm x$, $y = \pm 4x$

$1 \le |m| \le 4$이면 직선 $y = mx$는 문제에서 주어진 두 쌍곡선과 만나지 않는다.

따라서 정수 m의 개수는 8이다.

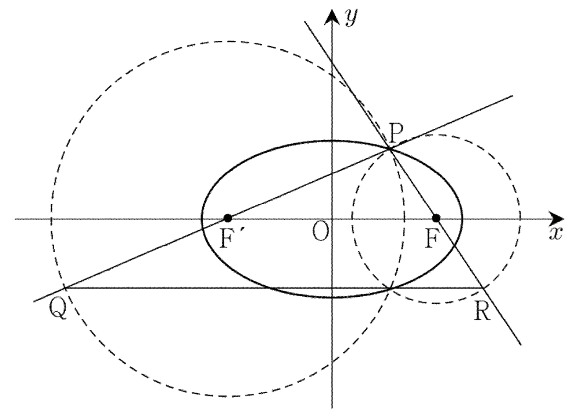
답 ④

M049 | 답 36

[풀이]

타원의 장축의 길이는 10이고,

$\sqrt{25-9} = 4$이므로 $c = 4$이다.



원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{F'Q}}$, $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{FR}}$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}} + \overline{\mathrm{PF}} = 10$

이므로

$\overline{\mathrm{F'Q}} + \overline{\mathrm{FR}} = 10$

$\overline{\mathrm{PF'}} : \overline{\mathrm{F'Q}} = \overline{\mathrm{PF}} : \overline{\mathrm{FR}} = 1 : 1$

이므로

$\overline{\mathrm{F'F}} : \overline{\mathrm{QR}} = 1 : 2$ 즉, $\overline{\mathrm{QR}} = 16$

따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이는

$10 + 10 + 16 = 36$이다.

답 36

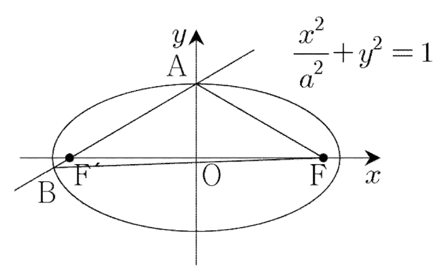
M050 | 답 ③

[풀이]

타원의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$

로 두자. (단, $a > 1$)



타원의 정의에 의하여

($\triangle$ABF의 둘레의 길이)

$= \overline{\mathrm{AF'}} + \overline{\mathrm{AF}} + \overline{\mathrm{BF'}} + \overline{\mathrm{BF}}$

$= 2a + 2a = 4a = 16$, 즉 $a = 4$

$\overline{\mathrm{FF'}} = 2c = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{15}$

답 ③

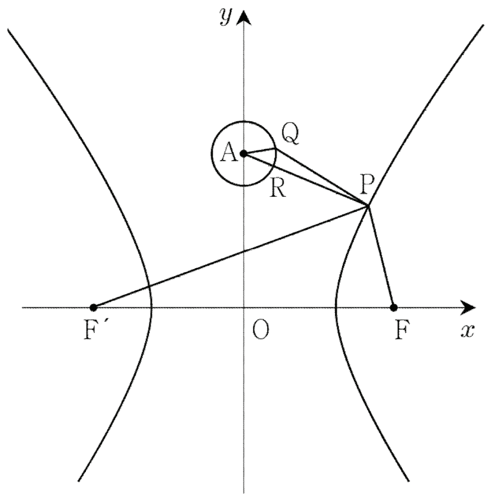
M051 | 답 54

[풀이] ★

문제에서 주어진 쌍곡선의 방정식에서

$2a=6$에서 $a=3$ $\cdots$ ㉠

선분 AP가 문제에서 주어진 원과 만나는 점을 R이라고 하자.



쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=6$ 즉, $\overline{PF'}=\overline{PF}+6$

이므로

$\overline{PQ}+\overline{PF'}=\overline{PQ}+\overline{PF}+6$

$\geq \overline{PR}+\overline{PF}+6=\overline{PA}+\overline{PF}+5$

(단, 등호는 점 Q가 점 R 위에 있을 때 성립한다.)

$\geq \overline{AF}+5=\sqrt{a^2+b^2+25}+5=12$

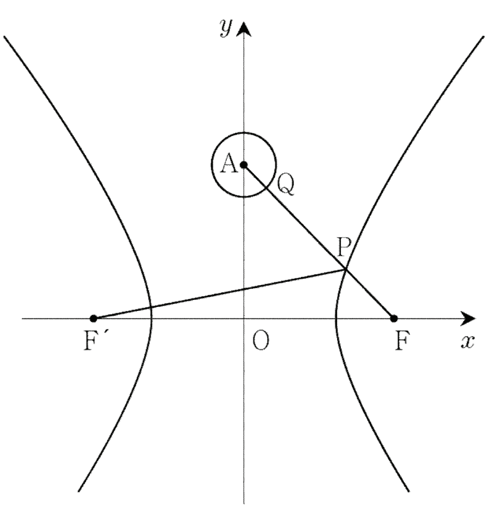
(단, 등호는 세 점 A, P, F가 일직선 위에 있을 때 성립한다.)

정리하면

$a^2+b^2=24$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b^2=15$



$\therefore$ $a^2+3b^2=54$

답 54

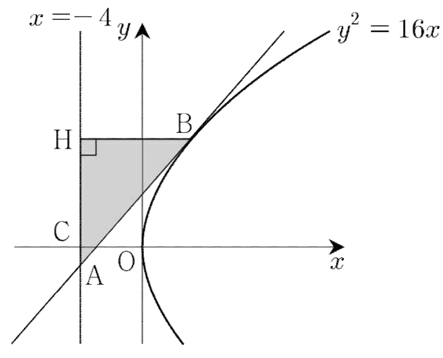
M052 | 답 ⑤

[풀이]

주어진 포물선의 방정식

$y^2=4\times 4\times x$에서

준선의 방정식은 $x=-4$이다.



점 B의 좌표를 $\mathrm{B}\left(\dfrac{t^2}{16},\ t\right)$로 두자.

포물선 위의 점 B에서의 접선의 방정식은

$ty=16\dfrac{x+\dfrac{t^2}{16}}{2}$

정리하면

$y=\dfrac{8}{t}x+\dfrac{t}{2}$

접선과 준선의 방정식을 연립하여 점 A의 좌표를 구하면

$\mathrm{A}\left(-4,\ -\dfrac{32}{t}+\dfrac{t}{2}\right)$

두 점 C, H의 좌표는

$\mathrm{C}(-4,\ 0)$, $\mathrm{H}(-4,\ t)$

$\overline{AC}=\dfrac{32}{t}-\dfrac{t}{2}$, $\overline{CH}=t$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\left(\dfrac{32}{t}-\dfrac{t}{2}\right)\times t=8$

풀면

$t=4\sqrt{3}$

세 점 A, B, H의 좌표는 각각

$\mathrm{A}\left(-4,\ -\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{B}(3,\ 4\sqrt{3})$, $\mathrm{H}(-4,\ 4\sqrt{3})$

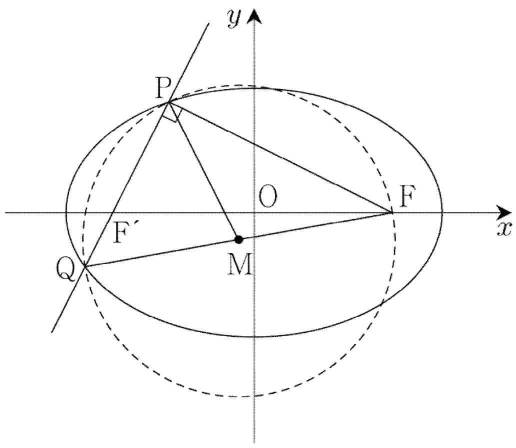
$\therefore$ ($\triangle$ABH의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times 7\times \dfrac{14}{3}\sqrt{3}=\dfrac{49}{3}\sqrt{3}$

답 ⑤

M053 | 답 8

[풀이]



$\overline{FM}=\overline{PM}=\overline{QM}$

이므로 원의 정의에 의하여 세 점 F, P, Q는 지름이 $\overline{QF}$인 원 위에 있다. 이때, 원의 중심은 M이다.

원의 성질에 의하여

$\angle FPQ=\dfrac{\pi}{2}$

직각삼각형 FPQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{FP}=\sqrt{\overline{FQ}^2-\overline{QP}^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$

한편 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{QF}+\overline{QF'}$

이고,

($\triangle PQF$의 둘레의 길이)

$=\overline{PQ}+\overline{QF}+\overline{FP}$

$=\overline{PF'}+\overline{F'Q}+\overline{QF}+\overline{FP}$

$=(\overline{PF}+\overline{PF'})+(\overline{QF}+\overline{QF'})$

$=24$

이므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}=12$, $\overline{QF}+\overline{QF'}=12$

즉, $8+\overline{PF'}=12$, $10+\overline{QF'}=12$

이므로 $\overline{PF'}=4$, $\overline{QF'}=2$

직각삼각형 FPF′에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{FF'}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$이므로 $c=2\sqrt{5}$

타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=12=2a$에서 $a=6$

$\therefore$ (타원의 단축의 길이)$=2\sqrt{a^2-c^2}=8$

답 8

M054 | 답 ③

[풀이]

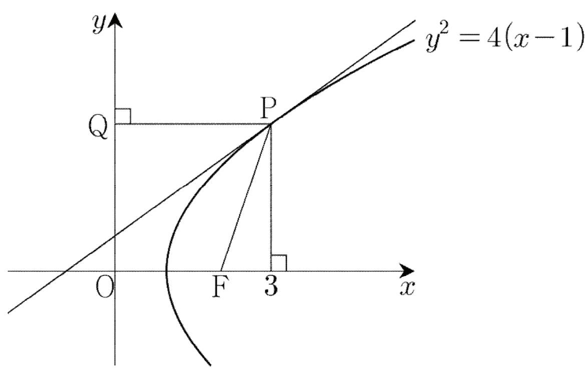
포물선 $y^2=4x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 문제에서 주어진 포물선의 그래프가 된다.

문제에서 주어진 포물선의 준선의 방정식은

$x=-1+1=0$

이다. 즉, y축이 준선이다.

점 P에서 y축(준선)에 내린 수선의 발을 Q라고 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{PQ}=\overline{PF}=3$

이므로 점 P의 x좌표는 3이다.

$x=3$을 문제에서 주어진 포물선의 방정식에 대입하여 y의 값을 구하면

$y=2\sqrt{2}$

점 P의 좌표는 $(3,\ 2\sqrt{2})$이다.

점 $P(3,\ 2\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$2\sqrt{2}y=4\times\dfrac{x-1+2}{2}$, 즉 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$

이때, 점 P에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

답 ③

[참고] (교육과정 외)

다음과 같이 접선의 기울기를 구해도 좋다.

문제에서 주어진 포물선의 방정식에서 음함수의 미분법에 의하여

$2yy'=4$ 즉, $y'=\dfrac{2}{y}$

이므로

$\therefore\ y'|_{y=2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

[풀이2] (교육과정 외)

공식

$\overline{PF}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$ (단, θ는 직선 PF가 x축과 이루는 양의

방향과 이루는 각의 크기)

를 이용하여 문제를 해결하자.

직선 PF가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

$\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{2\times 1}{1-\cos\theta}=3$, $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

이므로

(점 P의 x좌표)$=\overline{\mathrm{OF}}+1=2+1=3$

점 $\mathrm{P}(3,\ 2\sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

$2\sqrt{2}y=4\times\dfrac{x-1+2}{2}$, 즉 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$

이때, 점 P에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

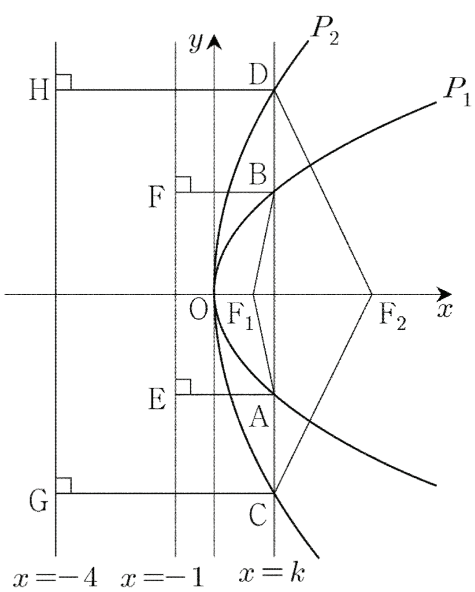
답 ③

M055 | 답 50

[풀이]

두 포물선 P_1, P_2의 준선은 각각 $x=-1$, $x=-4$이다.

두 점 A, B에서 직선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 E, F, 두 점 C, D에서 직선 $x=-4$에 내린 수선의 발을 각각 G, H라고 하자.



두 포물선 P_1, P_2의 방정식은

P_1: $y^2=4x$

P_2: $y^2=16x$

포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F_1A}}=\overline{\mathrm{AE}}=1+k$, $\overline{\mathrm{F_1B}}=\overline{\mathrm{BF}}=1+k$

$\overline{\mathrm{F_2C}}=\overline{\mathrm{CG}}=4+k$, $\overline{\mathrm{F_2D}}=\overline{\mathrm{DH}}=4+k$

네 점 A, B, C, D의 y좌표는 각각

$-2\sqrt{k}$, $2\sqrt{k}$, $-4\sqrt{k}$, $4\sqrt{k}$

이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{k}$, $\overline{\mathrm{CD}}=8\sqrt{k}$

$l_1=2+2k+4\sqrt{k}$, $l_2=8+2k+8\sqrt{k}$

$l_2-l_1=6+4\sqrt{k}=11$

정리하면

$\sqrt{k}=\dfrac{5}{4}$ 양변을 제곱하면 $k=\dfrac{25}{16}$

풀면

$\therefore\ 32k=50$

답 50

M056 | 답 ③

[풀이]

$\angle\mathrm{QPF}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 직각이등변삼각형 PFQ에서

$\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{PF}}$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{a}$ $\cdots$ ㉠

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PF}}=10$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$2\sqrt{a}=10$에서 $a=25$

문제에서 주어진 타원의 두 초점의 좌표는 각각

$\mathrm{F'}(-\sqrt{13},\ 0)$, $\mathrm{F}(\sqrt{13},\ 0)$

직각삼각형 PF′F에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{F'F}}^2=\overline{\mathrm{F'P}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2$

즉, $\overline{\mathrm{F'P}}^2+\overline{\mathrm{PF}}^2=52$ $\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서

$\overline{\mathrm{F'P}}\times\overline{\mathrm{PF}}=\dfrac{10^2-52}{2}=24$ $\cdots$ ㉣

㉡, ㉣에서 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

두 선분 F′P, PF의 길이는 이차방정식

$x^2-10x+24=0$의 서로 다른 두 실근이다.

따라서 $\overline{\mathrm{F'P}}=6$, $\overline{\mathrm{PF}}=4$이다.

$\therefore$ (△QF′F의 넓이)

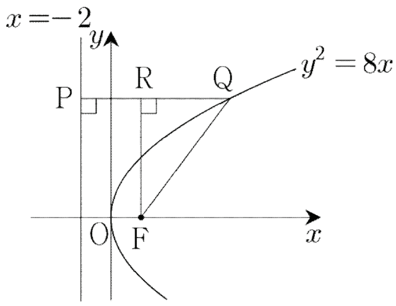
$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F'Q}}\times\overline{\mathrm{FP}}=\dfrac{1}{2}\times 10\times 4=20$

답 ③

M057 | 답 8

[풀이]

$y^2=4\times2\times x$에서 초점은 $\mathrm{F}(2,\ 0)$이고, 준선은 $x=-2$이다. 이때, 점 P는 직선 $x=-2$ 위에 있다.



포물선의 정의에 의하여

점 Q에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발은 P이다.

점 F에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 R이라고 하면

$\overline{\mathrm{FQ}}=10,\ \overline{\mathrm{QR}}=10-4=6$

직각삼각형 FQR에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FR}}=8$

$\therefore\ k=8$

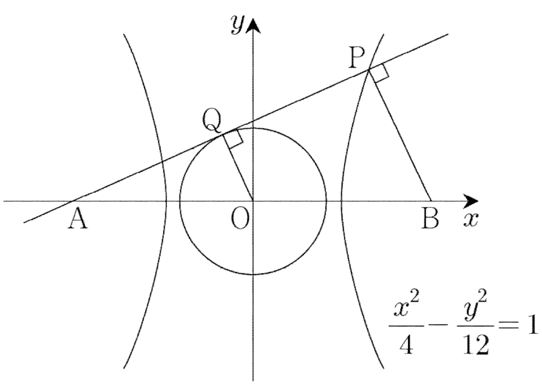
답 8

M058 | 답 ②

[풀이]

$4+12=4^2$이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$\mathrm{A}(-4,\ 0),\ \mathrm{B}(4,\ 0)$



$\overline{\mathrm{PA}}=a,\ \overline{\mathrm{PB}}=b$로 두자.

직각삼각형 PAB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$8^2=a^2+b^2$

쌍곡선의 정의에 의하여

$a-b=4$

위의 두 등식을 연립하면

$8^2=a^2+(a-4)^2,\ a^2-4a-24=0$

$a=2+2\sqrt{7},\ b=2\sqrt{7}-2$

$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{OB}}$이므로 두 직각삼각형 PAB, QAO의 닮음비는 $2:1$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}b=\sqrt{7}-1$

답 ②

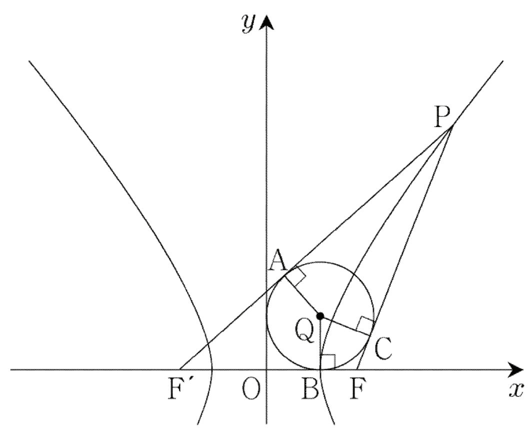
M059 | 답 18

[풀이] ★

$\sqrt{9+16}=5$이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$\mathrm{F}(5,\ 0),\ \mathrm{F}'(-5,\ 0)$, 즉 $\overline{\mathrm{FF}'}=10$

아래 그림처럼 내접원 위의 세 접점을 각각 A, B, C라고 하자.



쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{AF}'}-\overline{\mathrm{CF}}$

$(\because\ \overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}})$

$=\overline{\mathrm{BF}'}-\overline{\mathrm{BF}}$

$(\because\ \overline{\mathrm{F'A}}=\overline{\mathrm{F'B}},\ \overline{\mathrm{FC}}=\overline{\mathrm{FB}})$

$=6$

이상을 정리하면

$\overline{\mathrm{BF}'}+\overline{\mathrm{BF}}=10$

$\overline{\mathrm{BF}'}-\overline{\mathrm{BF}}=6$

풀면

$\overline{\mathrm{BF}'}=8,\ \overline{\mathrm{BF}}=2$

점 B의 x좌표가 3이므로 원은 y축에 접한다.

이때, 직선 OQ가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 45° 이므로

(즉, 점 Q의 좌표는 $(3,\ 3)$이므로)

$\overline{\mathrm{OQ}}=3\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OQ}}^2=18$

답 18