30. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 실수 전체의 집합의 두 부분집합

$A=\{a_k \mid 1 \le a_k \le 60,\ a_k$는 수열 $\{a_n\}$의 항$\}$

$B=\{b_k \mid 1 \le b_k \le 60,\ b_k$는 수열 $\{b_n\}$의 항$\}$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1=1$, $a_{10}=55$
>
> (나) $n(A\cap B)=n(A\cap B^C)=\frac{1}{2}\times n(A^C\cap B)$
>
> (다) 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 125이다.

집합 B의 모든 원소의 합을 구하시오.
(단, 수열 $\{b_n\}$의 항은 유한개가 아니다.) [4점]

30. 두 실수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 k라 하자. $48k$의 값을 구하시오. [4점]

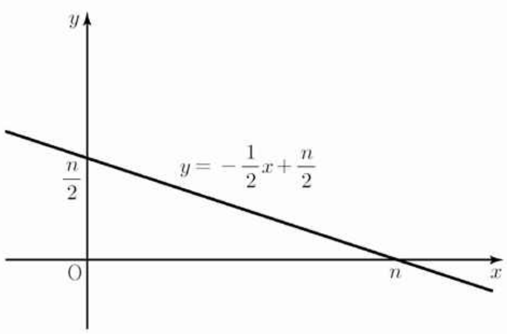
> (가) $ab<0$
>
> (나) 세 수 a, b, ab를 적절히 배열하여 등비수열을 만들 수 있다.
>
> (다) 세 수 a, b, ab를 적절히 배열하여 등차수열을 만들 수 있다.

21. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 연립부등식

$$x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le -\frac{1}{2}x+\frac{n}{2}$$

의 영역의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은? [4점]

① 945　② 946　③ 947　④ 948　⑤ 949



28. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$과 S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $S_k > S_{k+1}$을 만족시키는 가장 작은 자연수 k에 대하여 $S_k=102$이다.
>
> (나) $a_8=-\frac{5}{4}a_5$이고 $a_5 a_6 a_7<0$이다.

a_2의 값을 구하시오. [4점]

21. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{14}의 값은? [4점]

> (가) $\sum_{n=1}^{2m-1} a_n=0$을 만족시키는 자연수 m이 존재한다.
>
> (나) $2\sum_{n=1}^{15} a_n=\sum_{n=1}^{15}|a_n|=90$

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

20. 두 수 2와 4 사이에 n개의 수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n을 넣어 만든 $(n+2)$개의 수 2, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 4가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
집합 $A_n=\{2,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 4\}$에 대하여
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, n은 자연수이다.) [4점]

> <보 기>
>
> ㄱ. n이 홀수이면 $3\in A_n$
>
> ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $A_n \subset A_{2n+1}$
>
> ㄷ. 집합 $A_{2n+1}-A_n$의 모든 원소의 합을 S_n이라 할 때, $S_6+S_{13}=63$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 첫째항이 자연수이고 공차가 음수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $|a_5|+|a_6|=|a_5+a_6|+2$
>
> (나) $\sum_{n=1}^{6}|a_n|=37$

30. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n}=b_n+2$
>
> (나) $a_{2n+1}=b_n-1$
>
> (다) $b_{2n}=3a_n-2$
>
> (라) $b_{2n+1}=-a_n+3$

$a_{48}=9$이고 $\sum_{n=1}^{63}a_n-\sum_{n=1}^{31}b_n=155$일 때, b_{32}의 값을 구하시오.

[4점]

21. 첫째항이 양수이고 공차가 -1보다 작은 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 다음과 같다.

$$b_n=\begin{cases} a_{n+1}-\dfrac{n}{2} & (a_n \ge 0) \\ a_n+\dfrac{n}{2} & (a_n<0) \end{cases}$$

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5<b_6$
(나) $S_5=S_9=0$

$S_n \le -70$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a<b<c \le 20$
(나) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

30. 두 실수 a, b에 대하여 정의역이 $\{x \mid x \ge 0\}$인 함수

$$f(x)=\frac{-ax-b+1}{ax+b} \quad (ab>0)$$

이 있다. 실수 k에 대하여 정의역이 $\{x \mid x \ge 0\}$인 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2k-f(x) & (f(x)<k) \\ f(x) & (f(x)\ge k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\dfrac{1}{2}$
(나) $|g(0)|=1$
(다) 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 두 점 $\left(\dfrac{1}{28}, -k\right)$, $(\alpha, -k)$에서만 만난다. (단, $\alpha>\dfrac{1}{28}$)

직선 $y=m(x-4\alpha)+\dfrac{3}{4}$이 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(m)$이라 할 때, 함수 $h(m)$이 불연속이 되는 모든 실수 m의 값의 합은 M이다. $252M$의 값을 구하시오. [4점]

18. 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$에 기울기가 m인 접선을 두 개 그었을 때, 두 접점을 P, Q라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, P, Q는 서로 다른 점이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 두 점 P, Q의 x좌표의 합은 2이다.
ㄴ. $m>-1$
ㄷ. 두 접선 사이의 거리와 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 같아지는 실수 m이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 함수 $f(x)=x^3+3x^2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정수 a의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]

(가) 점 $(-4, a)$를 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 세 개 있다.
(나) 세 접선의 기울기의 곱은 음수이다.

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)=2x^2-x-4$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)-g(x)$는 x좌표가 2인 점에서 x축에 접한다.
(나) 함수 $y=|f(x)-g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f'(0)=2$일 때, $f(1)$의 최댓값은 α이다. 40α의 값을 구하시오. [4점]

30. 좌표평면에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 27을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=-3$에서만 미분가능하지 않다.
(다) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $f(x)$의 극솟값을 구하시오. [4점]

30. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} kx^2+2kx+2 & (x\ge -2) \\ -3x-4 & (x<-2) \end{cases}, \quad g(x)=-x+a$$

가 있다. 양의 실수 a에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 실근의 합을 $h(a)$라 할 때, 함수 $h(a)$가 항상 연속이 되도록 하는 상수 k의 최솟값을 p라 하자. $120\times\dfrac{1}{p^2}$의 값을 구하시오. [4점]

30. 세 정수 a, b, c에 대하여 이차함수 $f(x)=a(x-b)^2+c$ 라 하고, 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $h(2)<h(-1)<h(0)$
> (나) 함수 $(t^2-t)h(t)$는 모든 실수 t에서 연속이다.

$80f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 세 정수 a, b, c에 대하여 이차함수 $f(x)=a(x-b)^2+c$ 라 하고, 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $h(2)<h(-1)<h(0)$
> (나) 함수 $(t^2-t)h(t)$는 모든 실수 t에서 연속이다.

$80f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

https://semosu.com

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $|f(x)-t|$가 미분가능하지 않은 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f'(x)=0$의 실근은 1, 4뿐이다.
> (나) 함수 $g(t)$는 $t=2$와 $t=-25$에서만 불연속이다.
> (다) 방정식 $f(x)=0$은 4보다 큰 실근을 갖는다.

$f(-1)$의 값은? [4점]

① 41 ② 44 ③ 47 ④ 50 ⑤ 53

30. 함수 $f(x)=|3x-9|$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}f(x+k) & (x<0) \\ f(x) & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 $h(k)$의 값의 합을 구하시오. (단, $k>0$) [4점]

> (가) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) $h'(3)=15$

30. 함수 $f(x)=x^3-12x$와 실수 t에 대하여 점 $(a, f(a))$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속이 되는 k의 값 중에서 가장 작은 값은 0이다.

$\sum_{n=1}^{36} g(n)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t가 다음 조건을 만족시킨다.

> 등식 $f(a)+1=f'(a)(a-t)$를 만족시키는 실수 a의 값이 6 하나뿐이기 위한 필요충분조건은 $-2<t<k$이다.

$f(8)$의 값을 구하시오. (단, k는 -2보다 큰 상수이다.) [4점]

21. 0이 아닌 실수 m에 대하여 두 함수

$$f(x)=2x^3-8x,$$

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{47}{m}x+\frac{4}{m^3} & (x<0) \\ 2mx+\frac{4}{m^3} & (x \ge 0) \end{cases}$$

이 있다. 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$ 중 크지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $m=-1$일 때, $h\left(\frac{1}{2}\right)=-5$이다.

ㄴ. $m=-1$일 때, 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수는 2이다.

ㄷ. 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1인 양수 m의 최댓값은 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ