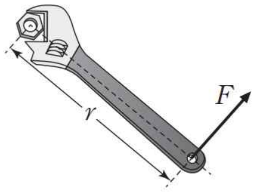
THEME 03 – 돌림힘과 평형상태

❶ 돌림힘(토크)

(1) 돌림힘

물체의 <u>회전 운동</u>을 발생시키거나 변화시키는 물리량을 돌림힘 또는 토크라고 한다.
따라서 알짜 돌림힘이 있다면, 물체는 회전 운동을 하게 된다.

(2) 돌림힘의 크기



$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$

$\underline{\tau=rF\sin\theta}$ (단위 : $N \cdot m$)

(3) 돌림힘의 방향

동일한 회전축에 대하여 <u>시계 방향과 반시계 방향</u>으로 나타낼 수 있다.

❷ 돌림힘의 평형

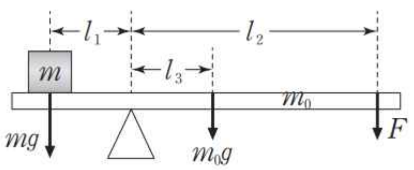
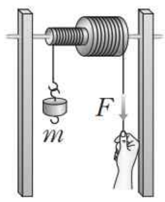
(1) 평형 상태(힘의 평형과 돌림힘의 평형 조건을 모두 만족하는 상태)

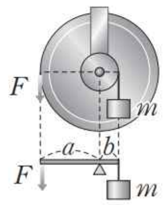
① 힘의 평형: 물체에 작용하는 알짜힘이 0이다. (위쪽에서 가해지는 힘의 합 = 아래쪽에서 가해지는 힘의 합)

② 돌림힘의 평형: 물체에 작용하는 돌림힘의 합이 0이다. (시계방향의 돌림힘 합 = 반시계 방향의 돌림힘 합)

(2) 도구를 이용한 평형상태

지레와 축바퀴 모두 사람이 직접 들어올리기 힘든 물체를 들어 올릴 때 이용하는 도구이다.

<table>
<tr><th></th><th>지레</th><th>축바퀴</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>


</td></tr>
<tr><td>힘의
평형</td><td>$mg+m_0g-N=0$</td><td>(X)</td></tr>
<tr><td>돌림힘
평형</td><td>$l_1mg=l_2F+l_3m_0g$
$\underline{F=\frac{l_1m-l_3m_0}{l_2}g}$</td><td>$aF=bmg$
$\underline{F=\frac{b}{a}mg}$</td></tr>
</table>

(3) 돌림힘의 평형시 회전축

<u>물체가 정지 상태라면 회전축을 어디로 잡던지 상관없이 돌림힘의 합은 0이 된다.</u>
막대의 가운데를 회전축으로 잡아도 되고, 막대의 끝을 회전축으로 잡아도 된다라는 뜻이다.
하지만, 힘이 많아지게 되면 식이 길어지므로, <u>구하고 싶지 않은 값에 회전축을 두고 풀자.</u>

❸ 무게 중심(질량 중심)

(1) 무게 중심

[정의] 물체를 이루는 입자들의 전체 무게가 한 곳에 작용한다고 볼 수 있는 점이다.

→ 무게 중심이란 중력에 의한 알짜 토크가 0인 점이다.

→ 무게 중심에 받침대를 놓는다면 토크 평형이 일어난다.

→ 무게 중심에 힘을 주면 회전이 일어나지 않는다.

(2) 무게중심 작도로 찾기

물체를 실에 아무렇게나 묶는다. 물체가 정지하게 되면 이때 선(AB)을 쭉 잇는다.

다시 물체에 실을 아무렇게나 묶는다. 물체가 정지하게 되면 이때 선(CD)을 쭉 잇는다.

이때 AB와 CD가 만나는 점이 무게중심이다.

(3) 무게중심 수학적으로 찾기

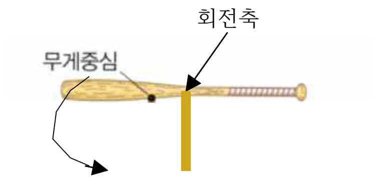
① $x_{cm} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$ (질량중심) (질량과 힘이 섞여 있다면 사용 불가)

② $x_{cm} = \dfrac{F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \cdots}{F_1 + F_2 + F_3 + \cdots}$ (무게중심) (확장형)

(4) 회전축과 무게중심($\tau = rF$에 의해 회전하게 된다.)

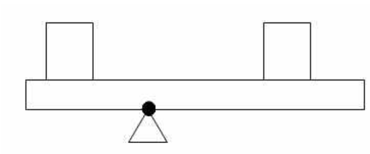
① 무게중심이 회전축의 왼쪽에 있을 경우 : 왼쪽으로 회전

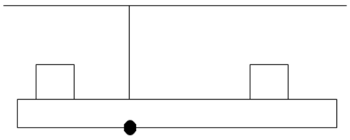
② 무게중심이 회전축의 오른쪽에 있을 경우 : 오른쪽으로 회전



(5) 무게중심과 받침대

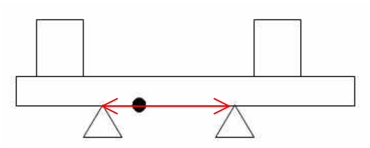
① 받침대 1개인 경우

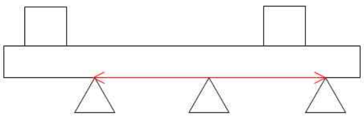


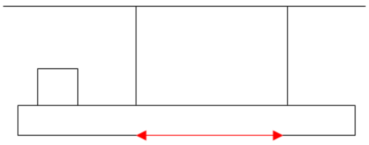


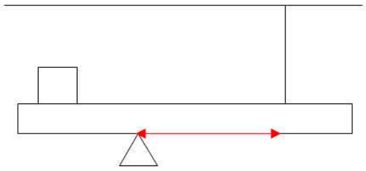
무게중심에 받침대를 둔다면 토크 평형이 일어난다.

② 받침대가 2개 이상인 경우



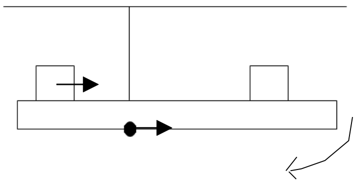


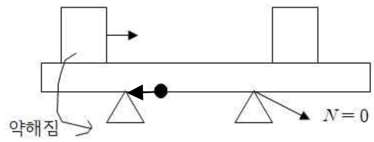




받침 영역 내에 무게 중심이 존재하면 토크 평형을 유지한다.

[무게중심 변화량]





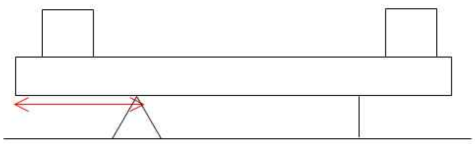
무게중심은 $x=\dfrac{\sum mr}{\sum m}$ 이다.

이때 물체 m_a의 위치가 k만큼 증가하게 된다면

$$x'=\frac{(\sum mr)+m_a\times k}{\sum m}=\frac{\sum mr}{\sum m}+k\frac{m_a}{\sum m}=x+k\frac{m_a}{\sum m}$$

따라서, 질량이 m_a인 물체가 k만큼 움직이면 계의 질량중심도 $k\times\dfrac{m_a}{\sum m}$만큼 변함을 알 수 있다.

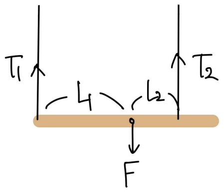
③ 무게중심에 받침대 1개 + 실 1개(아래의 실)



질량중심이 축 왼쪽에 위치할 때 토크 평형을 유지한다.

❹ 힘의 분배

(1) 힘의 내분



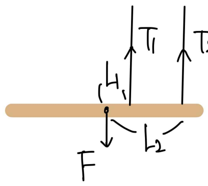
i) $T_1 + T_2 = F$

ii) $T_1 L_1 = T_2 L_2$

① $T_1 = \dfrac{L_2}{L_1 + L_2} F$

② $T_2 = \dfrac{L_1}{L_1 + L_2} F$

(2) 힘의 외분



i) $T_1 + T_2 = F$

ii) $FL_2 = (L_2 - L_1) T_1$

① $T_1 = \dfrac{L_2}{L_2 - L_1} F$

② $T_2 = \dfrac{-L_1}{L_2 - L_1} F$

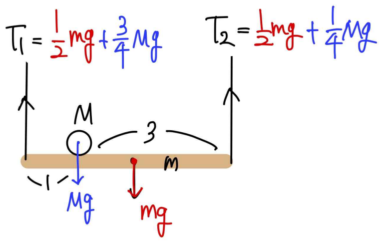
[중요개념]
T_1에 물체가 놓여있다면, $T_2 = 0$이 된다.

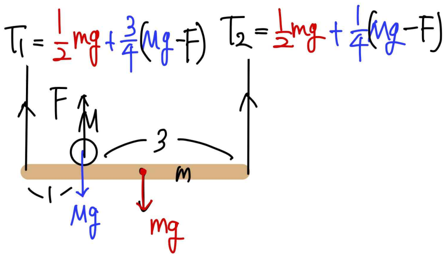
[정리]

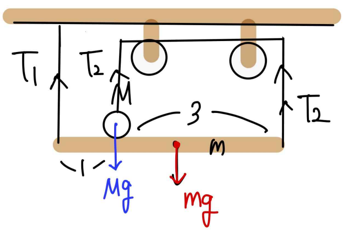
$T_1 = \dfrac{L_2}{T\text{사이의 거리}} F$ (단, 외부에서는 멀면 (−)부호가 붙는다.)

(의의 : 힘의 분배는 힘평과 토평이므로 굳이 다른 공식을 쓸 필요가 없다.)

[예제]







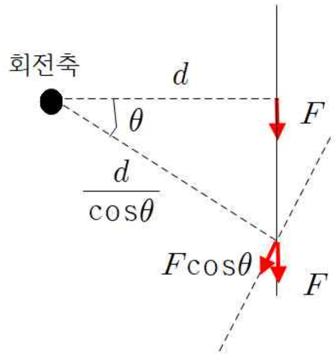
실1) $T_1 = \dfrac{1}{2}mg + \dfrac{3}{4}(Mg - T_2)$

실2) $T_2 = \dfrac{1}{2}mg + \dfrac{1}{4}(Mg - T_2)$

물체) $T_2 + N = Mg$

❺ 힘의 내리꽂음

(1) 힘의 내리꽂음의 증명

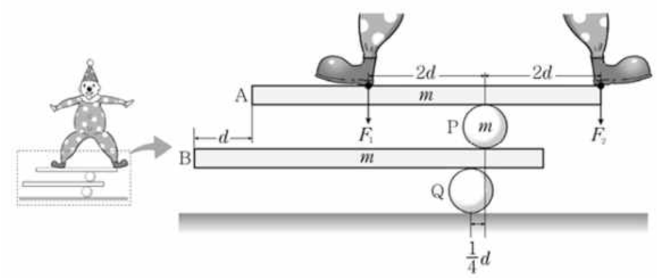


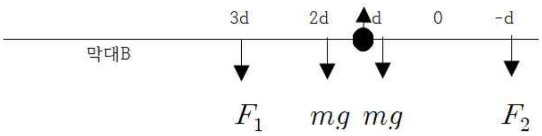
$\tau_1 = Fd$

$\tau_2 = F\cos\theta \cdot \frac{d}{\cos\theta} = Fd$

따라서 힘의 작용선 방향으로 힘을 평행이동 시켜도 괜찮다.

(2) 힘의 내리꽂음의 활용



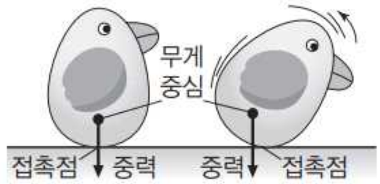


$\frac{7}{4}F_1 + \frac{3}{4}mg = \frac{1}{4}mg + \frac{9}{4}F_2 \rightarrow 9F_2 - 7F_1 = 2mg$

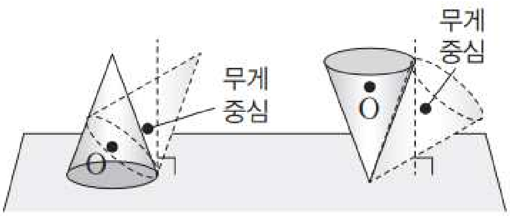
❻ 구조물의 안정성

(1) 구조물의 안정성
바닥이 넓고 무게중심이 낮을수록 구조물의 안정성이 높다.

(2) 안정한 평형과 불안정한 평형
① 넘어지지 않는 경우
질량중심이 받침면보다 뒤에 있으면 중력에 의한 복원력에 의해 원래 위치로 돌아간다.



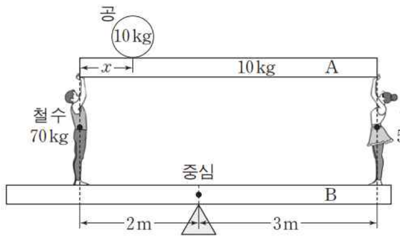
② 넘어지는 경우
질량중심이 받침면보다 앞에 있으면 중력에 의한 돌림힘이 물체를 회전시켜 넘어트린다.



CODE 1. 막대에 받침점 1개(외력X)

[2014년 수능 20번]

20. 그림과 같이 받침대 위에 놓인 나무판 B 위에서 철수와 영희가 공이 놓여 있는 나무판 A의 양쪽 끝을 수직으로 떠받치고 있다. 직육면체 나무판 A와 B는 지면과 수평을 이루고 있으며 공은 정지해 있다. B의 중심에 놓인 받침대로부터 철수와 영희까지의 거리는 각각 2m, 3m이고, A의 길이는 5m이다. 철수와 영희의 질량은 각각 70kg, 50kg이고, 공과 A의 질량은 각각 10kg이다. 공과 A, B의 밀도는 균일하다.

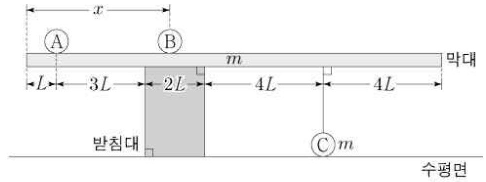


A의 왼쪽 끝에서 공까지의 거리 x는? (단, 중력 가속도는 10m/s^2이고, 나무판의 두께와 폭은 무시한다.) [3점]

① 0.5m ② 0.6m ③ 0.7m ④ 0.8m ⑤ 0.9m

[2023년 수능 15번]

15. 그림과 같이 받침대에 놓인 막대가 수평으로 평형을 유지하고 있을 때, 막대 위에 물체 A, B가 놓여 있고, 물체 C는 막대와 실로 연결되어 수평면 위에 놓여 있다. B는 막대의 왼쪽 끝에서 x만큼 떨어진 위치에 놓여 있으며, 막대가 수평으로 평형을 유지할 수 있는 x의 최솟값, 최댓값은 각각 $3L$, $9L$이다. 막대와 받침대의 길이는 각각 $14L$, $2L$이고, 막대와 C의 질량은 m으로 같으며, A, B의 질량은 각각 m_A, m_B이다.



$\frac{m_A}{m_B}$는? (단, 막대의 밀도는 균일하며, 막대의 두께와 폭, 실의 질량, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

힘의 내리꽂음을 사용하고, 받침점에 토방사용

$140+10(2-x)=150+5$

$160-10x=155$

$x=0.5m$

STEP 1. 최소

$3m_A+m_B=3m+6m=9m$

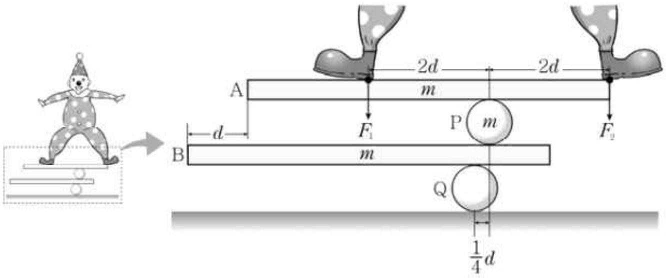
STEP 2. 최대($T=0$)

$5m_A=3m_B+m$

연립) $m_A=2m$, $m_B=3m$

CODE 2. 막대를 한 실로 연결(외력O)

20. 그림과 같이 공 P, Q가 받치고 있는 나무판 A, B가 수평을 유지하고 있다. A 위에는 철수가 정지해 있다. A, B의 길이는 각각 $6d$이고, A, B, P의 질량은 각각 m이다.



철수의 오른발과 왼발이 A를 수직으로 누르는 힘의 크기를 각각 F_1, F_2라고 할 때, $F_1 : F_2$ 는? (단, A, B의 밀도는 균일하며 두께와 폭은 무시한다.) [3점]

① 1 : 3 ② 5 : 7 ③ 7 : 9 ④ 9 : 11 ⑤ 11 : 13

[정석]

STEP 1. B 토크방정식

$mg(2d-\frac{1}{4}d)=(mg+f)\frac{1}{4}d \rightarrow f=6mg$

STEP 2. A 토크방정식

$2F_1d+mgd=2F_2d \rightarrow F_1-F_2=-\frac{1}{2}mg$

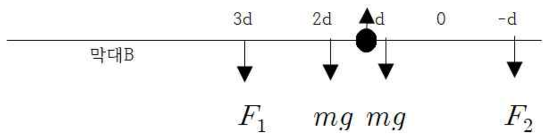
STEP 3. A 운동방정식

$F_1+F_2+mg=6mg \rightarrow F_1+F_2=5mg$

$\therefore F_1=\frac{9}{4}mg,\ F_2=\frac{11}{4}mg$

[힘의 내리꽂음(압축형)]

STEP 1. 계의 토크방정식



$\frac{7}{4}F_1+\frac{3}{4}mg=\frac{1}{4}mg+\frac{9}{4}F_2$

$\rightarrow 9F_2-7F_1=2mg$

STEP 2. A의 토크방정식(간단해보임)

$2F_1d+mgd=2F_2d \rightarrow F_1-F_2=-\frac{1}{2}mg$

$\therefore F_1=\frac{9}{4}mg,\ F_2=\frac{11}{4}mg$

[힘의 재분배]

STEP 1. B 토크방정식

$mg(2d-\frac{1}{4}d)=N\frac{1}{4}d \rightarrow N=7mg$

즉, P가 B를 누르는 힘의 크기는 $N=7mg$라는 것이다.

STEP 2. 역의 힘의 분배

P가 B에 작용하는 힘은 $N'=6mg$이다.

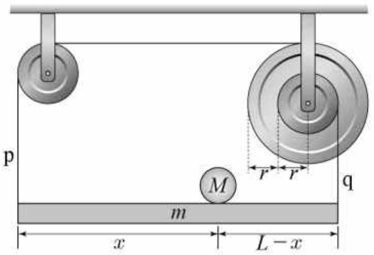
$F_1=\frac{1}{2}(6mg)-\frac{3}{4}mg=\frac{6}{2}-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}mg$

$F_2=\frac{1}{2}(6mg)-\frac{1}{4}mg=\frac{6}{2}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}mg$

CODE 3. 막대에 두 실로 연결(힘의 내분점)

[2017년 7월 20번] 기본형

20. 그림과 같이 길이 L, 질량 m인 막대가 수평을 이루며 정지해 있다. 막대의 왼쪽 끝과 오른쪽 끝은 각각 도르래와 축바퀴의 작은 바퀴에 실 p, q로 연결되어 있다. 축바퀴의 큰 바퀴와 작은 바퀴의 반지름은 각각 $2r$, r이다. 막대의 왼쪽 끝에서 x 만큼 떨어진 지점에 질량 M인 물체를 놓을 때 막대는 수평을 유지한다.



질량 M인 물체를 놓는 위치 x를 변화시켜 막대의 수평을 유지할 수 있는 m의 최댓값은? (단, 막대의 밀도는 균일하고, 막대의 두께와 폭, 실의 질량, 물체의 크기 및 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

① $\frac{1}{2}M$ ② M ③ $2M$ ④ $\frac{5}{2}M$ ⑤ $3M$

STEP 1.
토크의 관계에 의하여 $T_p = T$, $T_q = 2T$라고 둘 수 있다.

STEP 2.

$T = \frac{1}{2}mg + \frac{L-x}{L}Mg$

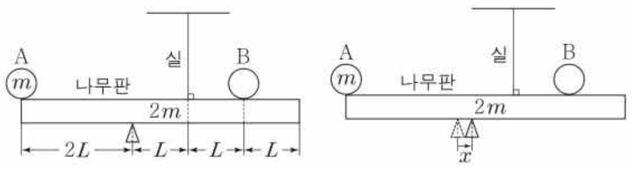
$2T = \frac{1}{2}mg + \frac{x}{L}Mg$

$\therefore m = \frac{6M}{L}x - 4M \rightarrow x = L$일때 $m = 2M$으로 최대이다.

CODE 4. 막대에 두 실로 연결(힘의 외분점)

[2017년 4월 18번] 수직항력과 실 = 두 실

18. 그림 (가)와 같이 물체 A, B가 놓인 밀도가 균일한 나무판이 수평으로 평형을 유지하고 있다. 받침대가 나무판을 떠받치는 힘의 크기는 실이 나무판을 당기는 힘의 크기의 3배이다. 그림 (나)는 (가)에서 받침대의 위치를 오른쪽으로 x만큼 이동시켰을 때 나무판이 평형을 계속 유지하고 있는 모습을 나타낸 것이다. A, 나무판의 질량은 각각 m, $2m$이다.



(가) (나)

나무판이 평형을 유지할 수 있는 x의 최댓값은? (단, 나무판의 두께와 폭, A와 B의 크기, 실의 질량, 모든 마찰은 무시한다.) [3점]

① $\frac{1}{6}L$ ② $\frac{1}{5}L$ ③ $\frac{1}{4}L$ ④ $\frac{1}{3}L$ ⑤ $\frac{1}{2}L$

STEP 1. (가) 실이 두 개인 상황(나무판과 장력)

나무판 A B

받침대) $3T = mg + \frac{3L}{L}mg - \frac{L}{L}Mg = 4mg - Mg$

실) $T = mg - \frac{2L}{L}mg + \frac{2L}{L}Mg = -mg + 2Mg$

연립) $4mg - Mg = -3mg + 6Mg$ → $\underline{m = M \ \& \ T = mg}$

STEP 2. 조건해석

나무판이 평형을 유지 → 평형점을 넘어가면 나무판이 회전하여 실의 장력이 0이된다.

STEP 3. (나) 실이 한 개인 상황(장력0으로 사라짐)

$mg(2L + x) - 2mg(\frac{1}{2}L - x) - mg(2L - x) = 0$

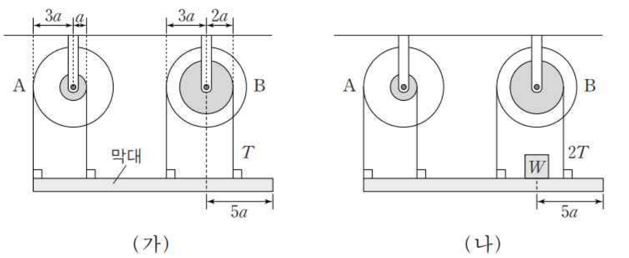
$\therefore x = \frac{1}{4}L$

CODE 5. 변화량

지금까지는 한가지의 상황에 대해서만 봤다.
문제에서 만약에 2가지의 상황을 준다면, 어떻게 풀 지 생각해보자.
상황1) 토크방정식 + 운동방정식
상황2) 토크방정식 + 운동방정식
이렇게 연립을 해서 풀게 된다면 굉장히 식이 많아지고 복잡스럽게 된다.
이럴때는 토크의 변화량으로 푸는게 빠르다.
상황 1,2가 물체가 계속 평형을 이루고 있다면
시계방향으로 토크의 변화량 = 반시계방향으로 토크의 변화량

[2018년 9월 18번] (오답률 64.1)

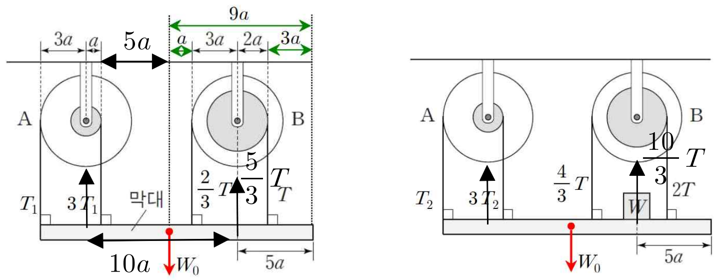
18. 그림 (가)와 같이 길이가 $18a$인 막대가 두 축바퀴 A, B에 실로 연결되어 평형 상태에 있다. 그림 (나)는 (가)에서 막대의 오른쪽 끝에서 $5a$만큼 떨어진 지점에 무게가 W인 물체를 올려놓았을 때, 막대가 평형을 유지하고 있는 모습을 나타낸 것이다. (가), (나)에서 B의 작은 바퀴의 실이 막대를 당기는 힘의 크기는 각각 T, $2T$이다. 축바퀴의 큰 바퀴와 작은 바퀴의 반지름은 A가 각각 $3a$, a이고, B가 각각 $3a$, $2a$이다.



막대의 무게는? (단, 막대의 밀도는 균일하고, 막대의 폭과 두께, 실의 질량, 물체의 크기, 축바퀴의 두께 및 마찰은 무시한다.) [3점]

① $\frac{2}{3}W$ ② W ③ $\frac{4}{3}W$ ④ $\frac{5}{3}W$ ⑤ $2W$

$5a$가 축의 오른쪽을 기준으로 있으므로, 오른쪽을 축으로 잡자.
물체가 생기므로 반시계방향으로 토크가 생긴다.
오른쪽 줄은 $\frac{5}{3}T$만큼 강해지므로 시계방향 토크가 생긴다.
왼쪽 줄은 힘의 변화에 의하여 $\frac{5}{3}T-W$만큼 약해지므로 반시계방향 토크가 생긴다.
나머지는 토크변화가 없으므로 이 서로가 평형을 이루고 있다고 해석해도 무방하다.



[Tip]
도르레에 두 실이 연결되어 있다면,
실의 합은 도르레의 축과 나란하다.

가) B) $\frac{5}{3}T=\frac{6}{10}W_0=\frac{3}{5}W_0 \rightarrow T=\frac{9}{25}W_0$

변화량) $5W+15\cdot(\frac{5}{3}T-W)=5\cdot\frac{5}{3}T \rightarrow T=\frac{3}{5}W=\frac{9}{25}W_0 \rightarrow W_0=\frac{5}{3}W$