기출의 파급효과

수학영역 | 수학Ⅱ (하)

smart is sexy
Orbi.kr

기출의 파급효과

수학Ⅱ(하)

기출의 파급효과

수학Ⅱ(하)

저자의 말

1. 기출의 파급효과에는 수학 II 기출을 푸는 데 필수적인 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

1년 동안 열심히 공부한 학생이 현장에서 평가원 문제를 틀리는 이유는 개념이 부족해서가 아니라, 조건이 필연적으로 요구하는 태도와 도구가 없기 때문입니다. 따라서 각 Chapter를 교과서 목차를 따르지 않고 기출을 푸는데 필요한 태도와 도구를 바탕으로 작성했습니다.

2. 분권의 이유

'미적분도 아니고 수학 II 수준에서 분권이 필요할 정도의 분량이 나올 수 있나?' 하는 의문이 들 수도 있습니다. 분권에는 크게 두 가지 이유가 존재하는데,

(1) 필수적이지만 교과서에는 없는 Chapter의 존재

〈Chapter 3. 다양한 정리와 함수의 극대, 극소〉, 〈Chapter 4. 다항함수, 대칭성〉, 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉, 〈Chapter 10. 복합적 개념이 포함된 킬러 문항〉 다섯 개의 챕터는 교과서에 없지만 중요한 태도와 도구를 정리한 챕터입니다.

특히 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉는 저학년 과정에서 모두 배우는 내용이지만 방정식, 항등식, 부등식, 합성함수, 역함수의 대강의 '느낌'만 가진 채 실제 문제에서 '어떻게' 처리해야 하는지 모르는 학생이 많아 독립된 챕터를 구성했습니다. 따라서 실제 수학 II 교육과정에서 직접적으로 다루는 내용보다 훨씬 많은 내용을 다룹니다.

(2) 자세한 해설

기출 해설을 정말 자세히 썼습니다.

어떤 조건부터 적용해야 하는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 할 수밖에 없는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 하면 안 되는지,
여기서 왜 식으로 풀어야 하는지,
여기서 왜 그래프로 풀어야 하는지에 관한 내용을 다 담았습니다.

'딱딱하고', '불친절하게' 해설하면 분량은 많이 줄일 수 있겠으나, 그 경우 '기출의 파급효과'를 선택하는 의미가 퇴색되죠. 진정한 기출 분석은 위와 같은 질문에 모두 답할 수 있게끔 공부하는 것이기에 최대한 해설을 자세하게 썼습니다.

따라서 위의 두 가지 이유로 불가피하게 분권하게 되었습니다. 추천하는 것은 상하권을 순차적으로 학습하는 것이지만 본인이 어느 한 권에 해당하는 내용에는 자신이 있으면 다른 한 권만 공부하셔도 됩니다.

3. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

칼럼 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다. 예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

4. 선별 문항

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다. 이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 기출의 파급효과 수학II에는 평가원, 교육청, 사관학교, 경찰대 기출 중 가장 핵심이 되는 162문제를 담았습니다. 경찰대 문제는 매우 적습니다. **수학II(상) 94문제, 수학II(하) 68문제입니다.**

※ 문제 좌표에서 '가형' 또는 'B형' 또는 '자연계'라고 표시된 것을 제외하면 전부 나형' 또는 'A형' 또는 '인문계' 기출입니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 워크북 전자책도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 워크북은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 **워크북 수학II(상) 170문제, 워크북 수학II(하) 124문제**로 구성되어 있습니다. 워크북의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

본권과의 호환성을 위하여 워크북에 담긴 기출 역시 본권의 목차를 따릅니다. **본권 학습을 하면서 워크북도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** 본권을 잘 학습하셨다면 워크북에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

본권을 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다.
본권만으로도 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 본권과 워크북을 '제대로' 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

간단한 교재 이용법

원활한 교재 이용을 위해 대단원, 중단원, 중소단원, 소단원 구분법을 소개하겠습니다.

대단원 제목입니다.

Chapter 01 함수의 극한, 연속, 미분가능성

대단원에 속한 중단원 제목입니다.

함수의 극한

중단원에 속한 중소단원 제목입니다.

1. 함수의 극한값 존재 조건(= 수렴 조건)

중소단원에 속한 소단원 제목입니다.

(1) 극한의 사칙연산

위를 참고하여 학습하신다면 Chapter 내용이 더욱 유기적으로 연결될 것입니다. 헷갈린다면 Chapter를 순서대로 읽어나가셔도 전혀 문제가 없습니다.

원활한 교재 이용을 위해 예제, 예제 해설 구분법을 소개하겠습니다.

본문과 함께 소개되는 예제입니다. 칼럼을 읽다 보면 중간중간에 예제들이 등장합니다.

예제(3) 14학년도 6월 평가원 9번

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$일 때, $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

본문과 함께 소개되는 예제 해설입니다. 자세하고 본문에서 배운 도구와 태도를 일관적으로 적용합니다.

1. $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$, $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$

두 극한식을 보자마자 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$**을 이용하여** $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$**을 구해야겠다는 생각**이 들어야 한다. 예제(2)는 치환을 해야만 수월하게 풀 수 있었지만, 예제(3)은 출제자가 친절하게 계산에 편한 형태를 제시했다.

2. $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$

$\therefore \lim_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$, $\lim_{x\to2}f(x)=3$

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)+3\}\{f(x)-3\}}=\lim_{x\to2}\frac{1}{f(x)+3}\times\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-3}$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$$

답은 ⑤!!

해설 활용법

1. 문제를 완벽하게 풀었다고 생각하더라도 해설을 읽어보세요. 특히, 예제는 해설까지 본문의 연장선이라 생각하시면 됩니다. 본문에서 설명한 일관된 태도와 도구를 적용하면서도 다양한 관점으로 접근하므로 본인의 풀이와 비교하면서 꼼꼼히 읽어보시길 바랍니다.

2. 해설 사이사이에 색을 추가한 글씨로 태도를 적어놨습니다. 실전에서는 사소한 태도에서 등급이 갈리므로 태도도 매우 중요합니다.

3. 문제 해결에 있어서 가장 중요한 것은 조건의 우선순위입니다. 즉, 먼저 적용해야 할 조건이 출제 의도로서 존재하고, 이러한 우선순위는 단계적 풀이와 연결됩니다.

   수학을 잘하는 사람일수록 풀이과정이 깔끔한 이유도 명확한 단계를 밟아나가기 때문입니다. 예제 해설을 보면서 어떤 조건을 우선적으로 적용하는지, 어떠한 단계를 밟아가는지에 주목하세요.

4. 해설은 대부분 학생이 스스로 이해할 수 있도록 친절하면서도, 필연적이고 일관된 논리를 통해 전개됩니다. 어려운 문항일수록 어떠한 필연성과 일관성을 통해 풀어나가는지 기대하고 해설을 보면 좋을 것 같습니다.

파급의 기출효과

cafe.naver.com/spreadeffect
파급의 기출효과 NAVER 카페

기출의 파급효과 시리즈는 기출 분석서입니다. 기출의 파급효과 시리즈는 국어, 수학, 영어, 물리학 1, 화학 1, 생명과학 1, 지구과학 1, 사회·문화가 예정되어 있습니다.

준킬러 이상 기출에서 얻어갈 수 있는 '꼭 필요한 도구와 태도'를 정리합니다.
'꼭 필요한 도구와 태도' 체화를 위해 관련도가 높은 준킬러 이상 기출을 바로바로 보여주며 체화 속도를 높입니다. 단시간 내에 점수를 극대화할 수 있도록 교재가 설계되었습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다.

교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

기출의 파급효과 팀 소속 오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다.
위 저자 분들의 컨텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

더 궁금하시다면 https://cafe.naver.com/spreadeffect/15에서 확인하시면 됩니다.

memo

Chapter

06

함수의 방정식 vs
항등식 vs 부등식

Chapter

06 함수의 방정식 vs 항등식 vs 부등식

방정식, 항등식, 부등식은 수능 수학의 거의 모든 문항에서 나오므로 각각의 정의, 특징, 주의점을 정확히 공부해야 한다. 또한, 세 가지 식을 정확히 구분할 수도 있어야 하는데 **방정식과 항등식의 구분이 핵심**이다.

방정식과 항등식의 느낌만 대충 갖고 있을 뿐 그 둘의 정확한 정의와 차이가 무엇인지 제대로 대답하지 못하는 경우가 많고 복잡한 문제 속에서 이 둘을 혼동하는 경우도 많다. 이번 챕터를 공부한 뒤에는 이 셋을 정확히 구분할 수 있길 바란다.

방정식

정의 : 변수를 포함하는 등식에서, 변수의 값에 따라 참 또는 거짓이 되는 식이다. 등식이 참이 되게 하는 변수의 값을 근 또는 해라고 한다. 방정식의 근을 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다.

중요 개념 : '함수 $f(x)$, $g(x)$에 대해 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.'

방정식에서 딱 하나만 기억해야 한다면 이걸 꼽고 싶다. 수능 수학에서 빠질 수 없는 개념이다. 수학 II 킬러 문제에서 이 개념이 사용되지 않는 문제는 거의 없다고 보면 된다. 또한, 이후 등장할 〈방정식을 푸는 두 가지 관점〉과도 연결되는 개념이다.

1. 다항 방정식

(다항 방정식이 포함한 항들의 계수는 모두 실수라고 하자.)

수학 II 에서 등장하는 대부분의 방정식은 다항 방정식이다. 방정식이 미지수(일반적으로 x)에 대한 다항식으로 이루어져 있는 경우 다항 방정식이라 하고, 최고차항의 차수가 n이면 n차 방정식이라 부른다.

중학교와 고등학교 저학년 과정에서 주로 배운 일차방정식, 이차방정식, 삼차방정식이 모두 다항 방정식의 대표적인 예다.

n차 방정식을 다음과 같이 이해해도 좋다. 'n차 다항함수 $f(x)$에 대해 $f(x)=0$인 방정식'

다항 방정식은 다음과 같은 성질을 갖는다.

① n차 방정식은 복소수 범위에서 n개의 근을 갖는다.

※ 여기서 복소수란?
실수 a, b에 대하여 $a+bi$꼴로 표현할 수 있는 수를 말한다. 고교 과정에서 다루는 수는 모두 복소수이며 수능에서는 대부분 $b=0$일 때, 즉 실수일 때를 다룬다.

'복소수 범위에서 n개의 근을 갖는다'를 정확하게 받아들이자. 근은 '허수'일 수도 있으며, '중근'일 수도 있다. 특히 근의 개수를 묻는 문제에서 허근와 중근을 배제하지 않으면 문제를 내기 굉장히 까다로워지므로 실제 수능 문제에서는 '서로 다른 실근의 개수'라는 표현이 가장 많이 등장한다.

② 다항 방정식이 허근을 가질 때, 허근은 켤레복소수의 형태로 존재한다. 따라서 허근의 개수는 '짝수'이다.
구체적인 이유까지는 알 필요 없으나 내용 자체는 암기하자. 다항 방정식이 허근 $a+bi$를 가진다면, 켤레복소수인 $a-bi$도 근으로 갖는다. 따라서 다항 방정식의 허근의 개수는 홀수일 수 없다.

③ n이 짝수일 때 n차 방정식은 실근을 갖지 않을 수도 있지만, n이 홀수일 때 n차 방정식은 적어도 하나의 실근을 갖는다.

홀수차 다항함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이다.
따라서 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 적어도 한 점에서 만날 수밖에 없다. (최고차항의 계수가 음수일 때도 똑같은 논리이다.) 일차함수의 그래프와 삼차함수의 그래프를 그려보면 쉽게 이해할 수 있다.

예제(1) 11학년도 6월 평가원 가형 12번

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f'(\alpha)=0$ 이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$ 이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$ 이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근이다. 이것만 가지고 할 수 있는 것은 없으므로 보기로 바로 들어가자.

1. $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다. (O)

※ $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$일 때 $f(x)$가 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는 이유

$f(x)=(x-\alpha)P(x)$($P(x)$는 다항식)으로 설정하고 양변을 x에 대해 미분하면
$f'(x)=P(x)+(x-\alpha)P'(x)$

$f'(\alpha)=P(\alpha)=0$이므로 $P(x)$는 $(x-\alpha)$를 인수로 갖는다. $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$
$\therefore f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$

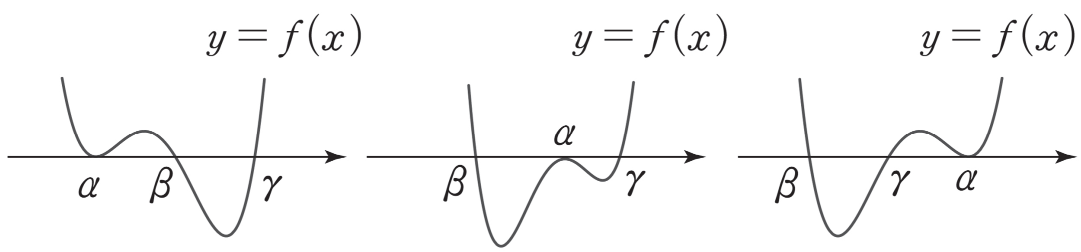
2. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이므로 $f'(\alpha)=0$ 또는 $f'(\beta)=0$이다. 케이스를 분류하자.

(1) $f'(\alpha)=0$이고 $f'(\beta)\neq 0$일 때

$f(x)$는 $(x-\alpha)^2(x-\beta)$을 인수로 가지므로 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
$f(x)$를 식으로 표현하면 다음과 같다. $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)(ax+b)$

주의 : $f(x)$는 $(x-\alpha)^2(x-\beta)$를 인수로 가지는데, 나머지 인수에서 허근이 나올 수는 없나?
그럴 수 없다. 다항 방정식이 허근을 가지는 경우, 허근은 항상 켤레복소수의 형태($a\pm bi$)로 쌍을 이뤄 존재한다. **방정식의 허근의 개수는 항상 짝수이다.** (단, 짝수$=0, 2, 4\cdots$)

$(x-\alpha)^2(x-\beta)$를 인수로 갖는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프를 그려봐도 $f(x)$는 허근을 갖지 않음을 알 수 있다. (최고차항의 계수가 음수일 때의 그래프는 아래의 그래프들을 x축을 기준으로 대칭시키면 된다.)

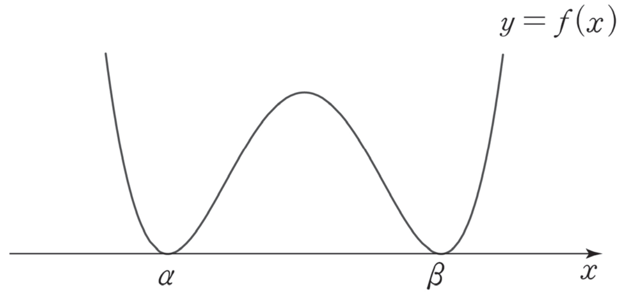


(2) $f'(\alpha) \neq 0$이고 $f'(\beta) = 0$일 때

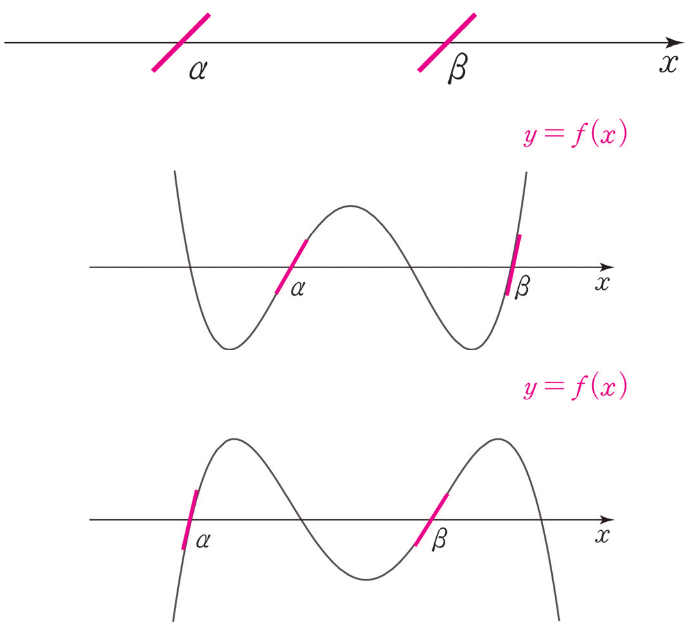
$f'(\alpha) = 0$이고 $f'(\beta) \neq 0$일 때와 똑같으므로 생략한다.

(3) $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$일 때

$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$, $f(\beta) = f'(\beta) = 0$이므로 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$을 인수로 가진다.
방정식 $f(x) = 0$이 중근 두 개를 가지므로 허근은 존재하지 않는다. (O)



3. 가장 쉬운 방법은 그래프를 그려보는 것이다.



$f'(\alpha)f'(\beta) > 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다. (O)

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳으므로 답은 ⑤!!

(ㄷ) 선지 보충 : 실전에서는 위와 같이 그래프로 판단하는 것이 제일 효율적이다. 이러한 그래프 풀이도 사차함수의 개형을 고려하는 논리적인 풀이이고 그 자체로 충분하다. 하지만 무언가 논리적으로 풀지 않은 듯한 느낌을 받을 학생을 위해 수식적으로도 증명해주겠다. 어떤 방법일지 스스로 고민해보고, 다음 페이지를 보자.

※ **"$f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다"의 수식적 증명**

1. 서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근이므로 $f(x)$의 식을 다음과 같이 설정하자.
   $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$

   $(x-\alpha)(x-\beta)$를 제외하면 $f(x)$는 이차식 인수를 가지는데, 이를 ax^2+bx+c로 설정하면 계산이 불필요하게 복잡해진다. 깔끔하게 이차식 $g(x)$를 인수로 가진다고 설정하는 게 좋다.

2. **$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$과 $f'(\alpha)f'(\beta)>0$만 가지고 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 갖는 것을 증명해야 한다.**
   $f'(x)=(x-\beta)g(x)+(x-\alpha)g(x)+(x-\alpha)(x-\beta)g'(x)$이므로
   $f'(\alpha)f'(\beta)=-(\alpha-\beta)^2g(\alpha)g(\beta)>0$

   부등식의 양변을 0이 아닌 수로 나눌 수 있으므로 양변을 $-(\alpha-\beta)^2$으로 나누자.
   음수로 나누게 되므로 부등호 방향을 바꿔줘야 함에 주의하자.
   $-(\alpha-\beta)^2g(\alpha)g(\beta)>0$, $g(\alpha)g(\beta)<0$

3. 할 수 있는 것은 다 했다. $g(\alpha)g(\beta)<0$만 가지고 증명을 끝내야 한다. 우리는 방정식 $f(x)=0$이 $x=\alpha$, $x=\beta$가 아닌 서로 다른 두 실근을 가짐을 보여야 한다.
   즉, 실근의 존재성을 보여야 하므로 사잇값 정리와 평균값 정리를 떠올리자.

   $g(\alpha)g(\beta)<0$이므로 사잇값 정리를 적용하자. $g(x)$는 이차함수이므로 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이다. 따라서 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 (α, β)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

   이로써 방정식 **$f(x)=0$의 서로 다른 세 실근**을 밝혀냈다. (ㄴ)을 풀 때 사차방정식이 한 개의 허근을 가질 수 없음을 보였으므로 **나머지 하나의 근도 실근일 수밖에 없다.**

   주의 : 서로 다른 네 실근이라고 했으므로 나머지 하나의 실근이 다른 세 실근과 다름을 확인해줘야 한다.
   $f(x)=0$이 중근 k와 서로 다른 두 실근을 가진다고 가정하면 $f'(k)=0$이다. 그런데, $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이므로 $k\neq\alpha, \beta$이다. 따라서 $f(x)$는 $x=k$에서 x축과 접하고, $x=\alpha$, $x=\beta$에서 x축과 만난다. 이 경우 $f(x)$의 그래프를 직접 그려보면 $f'(\alpha)f'(\beta)<0$이므로 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 가진다.

comment

이런 증명도 충분히 소화해야 하나?
'실전'에서는 이렇게까지 증명할 필요가 없다. 그래프로만 확인하고 넘어가면 된다. 평가원도 이 문항의 이의제기에 대해 '본 문항의 목적은 사차함수의 그래프를 이용하여 사차방정식의 근의 성질을 알 수 있는지를 평가하는 것이라 답하였다.
그러나 이런 증명도 소화하고 넘어갔으면 한다. 단지 이 문제를 맞히기 위함이 아니라 이 증명 속에 들어있는 개념, 정리, 논리는 다른 킬러 문항을 풀 때도 도움이 많이 될 것이다.

2. 방정식의 변형

방정식은 절대로 **마음대로 변형해선 안 된다.** 방정식의 **근에 영향**을 줄 수 있기 때문이다. 방정식에 아무런 제약 없이 쓸 수 있는 건 (양변에 동일한 수를 더하거나 빼기), (0이 아닌 수를 곱하거나 나누기) 정도밖에 없다. 이외의 처리를 하고 싶다면 반드시 **근이 영향받을 수 있음을 고려해줘야 한다.**

(1) 동일한 문자로 나누기

방정식 $x^3+2x^2-3x=0$에서 양변을 x로 나눈다면 이 방정식의 근 중 $x=0$이 있음을 고려하고 나눠줘야 한다. 적잖은 학생들이 x를 함부로(실수로) 나눈 뒤에 답이 안 나와서 헤매는 경우가 많기에 이는 정확히 암기하고, 방정식을 식으로 다룰 때 항상 의식하자.

(2) 미분

방정식은 아무런 목적 없이 미분 (혹은 적분)해선 안 된다. **방정식에서 그래프의 관점을 적용하여 함수의 그래프를 그리는 경우에는 방정식의 양변에 있는 식을 각각 미분할 수 있겠으나** 이러한 목적 없는 미분 (혹은 적분)은 금물이다.

예를 들어, 방정식 $f(x)=g(x)$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프를 그리기 위해 $f'(x)$와 $g'(x)$를 각각 관찰할 수는 있으나, 방정식의 양변을 x에 대하여 미분하여 $f'(x)=g'(x)$를 도출하는 것은 오류이다.

(3) 제곱

자주 나오는 주제는 아니지만 '방정식에 어떠한 처리를 하고 싶다면 근이 영향받을 수 있음을 고려해야 한다'를 심층적으로 이해하기 위해 공부해보자.

방정식 $f(x)=g(x)$를 풀기 위해 양변을 제곱한 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$을 관찰한다고 하자. 이때, **방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 근이 방정식 $f(x)=g(x)$의 근과 같다고 생각하면 안 된다.** 이는 인수분해를 통해 쉽게 증명할 수 있다. $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$에서 $\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0$, $\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로 방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 근은 $f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=-g(x)$를 만족시키는 x이다.

따라서 방정식의 양변을 제곱할 때에도 방정식의 근이 영향을 받을 수 있음을 고려해야 하고, 대표적인 예로 '무리방정식'이 있다. 예를 들어 **방정식 $\sqrt{7-2x}=x-2$의 근을 구하기 위해 양변을 제곱**할 때 기존 방정식의 근에 영향을 주지 않으려면 방정식의 옆에 $7-2x\geq 0$, $x-2\geq 0$을 써놓아야 한다.

즉, 양변을 제곱한 방정식의 근 중에서 $2\leq x\leq \dfrac{7}{2}$를 만족시키는 근이 방정식 $\sqrt{7-2x}=x-2$의 근이 된다.

$\sqrt{7-2x}=x-2$의 양변을 제곱하면 $7-2x=x^2-4x+4$, $x^2-2x-3=0$, $(x-3)(x+1)=0$

$2\leq x\leq \dfrac{7}{2}$이므로 $x=3$이다. 혹은 제곱을 하여 나온 근을 $\sqrt{7-2x}=x-2$에 대입하여 성립하는 것만을 고를 수도 있다.

$\sqrt{7-2x}=x-2$에 $x=-1$을 대입하면 $\sqrt{9}=-3$이므로 등식이 성립하지 않지만, $x=3$을 대입하면 $1=1$이므로 등식이 성립한다.

3. 합성

※ 애초에 방정식에서 합성을 취하는 것을 한 번도 생각해본 적이 없을 확률이 높고, 방정식에 직접 합성을 취하는 게 명확한 출제 의도로 나온 적도 없다. 그러나 이 내용을 설명하는 것은 다음의 두 가지 이유 때문이다.

① 오개념의 가능성
② 합성함수 주제에 대한 더욱 깊은 사고

따라서 지금부터 설명할 내용을 이해만 해도 좋다. 암기한 다음에 '방정식에서 합성을 취하는 행위'를 실전에서 적극적으로 활용할 필요도 없고, 오히려 더욱 복잡해질 수도 있다.

결론부터 말하고 들어가겠다.
방정식 $f(x)=g(x)$의 양변에 $p(x)$를 합성하려면, $f(x)$의 치역의 원소와 $g(x)$의 치역의 원소를 모두 포함하는 집합을 정의역으로 갖는 함수 $p(x)$가 일대일함수이어야 한다. ($f(x), g(x)$ 각각의 공역은 각각의 치역과 같다고 하자.)

말이 어렵다. 예시를 통해 천천히 이해해보자. '정의역', '치역', '일대일함수'의 개념은 당연히 알고 있어야겠다.

※ **일대일함수**
함수 $f: X \to Y$에서 정의역 X의 원소 x_1, x_2에 대하여
'$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$' (혹은 그 대우 '$f(x_1) = f(x_2)$이면 $x_1 = x_2$')
가 성립할 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다. 일대일대응은 일대일함수에서 치역과 공역이 일치하는 경우를 말한다.

방정식을 다룰 때는 방정식의 근을 훼손하지 않는 것이 핵심이다.
따라서 방정식 $f(x)=g(x)$을 풀기 위해 **방정식의 양변에 함수** $p(x)$**를 합성하려면**

① **방정식** $f(x)=g(x)$, ② **방정식** $p(f(x))=p(g(x))$

①, ②의 근이 정확히 일치해야 한다는 보장이 있어야 한다. ①, ②의 근이 일치하지 않으면 기존 방정식(①)의 근을 훼손했다는 말이 되기 때문이다.

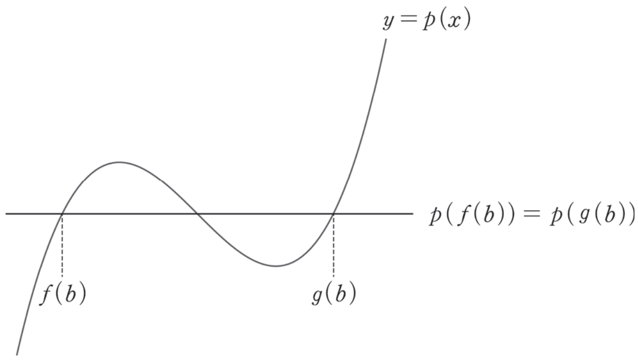
이제 ①, ②의 근이 일치하기 위한 조건이 **'{$f(x)$의 치역의 원소와 $g(x)$의 치역의 원소를 모두 포함하는 집합}을 정의역으로 갖는 함수 $p(x)$가 일대일함수'**인 이유를 알아보자.

우선, **'{$f(x)$의 치역의 원소와 $g(x)$의 치역의 원소를 모두 포함하는 집합}을 정의역으로 갖는'**은 합성함수 $p(f(x))$와 $p(g(x))$가 정의될 조건이다. 만약 함수 f의 치역의 한 원소 a가 함수 p의 정의역에 없다면 a를 p에 대입할 수가 없다. 즉, 합성함수가 정의되지 않는다.

그런데 정의역은 대부분 실수 전체의 집합이므로 이 조건은 크게 신경쓰지 않아도 좋다. 중요한 건 다음 조건이다.

'함수 $p(x)$가 일대일함수'인 이유를 알아보자. 실수 b가 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근이 아니라고 하면 $f(b)=c,\ g(b)=d\ (c\neq d)$이다. ($b$는 방정식의 근이 아니므로 $f(b)\neq g(b)$이어야 한다.)

그런데 만약 $p(x)$가 일대일함수가 아니라면 $p(c)=p(d)$일 가능성이 존재하므로
방정식 $p(f(x))=p(g(x))$에 $x=b$를 대입했을 때 $p(f(b))=p(g(b)) \Leftrightarrow p(c)=p(d)$가 되어 **방정식 $p(f(x))=p(g(x))$의 근에 b도 포함될 수 있다.**



위의 그림에서 일대일함수가 아닌 $y=p(x)$에 대해, 방정식 $f(x)=g(x)$의 근에는 b가 없었으나 방정식 $p(f(x))=p(g(x))$의 근에는 b가 포함되었다. 즉, 기존의 방정식의 근을 훼손한 셈이다.

이처럼 방정식의 새로운 근이 생기지 않으려면 함수 $p: X \to Y$에서 정의역 X의 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 '$x_1\neq x_2$이면 $p(x_1)\neq p(x_2)$'를 만족시켜야 하므로 함수 $p(x)$가 일대일함수이어야 한다.
(일대일대응이면 당연히 일대일함수이므로 $p(x)$는 일대일대응이어도 된다.)

한편, 방정식에서 합성을 이용하는 대표적인 경우가 로그방정식이다.

예시 14학년도 6월 평가원 A형 27번

방정식 $x^{\log_2 x}=8x^2$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. [4점]

1. 수학 I 을 제대로 공부한 학생이라면 방정식의 양변에 밑이 2인 로그를 취해야겠다는 생각이 들 것이다.
   $\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8x^2,\ (\log_2 x)^2=3+2\log_2 x$
   $\log_2 x=t$로 치환하면 $t^2-2t-3=0,\ (t-3)(t+1)=0 \quad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=3$

2. 따라서 $\log_2 x=-1$에서 $x=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$, $\log_2 x=3$에서 $x=2^3=8$이므로 $\alpha\beta=\dfrac{1}{2}\times 8=4$이다.

comment

해설처럼 **방정식의 양변에 밑이 2인 로그를 취할 수 있는 이유는 $y=\log_2 x$가 일대일대응이므로 방정식의 근에 영향을 주지 않기 때문이다.**

예제(2) 09학년도 6월 평가원 가형 10번

서로 다른 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수

$$y=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 개수를 $N(f,\ g)$라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$이면 $N(f,\ g)=2$이다.
ㄴ. $N(f,\ g)=N(g,\ f)$
ㄷ. $h(x)=x^3$이면 $N(f,\ g)=N(h \circ f,\ h \circ g)$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄴ, ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

함수 $y=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x \geq a) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건 : $f(a)=g(a)$

따라서 $N(f,\ g)$은 '방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수'를 의미한다.

1. 방정식 $x^2=x+1$의 실근의 개수는 2개이다. $\therefore N(f,\ g)=2$(O)

   이차방정식이므로 판별식을 이용해도 되고, $y=x^2$과 $y=x+1$의 그래프를 그린 다음에 교점의 개수를 파악해도 된다.

2. 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 당연히 방정식 $g(x)=f(x)$의 실근의 개수와 같다. (O)

3. 이 문항을 예제로 넣은 핵심 이유가 되는 보기이다. 이 보기는 방정식 $f(x)^3=g(x)^3$과 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수가 동일한지를 묻고 있다.

   본문에서 공부했던 대로, $h(x)=x^3$은 일대일 대응이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 양변에 $h(x)$를 합성해도 합성 후의 방정식의 근은 원래 방정식의 근과 동일하다.

   따라서 방정식 $f(x)^3=g(x)^3$와 방정식 $f(x)=g(x)$의 당연히 실근의 개수는 동일하다. (O)

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳으므로 답은 ⑤!!

3. 방정식을 푸는 두 가지 도구 : 인수분해 vs 그래프

방정식의 하이라이트다. 세뇌당할 정도로 머리에 집어넣자. **방정식은 '인수분해'로 풀거나 '그래프'로 푼다.**

수학Ⅱ의 대부분 주제에서 식의 관점과 그래프의 관점 두 가지가 쓰이는데, 여기서도 인수분해는 식의 관점이고, 그래프는 그래프의 관점에 포함된다.

(1) 인수분해

말 그대로 인수분해를 말한다. **이차, 삼차, 사차방정식**이 나오면 주로 사용한다. 인수분해를 하는 방법은 여러 가지가 있으나 이는 고등학교 저학년 수준에서 다루므로 생략하겠다. 숙지가 안 된 학생들은 고등학교 1학년 수학 교과서를 공부하자. (인수분해를 다루는 대표적인 도구는 완전제곱식, 이차방정식의 인수분해법, 조립제법, 치환이 있다.)

인수분해에서 주의해야 할 점은 **방정식이 변수가 아닌 미지수를 포함할 때**이다. 방정식에 미지수가 포함되면 인수분해가 불가능하다고 단정하고선 인수분해를 시도조차 하지 않는 경향이 많은데, 매우 안 좋은 습관이다. 두 가지 예시를 보자.

e.g. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2-nx+4(n-4)=0$ (20학년도 6월 평가원 13번)
n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$(20학년도 9월 평가원 26번)

→ 변수가 아닌 미지수 n을 포함했으므로 인수분해를 할 수 없을까? 아니다.
$x^2-nx+4(n-4)=(x-n+4)(x-4)=0$,
$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=(x-n)(x-n+1)=0$으로 두 방정식 모두 인수분해가 가능하다.

태도 : 어떤 조건이 미지수를 포함해도 확실한 정보를 캐낼 수 있을 때가 많다.

참고로 이차방정식을 볼 때는 근과 계수와의 관계가 아닌 인수분해를 먼저 떠올려야 한다. 인수분해가 불가능한 상황일 때 근과 계수와의 관계나 근의 공식 등 다른 도구를 적용해야 한다.

- 〈Chapter 4. 다항함수〉

또한, **다항함수 $f(x)$의 그래프 개형을 알아내야 할 때 인수분해**가 많이 쓰인다.
방정식 $f(x)=0$에서 바로 인수분해를 통해 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점을 파악할 수도 있고,
방정식 $f'(x)=0$에서 인수분해를 통해 미분계수가 0인 x좌표를 알아낼 수도 있다.

e.g. 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4 ⋯ (20학년도 9월 평가원 17번)

→ $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$은 인수분해하기 힘들지만 $f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)$은 예쁘게 인수분해된다.

(2) 그래프

다음으로 방정식을 푸는 두 가지 도구 중 그래프의 관점을 살펴보자.
방정식 $f(x)=g(x)$를 그래프로 접근한다는 것은 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 그래프의 교점 관찰을 의미한다.
방정식의 실근은 그래프의 교점의 x좌표와 같기 때문이다.

이때, 어떤 그래프를 관찰할지는 스스로 선택하면 된다. 예를 들어 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근을 구해야 할 때,

① $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프 각각을 따로 그려 관찰하는 게 편하다면 두 함수의 교점을 찾으면 되고,

② 두 함수의 그래프를 따로 그려 관찰하는 게 어렵다면 $h(x)=f(x)-g(x)$, $y=h(x)$의 그래프와 x축의 교점을 관찰하면 된다.

③ 혹은 관찰하기 편하도록 방정식 양변의 항들을 적절히 이항하여 $p(x)=k$ 등과 같은 꼴로 만들 수도 있다.

※ 가능한 경우가 많긴 하지만 어떤 그래프로 관찰해야 하는지가 출제 의도로서 정해진 경우가 대부분이다. 기출 분석은 이러한 출제 의도를 알아보는 공부이기도 하다.

comment

지금까지 방정식을 푸는 두 가지 관점, 인수분해와 그래프를 살펴보았지만 상당 부분 이미 알고 있던 내용이었을 것이다. 몰랐다면 정말 중요한 내용이므로 100% 소화하자.

그러나 방정식을 볼 때 중요한 것은 그러한 세부적인 내용보다도 이 두 가지 관점을 의식적으로 생각하고 상황에 맞는 관점을 꺼내 적용할 수 있어야 한다는 점이다.
태도 : 방정식을 본다면 인수분해와 그래프 두 가지 관점을 떠올리자.

그리고 **두 관점의 사용은 유기적이어야 한다.** 인수분해가 불가능하다면 그래프를 사용할 수 있어야 하고, 그래프를 그릴 수 없다면 인수분해를 사용할 수 있어야 한다.

예제(3) 19학년도 6월 평가원 21번

상수 $a,\ b$에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)>-1$
(나) $f(1)-f(-1)>8$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $-1<x<1$일 때, $f'(x)\geq 0$이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

대부분의 평가원 문항에서 **제시된 조건 자체를 그대로 식에 대입하는 것은 좋지 못한 행동**이다. **우선은 식과 조건을 관찰하고 그 의미를 파악하는 과정이 선행**되어야 한다. 그러나 이 문제에서는 $f(x)$ 식과 조건에서 큰 의미를 발견할 수 없다. 게다가 $f(x)$ 식 또한 특이하다.

〈평소의 평가원이었을 경우 $f(x)$에 대하여 사용했을 조건〉

$f(x)$는 최고차항 계수가 1인 삼차함수이며 $f(0)=0$

〈이 문제에서 $f(x)$에 대하여 사용한 표현〉

$f(x)=x^3+ax^2+bx$

평가원은 $f(x)$의 식을 미지수를 포함한 채로 굳이 써줬다. 이는 (가), (나) 조건을 단순히 $f(x)$의 식에 대입하면 된다는 평가원의 메시지로도 해석할 수 있다. 즉, **단순 대입이 출제 의도**이다.

$f(-1)=-1+a-b>-1,\ a>b$

$f(1)-f(-1)=(1+a+b)-(-1+a-b)=2+2b>8,\ b>3$

$\therefore a>b>3$

(가), (나) 조건을 종합하여 부등식 $a>b>3$을 얻었다. 이 이상 제시된 조건으로 할 수 있는 것은 없으므로 보기로 들어가자.

1. $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 실근의 존재성을 파악하기 위해서 판별식을 따져보면 된다. $\dfrac{D}{4}=a^2-3b>ab-3b=b(a-3)>0$이므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (O)

2. 계속해서 $f'(x)$에 집중하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$인지 물었다면 판별식만 따져보면 되지만 (ㄴ) 선지는 정의역을 제한했다. **$f'(x)$의 꼭짓점(대칭축)과 $f'(-1)$, $f'(1)$의 값 등을 종합적으로 따져봐야 한다.**

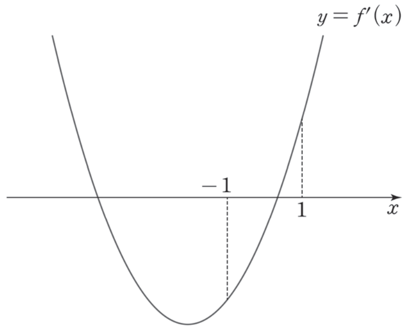
   ① $f'(x)=3x^2+2ax+b=3\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^2-\dfrac{a^2}{3}+b$

   꼭짓점의 x좌표 $-\dfrac{a}{3}$는 -1보다 작다. 즉, 이차함수의 대칭축은 $x=-1$의 왼쪽에 위치한다.

   ② $f'(-1)=3-2a+b<0$

   ③ $f'(1)=3+2a+b>0$

   위 정보를 바탕으로 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 위치 관계를 표현하자.



$-1<x<1$ 일 때, $f'(x)<0$ 인 구간이 존재한다. (X)

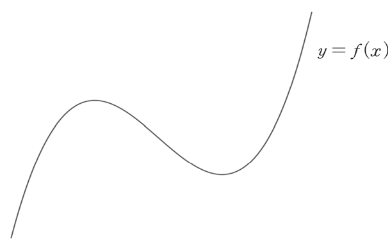
3. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 실근의 개수를 따져야 한다.
본문에서 배운 대로 방정식을 푸는 **두 가지 관점, 인수분해와 그래프**를 떠올리자.

$f(x)$의 식이 미지수 $a,\ b$를 포함했으므로 인수분해 관점은 후 순위로 미루고 그래프 관점부터 적용하자.

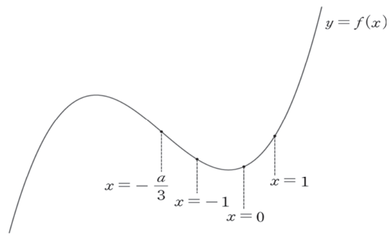
방정식 $f(x)-f'(k)x=0$ 의 서로 다른 실근의 개수
$\Leftrightarrow$ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f'(k)x$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수

$y=f'(k)x$는 $f'(k)$를 기울기로 갖고 항상 $(0,\ 0)$을 지나는 직선이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(k)x$가 모두 점 $(0,\ 0)$을 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f'(k)x$의 그래프는 이미 하나의 교점을 가진다. 따라서 $y=f(x)$의 그래프에서 $x=0$의 위치를 파악하자.

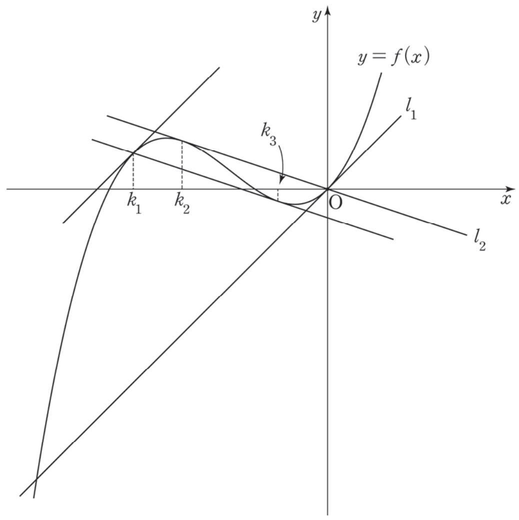
방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.

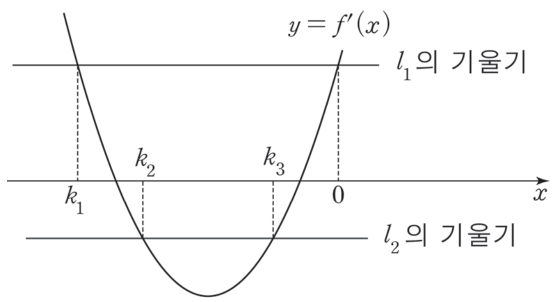


$f'(0)=b>0$**이고** $0>-\dfrac{a}{3}$**이므로** $x=0$**은** $f(x)$**의 극솟점의 오른쪽에 위치한다.**



직선 $y=f'(k)x$와 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 가지는 상황을 그래프로 표현하자. **삼차함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 개의 교점을 형성하려면 접할 수밖에 없다.**





구하는 것을 헷갈리면 안 된다. 우리는 두 그래프의 교점이 2개가 되도록 하는 k의 개수를 구해야 한다.

$y=f'(k)x$가 l_1인 경우 : l_1의 기울기와 동일한 미분계수를 갖는 k의 값은 0, k_1
$y=f'(k)x$가 l_2인 경우 : l_2의 기울기와 동일한 미분계수를 갖는 k의 값은 k_2, k_3

$0 \neq k_1 \neq k_2 \neq k_3$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 개수는 4이다. (O)

ㄱ, ㄷ만 옳으므로 답은 ③!!

※ (ㄷ) 선지 - 인수분해 풀이

방정식을 다루는 인수분해 관점을 적용하여 풀어보자.

방정식 $f(x)-f'(k)x=0$

$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx-(3k^2+2ak+b)x=0$

$\Leftrightarrow x^3+ax^2-(3k^2+2ak)x=0$

$\Leftrightarrow x\{x^2+ax-(3k^2+2ak)\}=0$

삼차방정식 $x\{x^2+ax-(3k^2+2ak)\}=0$은 이미 $x=0$을 하나의 실근으로 가진다.
따라서 삼차방정식이 서로 다른 2개의 실근을 갖기 위해서는 다음의 두 가지 경우가 가능하다.

①이차방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$이 0이 아닌 중근을 가질 때
②이차방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$이 서로 다른 두 근 $0, \alpha\,(\alpha \neq 0)$를 가질 때

①이차방정식이 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=a^2-4(-3k^2-2ak)=0$

$a^2+8ak+12k^2=0,\ (a+2k)(a+6k)=0$

$k=-\dfrac{a}{2}$ 또는 $k=-\dfrac{a}{6}$

섣불리 끝내면 안 된다. k가 위의 두 값을 가질 때 방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$이 $x=0$이 아닌 중근을 갖는지를 끝까지 확인해줘야 한다.

$k=-\dfrac{a}{2}$ 또는 $k=-\dfrac{a}{6}$일 때, 방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$

$\Leftrightarrow$ 방정식 $\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2=0$

방정식은 중근 $x=-\dfrac{a}{2}$를 가진다. $a>b>3$에서 $a\neq 0$이므로 중근은 0이 아니다.

② **이차방정식이 서로 다른 두 근 $0, \alpha\,(\alpha \neq 0)$를 가지므로 이차방정식에 $x=0$을 대입하자.**

$-(3k^2+2ak)=0$

$k=0$ 또는 $k=-\dfrac{2a}{3}$

마찬가지로 k가 두 값을 가질 때 방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$이 서로 다른 두 근 $0, \alpha\,(\alpha \neq 0)$를 가지는지 확인해야 한다.

$k=0$ 또는 $k=-\dfrac{2a}{3}$일 때,

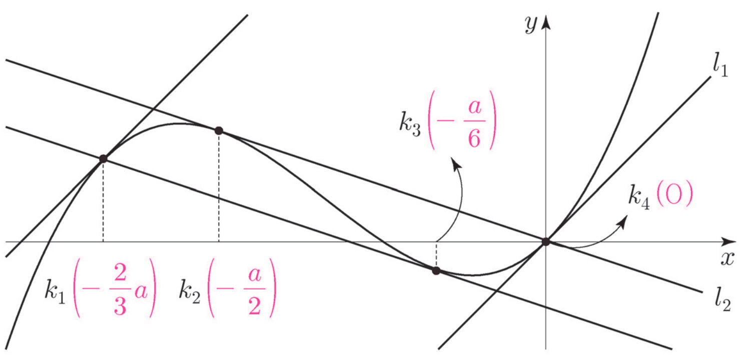
방정식 $x^2+ax-(3k^2+2ak)=0$

$\Leftrightarrow$ 방정식 $x(x+a)=0$

$a \neq 0$이므로 방정식은 서로 다른 두 근 $0, \alpha\,(\alpha \neq 0)$를 가진다.

따라서 조건을 만족시키는 k의 값은 $-\dfrac{2a}{3},\ -\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a}{6},\ 0$로 4개이다. (O)

인수분해 관점에서 나온 4개의 k의 값을 그래프에 대응하면 다음과 같다.



항등식

정의 : 등식이 변수의 값에 상관없이 항상 참인 경우를 항등식이라고 한다.
특징 : 방정식은 근을 훼손할 가능성이 있기에 함부로 건드릴 수 없다. 이와 달리,

① 항등식은 대부분의 변형이 가능하다.

즉, 더하기 빼기, 곱하기 나누기 미분, 적분, 합성 등이 자유롭게 가능하다. 애초에 모든 변수의 값에 대해 성립하기 때문에 근이라는 개념을 신경 쓸 필요 없기 때문이다. 단, 나누기에서 나누는 수나 변수는 0이 아니어야 하고, 적분 시에는 적분상수를 유의해야 한다.

② 별도의 처리 or 제시된 형태 자체에서 의미 파악

항등식은 방정식과 달리 제약이 거의 없으므로 정해진 해결방법도 존재하지 않는다. 단지 상황에 따라 **그에 맞는 처리**를 해주면 된다.

그런데 별도의 처리를 하지 않고도 **항등식의 제시된 형태 자체에서 그 의미를 파악**하는 것이 출제 의도인 경우도 존재한다.

따라서 **'별도의 처리'와 '형태 자체의 의미 파악' 중 어느 것이 출제 의도인지는 알아서 파악해야 한다.**
식을 잘 관찰하고 다양한 문제를 풀어보며 경험을 많이 쌓아 두자.

③ 항등식이 정의된 집합 주의

제시된 항등식이 정의된 집합이 (실수 전체의 집합)인지, (특정 집합을 제외한 실수 전체의 집합)인지, (특정 집합)에서만 정의되었는지 잘 관찰해야 한다.

e.g. $f(x)=g(x)$가 모든 실수 x에 대해 정의되었다. → (실수 전체의 집합)에서 정의된 항등식
$f(x)=g(x)$가 $x \neq 1$, $x \neq 2$인 모든 실수 x에 대해 정의되었다. → (특정 집합을 제외한 실수 전체의 집합)에서 정의된 항등식

$f(x)=g(x)$가 모든 정수 x에 대해 정의되었다. → (특정 집합)에서 정의된 항등식
$f(x)=g(x)$가 $-1 \leq x < 1$인 모든 실수 x에 대해 정의되었다. → (특정 집합)에서 정의된 항등식

기출에 나온 항등식의 예시를 보자. (iii), (iv)는 쉽게 해결할 수 있는 문항으로 해설도 바로 적었다. 여기서 다루지 않는 문항은 이후에 다룰 것이므로 걱정하지 않아도 된다.

(i) 17학년도 수능 20번 조건 (나)

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)

(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^t |f'(x)|dx = f(t)+f(0)$이다.

comment

정의된 집합 : 실수 전체의 집합이 아닌, 1보다 큰 모든 실수 t의 집합임을 주의하자.

처리 : **정적분으로 정의된 함수의 기본형** $\int_0^t |f'(x)|dx$가 제시되었으므로 다음의 두 가지의 처리가 요구된다. (정적분으로 정의된 함수와 관련된 내용은 〈Chapter 7. 부정적분과 정적분〉의 정적분으로 정의된 함수 파트에서 자세히 다룬다.)

① **위끝과 아래끝을 같게 만드는 수 ($t=0$) 대입**. 단, 이 문제에서 항등식은 1보다 큰 모든 실수 t에 대해 정의되었으므로 $t=0$을 대입할 수 없다.

② **미분** : $\int_0^t |f'(x)|dx$에서 $|f'(t)|$가 연속이므로 항등식의 양변을 t에 대하여 미분가능하다.
단, 양변을 t에 대하여 미분한 $|f'(t)|=f'(t)$은 $t>1$인 t에서 성립한다.

(ii) 08년 10월 교육청 가형 20번

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

(가) $f(x)g(x)=x^3+3x^2-x-3$

comment

정의된 집합 : 모든 실수

처리 : (가)에서 (우변)이 $x^2(x+3)-(x+3)=(x^2-1)(x+3)=(x+1)(x-1)(x+3)$**으로 인수분해 된다.**

(ⅲ) 19학년도 6월 평가원 17번

함수 $f(x)=ax^2+b$가 모든 실수 x에 대하여 $4f(x)=\{f'(x)\}^2+x^2+4$를 만족시킨다. $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

comment

정의된 집합 : 모든 실수

처리 : 함수 $f(x)$의 식이 주어졌으므로 항등식에 대입한 뒤 계수 비교법을 사용하면 된다.

$$4ax^2+4b=(2ax)^2+x^2+4=(4a^2+1)x^2+4$$

$4a=4a^2+1$, $4b=4$

$(2a-1)^2=0$, $b=1$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+1$이므로 $f(2)=3$이다. **답은 ①!!**

(ⅳ) 19학년도 수능 14번

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+ax^2-2$를 만족시킬 때, $f'(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

comment

정의된 집합 : 모든 실수

처리 : 정적분으로 정의된 함수의 기본형이 제시되었으므로 두 가지의 처리가 요구된다.

① **위끝과 아래끝을 같게 만드는 수 ($x=1$) 대입**

② **미분** (피적분함수인 $\dfrac{d}{dx}f(x)=f'(x)$가 연속이므로 양변을 x에 대하여 미분가능)

※ 정적분으로 정의된 함수와 관련된 내용은 〈Chapter 7. 부정적분과 정적분〉의 정적분으로 정의된 함수 파트에서 자세히 다룬다.

항등식의 양변에 $x=1$을 **대입**하면 $0=1+a-2$ $\quad\therefore\ a=1$

항등식의 양변을 x에 대하여 **미분**하면 $\dfrac{d}{dx}f(x)=3x^2+2ax$

$f'(x)=3x^2+2ax=3x^2+2x$

$\therefore\ f'(a)=f'(1)=5$, **답은 ⑤!!**

예제(4) 20학년도 수능 28번

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이다.

(나) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 5\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

조건 (가)에서 **모든 실수 x에 대하여 성립하는 항등식**이 제시되었다.

$$\int_{1}^{x} f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$$

이 항등식의 경우 **식의 제시된 형태 자체에서 의미를 파악**해서 풀거나 **별도의 처리**를 통해 풀 수도 있다. 하나씩 살펴보자.

1. 식의 제시된 형태 자체에서 의미 파악

아직 정적분 파트를 들어가기 전이지만, 이 문제에서 정적분은 그다지 중요한 요소는 아니다.

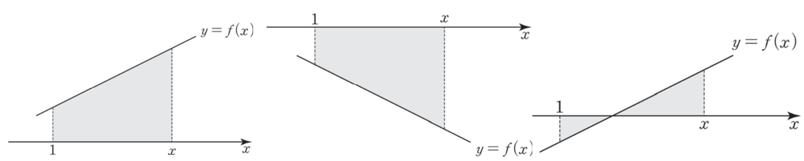
$\int_{1}^{x} f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$에서

(좌변) : $\int_{1}^{x} f(t)dt$ → 함수 $y=f(x)$의 1부터 x까지의 정적분을 의미한다.

(우변) : $\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$ → 좌변과 달리, 우변은 보자마자 의미를 파악하기가 힘들다. 별도의 처리를 해야 하는 건 아닌가 싶기도 하다. 그러나 '관찰'이 우선이다. 우변을 잘 관찰하면 좌변의 적분구간과 겹치는 $1, x$가 많이 등장하는데, 이는 절대로 우연의 일치가 아니다.

태도 : '공통부분'은 반드시 출제 의도와 연결된다.

표현이 정확하지는 않지만, **우변은 바로 '사다리꼴' 모양의 정적분을 표현한 식이고, $y=f(x)$는 '직선'이다.** 일차함수가 아닌 직선인 이유는 $f(x)=c$인 상수함수일 때도 (가) 조건을 만족시키기 때문이다.



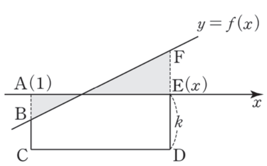
첫 번째와 두 번째 그림의 경우 $\int_{1}^{x} f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$의 좌, 우변이 모두 사다리꼴의 '정적분'을 표현한 식임을 쉽게 이해할 수 있다. 그렇다면 세 번째 그림에서는 어떻게 $\int_{1}^{x} f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$가 성립할 수 있을까?

오른쪽과 같이 사다리꼴 모양을 직접 만들어주면 된다.

$\int_{1}^{x} f(t)dt=$(사다리꼴 BCDF의 넓이) − (사각형 ACDE의 넓이)

$= \frac{x-1}{2}[\{k+f(1)\}+\{k+f(x)\}]-k(x-1)$

$= (x-1)\left\{\frac{f(x)+f(1)}{2}\right\}$



2. 따라서 $f(x)$는 직선이다. $f(0)=1$이므로 $f(x)=ax+1$로 식을 세울 수 있다.
아직 쓰지 않은 (나) 조건을 이용하여 a의 값을 구하자.

(나) $\int_0^2 f(x)dx = 5\int_{-1}^1 xf(x)dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 (ax+1)dx = 5\int_{-1}^1 x(ax+1)dx$

$\int_{-1}^1 x(ax+1)dx$의 적분 구간 위끝과 아래끝은 $x=0$에 대해 대칭이고, $y=ax^2$은 우함수,

$y=x$는 기함수이므로 $\int_{-1}^1 ax^2dx = 2\int_0^1 ax^2dx$, $\int_{-1}^1 xdx=0$

따라서 $5\int_{-1}^1 x(ax+1)dx = 10a\int_0^1 x^2\,dx$이다.

※ 이 내용은 〈Chapter 8. 정적분의 활용〉에서 자세히 배운다.

$\int_0^2 (ax+1)dx = 5\int_{-1}^1 x(ax+1)dx$

$\Leftrightarrow \int_0^2 (ax+1)dx = 10a\int_0^1 x^2dx$

$\Leftrightarrow \left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2 = 10a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$\Leftrightarrow 2a+2=\frac{10}{3}a$

$a=\frac{3}{2}$이므로 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$ $\quad\therefore f(4)=7$

답은 7!!

comment

항등식의 의미를 파악하는 풀이를 보면서 당혹스러운 학생들도 많을 것 같다. 필연적인 풀이를 강조하는 이 책의 특성과는 맞지 않는다는 느낌이 강하게 들 것이기 때문이다. **항등식의 우변 $\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이 사다리꼴을 의미하는 식임을 현장에서 발견하기는 대단히 어렵다.** 이것이 사다리꼴을 나타내는 식임을 알 수 있는 힌트조차 제시되지 않았다. 그래서 평가원은 이 문제를 'EBS 연계 문제'로 출제했다.

20학년도 수능특강 수학영역 수학II&미적분I 中

다항함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\{f(a)+f(b)\}$

(나) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 4a$

(다) $f(2)=8$

$f(4)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

보다시피 ebs에 수록된 문항과 수능 28번 문항의 아이디어가 완전히 동일함을 알 수 있다.

Q) 그렇다면 EBS 문항을 다 외우거나, 최소한 풀어보는 것이 필수적일까?

A) 그렇지 않다. 사다리꼴 풀이가 이 문항의 유일한 풀이라면 EBS를 외우는 게 무조건 유리했을 것이다. 하지만 평가원은 발상적인 풀이가 문제의 유일한 풀이법이 되도록 문제를 설계하지 않는다. 별도의 처리를 통해서도 이 문제를 풀 수 있는데, 어떤 풀이일지 고민해보고 다음 페이지를 보자.

※ 항등식에 별도의 처리를 적용하는 풀이

다항함수 $f(x)$를 포함한 항등식이 있을 때, $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 알 수 없다면 최고차항을 설정하자.

$f(x)$의 최고차항$=ax^n$ (단, a는 0이 아닌 상수, n은 음이 아닌 정수)

※ 다항함수는 상수함수도 포함하므로 $n=0$일 수도 있다! 위와 같이 최고차항을 설정하면 모든 다항함수를 표현할 수 있지만, $f(x)=0$인 경우를 빼먹게 된다. 확률은 낮지만 모든 케이스를 따져야 하므로, $f(x)=0$인 경우도 따로 대입해서 확인해주자.

$f(x)$의 최고차항을 설정하여 항등식에 대입한 후 **계수 비교법을 통해** a, n**의 값**을 알아낼 수 있는 경우가 많다. a, n의 값을 알아낸 다음, $f(x)$의 전체식을 알 수 있는 다른 방법이 없다면 $f(x)$**의 전체 식을 항등식에 대입**할 수도 있다. 단, 이 경우에는 출제자가 $f(x)$의 차수를 1 또는 2로 설계할 것이다.

– 〈Chapter 4. 다항함수〉

이 문제에서도 다항함수 $f(x)$가 포함된 항등식 $\int_1^x f(t)dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$이 제시되었지만, **차수와 최고차항의 계수에 관한 정보는 주어지지 않았다. 위의 도구를 적용해 보자.**

$f(x)$**의 최고차항**$=ax^n$ **(**a**는** 0**이 아닌 상수,** n**은 음이 아닌 정수)**

$n=0$**일 때와** $n\neq 0$**일 때로 CASE를 나누자.** $n=0$일 때는 $f(1)$도 $f(x)$의 최고차항이 되기 때문이다. $f(x)=0$도 (가)를 만족시킨다.

(i) $n=0$일 때 ($f(x)=a$)

(항등식의 좌변의 최고차항)$=ax$, (항등식의 우변의 최고차항)$=\frac{x}{2}(a+a)=ax$

(ii) $n\neq 0$일 때

(항등식의 좌변의 최고차항)$=\frac{a}{n+1}x^{n+1}$, (항등식의 우변의 최고차항)$=\frac{a}{2}x^{n+1}$

좌변과 우변의 최고차항이 일치하므로 계수 비교법을 이용하면 $\frac{a}{n+1}=\frac{a}{2}$이다. $a\neq 0$이므로 $n=1$이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $f(x)$는 '직선'이다.

comment

1. 식의 제시된 형태 자체에서 사다리꼴 넓이를 파악한 후 $f(x)$가 직선임을 추론하지 못하더라도 필연적으로 풀 수 있는 길이 존재한다.
2. **다항함수에서 가장 중요한 것은 '최고차항의 계수'와 '차수'**이므로 다항함수를 보면 두 가지 정보는 반드시 따지자. 이러한 점에서 **최고차항 설정 도구는 반드시 숙지**하자.

예제(5) 22학년도 수능 20번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이다. (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

1. 조건 (나)에서 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 항등식 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이 제시되었다.
항등식이 정의된 구간과 이 항등식은 $0 \le x$인 어떤 x를 대입해도 성립한다는 점이 핵심이다.

항등식에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=b=1$이다.
항등식의 $xf(x)$를 이항하면 $f(x+1)=xf(x)+ax+1$이다.

$f(x)=x\,(0 \le x \le 1)$이므로
$f(x+1)=x^2+ax+1\,(0 \le x \le 1)$이다.

$x+1=t$라 할 때, $f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1\,(1 \le t \le 2)$이므로
$f(x)=\begin{cases} x & (0 \le x \le 1) \\ (x-1)^2+a(x-1)+1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$이다.

2. **$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$의 $x=1$에서의 좌미분계수와 우미분계수는 서로 같다.**
$f'(x)=\begin{cases} 1 & (0 < x < 1) \\ 2(x-1)+a & (1 < x < 2) \end{cases}$에서
($x=1$에서의 좌미분계수)$=1$, ($x=1$에서의 우미분계수)$=a$이므로 $a=1$이다.

3. $f(x+1)=xf(x)+x+1$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x+1)dx=\int_0^1 \{xf(x)+x+1\}dx$$
$$=\int_0^1 (x^2+x+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$$
$60 \times \int_1^2 f(x)dx=60 \times \frac{11}{6}=110$이다.

답은 110!!

※ 다른 풀이

1. 주어진 항등식의 양변을 미분하여 푸는 방법도 소개한다. $f(x+1)$의 미분은 합성함수의 미분이므로 수학II 교육과정에 포함되는 풀이는 아니지만, 상수 a, b에 대하여 x에 대한 함수 $f(ax+b)$를 x에 대하여 미분하면 $af'(ax+b)$가 되는 것 정도는 미적분 선택자가 아니어도 (필수는 아니지만) 참고로 알아둬도 괜찮다. 관련 내용은 Chapter 7에서도 등장할 것이다.

2. **함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로** $f(x+1)-xf(x)=ax+b$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x+1)-f(x)-xf'(x)=a$이다.
미분한 식에 $x=0$을 대입하면 $f'(1)-f(0)=a$이고, $f(0)=0$, $f'(1)=1$이므로 $a=1$이다.
이후 풀이는 동일하다.

예제(6) 23학년도 수능 22번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

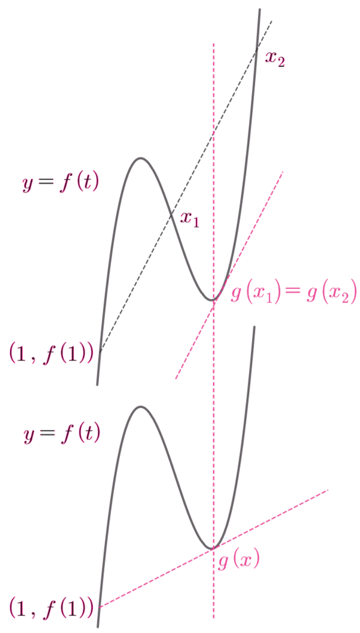
(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

1. 함수 $g(x)$ 가 연속함수라는 것과 조건 (가)를 해석하여 함수 $g(x)$ 를 이해해야 한다.

조건 (가)의 등식은 항등식이므로, $x=1$ 일 때와 $x \neq 1$ 일 때로 경우를 나누어 이해해야 한다.
$x=1$ 일 때, 좌변과 우변이 모두 0 이므로 등식이 성립한다.
$x \neq 1$ 일 때, 주어진 항등식을 $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$ $\cdots$ (①) 로 이해할 수 있는데,
좌변의 식은 기하적인 의미를 부여할 수 있으므로, 우변의 식도 기하적인 의미를 부여해야 한다.

좌변의 식은 정점 $(1,\ f(1))$ 과 동점 $(x,\ f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기로 해석할 수 있고,
우변의 식은 함수 $y=f(t)$ 의 $t=g(x)$ 에서의 접선의 기울기로 해석할 수 있다.

따라서 점 $(1,\ f(1))$ 을 대략적인 위치에 찍어 두고 점 $(x,\ f(x))$ 를 움직이면서 관찰해보자.
이때, 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 1 보다 큰 $\dfrac{5}{2}$ 이므로 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.



곡선 $y=f(t)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$ 에서 이 곡선에 그은 접선이 접점 $(g(x),\ f(g(x)))$ 를 지날 때, 함수 $g(x)$ 가 최솟값을 가진다는 것을 알 수 있다. 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 $\dfrac{5}{2}$ 이므로
곡선 $y=f(t)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$ 에서 이 곡선에 그은 접선이 접점 $\left(\dfrac{5}{2},\ f\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$ 를 지난다.

2. 두 점 $(1, f(1))$, $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면

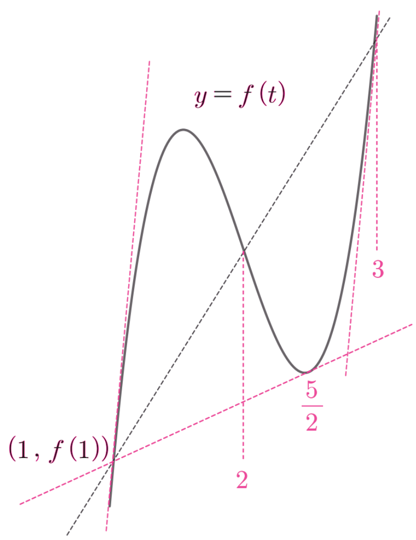
$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+mx+n$이라 할 수 있다.

한편, (①)에 극한을 취하면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}f'(g(x)) \Leftrightarrow f'(1)=f'(g(1))$이고,

삼차함수 비율관계에 의해 삼차함수 $f(x)$의 그래프가 점 $(2, f(2))$에 대하여 대칭임에 착안하면

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$인데, $g(x)\geq\frac{5}{2}$이므로 $g(1)=3$임을 알 수 있다.



따라서 $f(0)=-3$, $f(3)=6$이므로 $m=\frac{3}{4}$, $n=\frac{13}{4}$이고, $f(4)=13$이다. **답은 13!!**

※ 식 풀이

기하적인 의미를 해석하는 것이 출제 의도로 보이기는 하지만 아래 식 풀이가 더 쉬울 수는 있다.

1. $f(x)-f(1)=(x-1)(x^2+ax+b)$라 하자.

$f'(x)=3x^2+(2a-2)x+b-a$이므로 이를 (가)에 대입하면

$x^2+ax+b=3\{g(x)\}^2+(2a-2)g(x)+b-a$이다.

편의를 위해 $g(x)$를 g라 하고 위 항등식을 g에 관해 정리하면, $3g^2+(2a-2)g-(x^2+ax+a)=0$ 이다. **g에 관한 2차식이므로 근의 공식을 이용하여 g의 식을 구하면**

$g(x)=\dfrac{-a+1\pm\sqrt{(a-1)^2+3(x^2+ax+a)}}{3}$ **이다.**

이때, $g(x)$는 최솟값을 가지므로 $g(x)=\dfrac{-a+1+\sqrt{(a-1)^2+3(x^2+ax+a)}}{3}$이다.

$\sqrt{(a-1)^2+3(x^2+ax+a)}$의 $(a-1)^2+3(x^2+ax+a)$의

판별식 $D=9a^2-12(a^2+a+1)=-3(a+2)^2\le 0$**이므로**

모든 x**에서** $\sqrt{(a-1)^2+3(x^2+ax+a)}\ge 0$**이다. 따라서** $g(x)$**는 모든** x**에서 연속이다.**

$y=3(x^2+ax+a)$가 $x=-\dfrac{a}{2}$에서 최솟값을 가지므로 $g(x)$**도** $x=-\dfrac{a}{2}$**에서 최솟값**을 갖는다.

따라서 $g\left(-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$이므로 $g(x)$ 식에 $x=-\dfrac{a}{2}$을 대입하자.

$$\frac{5}{2}=\frac{-a+1+\sqrt{(a-1)^2+3\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+a\right)}}{3}$$

$a+\dfrac{13}{2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+a+1}$, $a+\dfrac{13}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}+1\right)^2}$

$a+\dfrac{13}{2}=\pm\left(\dfrac{a}{2}+1\right)$**이므로** $a=-11$ **또는** $a=-5$**이다.**

$a+\dfrac{13}{2}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}+1\right)^2}$ **에서** $a+\dfrac{13}{2}\ge 0$**이므로** $a=-11$**가 아닌** $a=-5$**이다.**

$f(x)=(x-1)(x^2-5x+b)+f(1)\ \cdots$ (①)

$f'(x)=3x^2-12x+b+5$이다.

2. 조건 (가)에서 $f'(1)=f'(g(1))$이다.

$f'(x)$는 $x=2$에 대하여 대칭이고, $g(x)\ge\dfrac{5}{2}$이므로 $g(1)=3$이다.

따라서 조건 (다)에서 $f(g(1))=f(3)=6$, $f(0)=-3$이므로

이를 ①에 대입하면 $b=7$, $f(1)=4$이다. $f(x)=(x-1)(x^2-5x+7)+4$이므로 $f(4)=13$이다.

미지수 특정, 함수 특정

미지수 k 혹은 함수식이 정해지지 않은 $f(x)$에 대해,
문제 속 조건을 모두 만족하는 k의 값 혹은 $f(x)$의 식(그래프)이 무한히 많다면, 그러한 미지수의 값들 혹은 $f(x)$의 후보 중에서 계산에 편한 값과 함수를 특정해도 좋다.

조건을 모두 만족하는 값이 무한히 많다는 것은, 어떠한 값을 대입해도 답이 똑같이 나온다는 말이므로, 문제를 푸는 입장에서는 계산에 편한 값을 대입하여 풀면 된다.

e.g. 19학년도 수능 17번 (아래의 조건이 전부)

실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

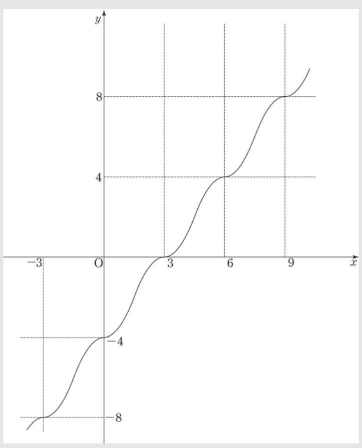
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.

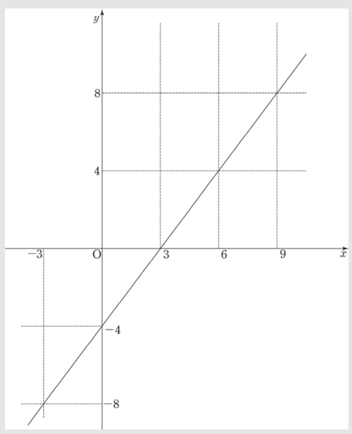
(나) $\int_0^6 f(x)dx=0$

comment

조건 (가)의 항등식
정의된 집합 : 모든 실수
의미 : 함수의 주기성과 평행이동 (주기함수에 해당하는 건 아니지만, 그래프 형태가 반복된다.)

이때, $f(x)$를 특정할 수도 있다. 실수 전체의 집합에서 증가하는 동시에 연속이고, (가), (나) 조건을 모두 만족하는 $f(x)$는 수 없이 많다. 그중에서 어떠한 함수를 택하는 답은 똑같이 나오므로 가장 간단한 일차함수를 택하면 된다. 이 문항은 **<Chapter 8. 정적분의 활용>**에서 한 번 더 등장한다.



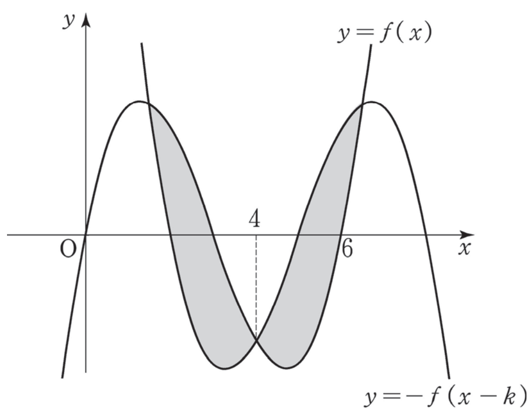


e.g. 06학년도 9월 평가원 가형 20번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=f(6)=0$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 서로 다른 세 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$, $(\gamma,\ f(\gamma))$ (단, $\alpha<\beta<\gamma$)에서 만나면 k의 값에 관계없이 $\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나고 가운데 교점의 x 좌표의 값이 4일 때, $\int_{0}^{k}f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]



comment

$\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 서로 다른 세 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$, $(\gamma,\ f(\gamma))$ (단, $\alpha<\beta<\gamma$)에서 **만날 때의 k의 집합**에서 정의된 **항등식**이다.

따라서 **미지수 특정**도 가능하다. 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만날 때의 k의 값 중, 계산이 가장 편한 $k=0$을 골라 $\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$을 계산할 수 있다.

워크북의 〈Chapter 8〉에 수록된 문항이다.

예제(7) 02학년도 수능 7번

5차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$$

를 성립시키는 상수 a, b가 있다. a, b를 순서대로 나열한 것은? [3점]

① $\frac{4}{9}$, $\frac{10}{9}$　② $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{9}$　③ $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$　④ $\frac{7}{9}$, $\frac{4}{9}$　⑤ $\frac{8}{9}$, $\frac{2}{9}$

항등식의 특징을 이용한 두 가지의 풀이가 존재한다. 하나씩 살펴보자.

〈첫 번째 풀이〉

1. 5차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 주어진 등식을 성립시킨다.
⇔ 5차 이하의 어떤 다항함수 $f(x)$를 대입하더라도 주어진 등식이 성립한다.

즉, 계산에 편한 5차 이하의 다항함수로 $f(x)$를 특정시켜 대입하면 된다. **함수 특정**이다.

(1) 가장 차수가 낮은 상수함수부터 대입하자.

$f(x)=0$인 경우 $0=0$, $f(x)=1$인 경우 $2=2a+b$, $f(x)=2$인 경우 $4=4a+2b$

다른 상수함수를 넣어도 동일한 결론인 $2=2a+b$가 나온다.

(2) 일차함수를 살펴보자.

$f(x)=x$인 경우 $\int_{-1}^{1} xdx = -\sqrt{\frac{3}{5}}a+0+\sqrt{\frac{3}{5}}a$

$0=0$

$f(x)=x+1$인 경우 $\int_{-1}^{1}(x+1)dx=\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)a+b+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)a$

$2=2a+b$

여기서 눈치를 채야 한다. **일차함수를 넣어도 얻을 수 있는 결론은 결국 상수함수의 결론과 같은 $0=0$ 또는 $2=2a+b$**이다. 그 이유를 알아보자.

$f(x)=cx+d\ (c\neq 0)$일 때, $\int_{-1}^{1}(cx+d)dx=2d$

$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a+f(0)b+f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a=2ad+bd$

즉, $2d=2ad+bd$이므로 $d=0$일 때 $0=0$이 되고, $d\neq 0$일 때 $2=2a+b$이 된다.
결국 $f(x)$가 상수함수일 때와 똑같은 결론이다. 왜냐하면 $f(x)$의 일차항인 cx는
$\int_{-1}^{1}f(x)dx=f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a+f(0)b+f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$에서 아무런 영향도 줄 수 없기 때문이다.

이를 확장 시켜 생각하면 **$f(x)$의 홀수차항은 아무런 영향을 주지 못한다.**

$f(x)=x^n$(n은 홀수)일 때 $f(x)$는 기함수이므로 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$이 되고 (Chapter 8 참고)

$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a+f(0)b+f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$도 계산해보면 0이 되기 때문이다.

2. 따라서 a, b에 관한 새로운 관계식을 얻기 위해 $f(x)$가 **이차함수인 경우를 대입**하자.

가장 간단한 $f(x)=x^2$을 항등식에 대입하면,

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{3}{5}a + 0 + \frac{3}{5}a$$

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{5}a,\ a = \frac{5}{9}$$

$2 = 2a + b$이므로 $b = \frac{8}{9}$이다.

답은 ②!!

〈두 번째 풀이〉

1. **항등식의 특징 + 대칭성을 이용하여 풀어보자.**

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$$

(좌변) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$에서 적분 구간의 양 끝이 $x=0$에 대해 대칭이다.

(우변) $f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$에서도 $-\sqrt{\frac{3}{5}}$과 $\sqrt{\frac{3}{5}}$은 $x=0$에 대해 대칭이다.

우연의 일치가 아니다. **대칭성을 띈 숫자를 두 개나 제시했다.** $f(x)$에 관해 주어진 것은 아무것도 없는 상황에서 대칭성을 어떻게 활용할까? 직접 5차 이하의 **다항함수 $f(x)$의 일반식**을 세워 보자.

$f(x) = cx^5 + dx^4 + ex^3 + gx^2 + hx + i$ (단, 다항함수 $f(x)$의 차수는 0부터 5까지 모두 가능하므로 각 항의 계수 c, d, e, g, h, i는 0일 수 있다.)

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$는 5차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$에 대해 성립하므로 **c, d, e, g, h, i의 값과 상관없이 성립한다.**

2. $f(x)$의 식을 적고 나면 대칭성의 의미가 보여야 한다. $f(x) = cx^5 + dx^4 + ex^3 + gx^2 + hx + i$을 항등식에 대입하자.

(좌변) $= \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_{0}^{1}(dx^4 + gx^2 + i)dx = 2\left(\frac{1}{5}d + \frac{1}{3}g + i\right)$

적분 구간 양 끝이 $x=0$에 대해 대칭이므로 $f(x)$의 홀수차항은 모두 날라가고, 짝수차항은 적분 구간을 반으로 줄인 다음 두 배를 해주면 된다.

(우변) $= f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a+f(0)b+f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a=2\left\{d\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4+g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2+i\right\}a+ib$

적분기호를 사용하지 않았는데도 마치 적분기호를 사용한 것처럼 전개가 되었다.

(홀수차항에 $x=-\sqrt{\frac{3}{5}}$를 대입하고 a를 곱한 것)과 ($x=\sqrt{\frac{3}{5}}$를 대입하고 a를 곱한 것)의 값은 서로 부호만 다르고 절댓값은 같다. 따라서 더하면 사라지게 된다.

(짝수차항에 $x=-\sqrt{\frac{3}{5}}$를 대입하고 a를 곱한 것)과 ($x=\sqrt{\frac{3}{5}}$를 대입하고 a를 곱한 것)의 값은 서로 같다. 따라서 더하면 두 배가 된다.

3. $2\left(\frac{1}{5}d+\frac{1}{3}g+i\right)=2\left\{d\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4+g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2+i\right\}a+ib$가 $d,\ g,\ i$**의 값과 상관없이 항상 성립하도록 하는** $a,\ b$**의 값을 구하자.** 양변에서 $d,\ g,\ i$**를 계수로 하는 항끼리 서로 같아야 한다.**

(d가 포함된 항) $\frac{2}{5}d=\frac{18}{25}ad \rightarrow a=\frac{5}{9}$

(g가 포함된 항) $\frac{2}{3}g=\frac{6}{5}ag \rightarrow a=\frac{5}{9}$

(i가 포함된 항) $2i=(2a+b)i \rightarrow 2a+b=2$

$a=\frac{5}{9}$, $2a+b=2$이어야 하므로 $a=\frac{5}{9}$, $b=\frac{8}{9}$이다.

답은 ②!!

comment

1. 두 번째 풀이를 바탕으로 첫 번째 풀이에서 $f(x)$의 홀수차항이 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a+f(0)b+f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$에서 아무런 영향을 주지 못한다고 한 것을 자세히 이해할 수 있다.

2. 실전에서는 첫 번째 풀이처럼 $f(x)$를 특정하여 대입하는 것이 훨씬 효율적이다. 두 번째 풀이를 선보인 이유는 한 문제를 다양한 방식으로 풀고, 이 문제의 구조를 심층적으로 이해하기 위함이다. 두 풀이 모두 소화하자.

3. 정적분 내용이 좀 어렵다면 〈Chapter 7〉, 〈Chapter 8〉을 공부하고 다시 오자. 까먹을 수 있으므로 index를 설정하는 것도 좋다.

부등식

정의 : 두 수 또는 두 식의 관계를 부등호로 나타낸 것을 말한다.

1. 놓치기 쉬운 부등식 처리 도구 : 부등식의 양변을 '변수'로 나누기

0이 아닌 상수 a에 대해, x에 관한 부등식 $ax^3+ax^2+ax \geq 0$의 양변을 a로 나누는 것을 자연스레 받아들이는 것처럼 양변을 변수 x로도 나눌 수 있다. **그러나 x의 범위를 주의해야 한다.**

(i) $x>0$일 때

$ax^3+ax^2+ax \geq 0$

$\Leftrightarrow\ ax^2+ax+a \geq 0$

양변을 '양수'로 나눴기 때문에 부등호 방향에 변화가 없다.

(ii) $x<0$일 때

$ax^3+ax^2+ax \geq 0$

$\Leftrightarrow\ ax^2+ax+a \leq 0$

양변을 '음수'로 나눴기 때문에 부등호 방향을 바꿔줘야 한다.

단, $x=0$일 때는 부등식의 양변을 x로 나눌 수 없으므로 부등식에 $x=0$을 대입하여 직접 $x=0$이 부등식의 해에 포함되는지 확인해야 한다. $ax^3+ax^2+ax \geq 0$의 경우 $x=0$은 부등식의 해에 속한다.

2. 주의할 점

① 부등식을 만족시키는 변수의 범위 주의

항등식에서 항등식이 정의된 집합을 주의하라고 했듯이, 부등식을 만족시키는 변수의 범위를 주의해야 한다.

e.g. <u>$x \geq -1$인 모든 실수 x</u>에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다. (15학년도 수능 21번)

<u>모든 양의 실수 x</u>에 대하여 $6x-6 \leq f(x) \leq 2x^3-2$이다. (15학년도 9월 평가원 21번)

② 미분, 부정적분 금지

대부분 학생은 잘 하고 있지만, 간혹 오류를 저지르는 학생이 있다.

Q) 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대해 원함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) \geq g(x)$를 만족시키면 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$도 $f'(x) \geq g'(x)$를 만족시키나요?

A) 아니다. (직선)과 (직선 위에 존재하는 이차함수의 그래프)를 그려봐도 틀렸음을 알 수 있다. **원함수끼리의 대소관계와 도함수끼리의 대소관계는 독립적이다!!** 단, 부등식의 양변에 정적분을 씌우는 것은 가능하다. 닫힌 구간 $[a, b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속일 때, $f(x) \geq g(x)$이면

$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$이다. – 〈Chapter 7. 부정적분과 정적분〉

3. 함수 간의 부등식

부등식에서 가장 중요한 파트이다. 집중하자. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 대해, 특정한 실수 x의 범위에서 $f(x)\geq g(x)$일 조건을 구한다고 하자.

이때, 일반적으로 **함수 간의 부등식은 그래프로 해결한다.** $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프를 보면서 $f(x)\geq g(x)$일 조건을 찾는 것이다.

이때, 가장 중요한 순간은 등호가 성립할 때, 즉 $f(x)=g(x)$일 때이다. $f(x)\geq g(x)$인 상황을 고려할 때는 반드시 $f(x)<g(x)$인 상황도 고려할 수밖에 없다. 따라서 두 상황의 '경계'인 $f(x)=g(x)$인 순간에 대한 고려는 필수적이다.

※ 여기서 말하는 $f(x)=g(x)$일 때는 $f(x)=g(x)$인 모든 x를 말하는 것이 아니다. $f(x)\geq g(x)$와 $f(x)<g(x)$의 경계일 때의 $f(x)=g(x)$이므로 오해하지 말자. $f(x)\geq g(x)$와 $f(x)<g(x)$의 경계일 때의 $f(x)=g(x)$를 파악하려면 당연히 두 함수의 그래프를 관찰할 수밖에 없다.

이때, $f(x)=g(x)$인 경우는 두 가지이다.

① **접할 때**
② **접하지 않고 만날 때**

이 중에서도 압도적으로 답인 경우로 출제되는 것이 **접할 때**이다.

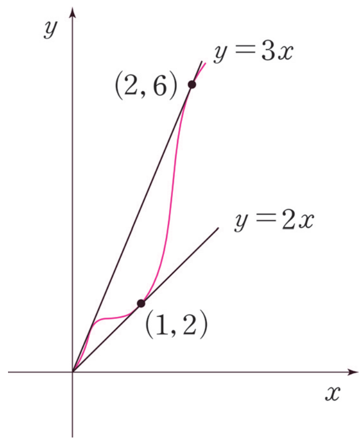
예시 14학년도 예비시행 18번

$x>0$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $2x \leq f(x) \leq 3x$이다. $f(1)=2$이고 $f(2)=6$일 때, $f'(1)+f'(2)$의 값은? [4점]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

1. $f(1)=2$ → $y=f(x)$의 그래프가 $y=2x$의 그래프와 점 $(1, 2)$에서 만난다.
$f(2)=6$ → $y=f(x)$의 그래프가 $y=3x$의 그래프와 점 $(2, 6)$에서 만난다.

그런데 $f'(1)+f'(2)$는 어떻게 따질까?
→ 함수 간의 부등식은 그래프로 따진다.



2. 직선 $y=2x$, $y=3x$와 곡선 $y=f(x)$를 그려보면 $y=f(x)$는 점 $(1, 2)$에서 $y=2x$에 접하고, 점 $(2, 6)$에서 $y=3x$에 접한다. 따라서 $f'(1)=2$, $f'(2)=3$이므로 **답은 ④!!**

comment

이 문제는 함수 간의 부등식의 본질을 알려주고 있으므로 다른 함수 간의 부등식 문제를 풀 때도 이 본질을 잊지 말자.

함수 간의 부등식에서 중요한 한 가지 도구가 남았다.

③ 차이함수

함수 간의 부등식에서 **두 함수의 그래프를 따로 놓고 관찰하기 어려운 경우**도 당연히 존재한다.
이럴 때는 차이함수를 떠올리자.

예를 들어, 부등식 $f(x) \geq g(x)$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프를 따로 놓고 비교하기 까다롭다면, $h(x)=f(x)-g(x)$로 차이함수를 설정하여 $h(x) \geq 0$을 관찰하면 된다.

이렇게 되면 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 관계를
$y=h(x)$와 x축의 관계로 치환해서 보는 것이므로 한결 편해진다.

한편, 문제에 따라 $f(x) \geq g(x)$에서 $g(x)$의 일부 식을 이항하여 $p(x) \geq c$를 만든 다음 $y=p(x)$와 $y=c$를 관찰하거나, $q(x) \geq ax+b$를 만든 다음 $y=q(x)$와 $y=ax+b$를 관찰할 수도 있다. 방정식에서 살펴본 것과 다르지 않다.

예제(8) 15학년도 수능 21번

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다. (나) $f(0)=f'(0)$ (다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38 ④ 43 ⑤ 48

1. (다) 조건에서 함수 간의 부등식이 제시되었다. 그런데 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$의 그래프를 알 수 없고, $x=-1$이 어디인지도 알 수 없다. 즉, 두 함수를 따로 놓고 비교하기 힘들다. **차이함수를 통해 $f(x) \geq f'(x)$를 $h(x)=f(x)-f'(x) \geq 0$으로 변형하자.**

차이함수를 통해 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$의 관계를
$y=h(x)$와 x축의 관계로 치환하였다.

함수 간의 부등식은 그래프로 판단해야 하므로 $y=h(x)$의 그래프를 그려야 하는데, $h(x)$의 완전한 식을 알 수 없으므로 바로 그래프를 그릴 수는 없다. 일단 식부터 알아내자.

(가), (나) 에서 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이고 $f(0)=f'(0)$이므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx+b$, $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\therefore\ h(x)=f(x)-f'(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$

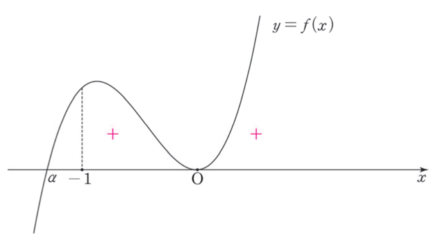
2. $h(x)$의 식을 얻었으니 이를 통해 그래프를 그린 다음 x축과의 관계를 살펴야 한다. 이때, 필연적으로 **식의 인수 x에 눈길이 가야 한다. 함수 간의 부등식의 핵심은 두 함수가 만날 때이기 때문이다. 이때는 $y=h(x)$와 x축이 만날 때다.**

$x \geq -1$인 모든 실수 x에서 $h(x) \geq 0$을 만족할 때, 삼차함수 $y=h(x)$는 점 $(0,\ 0)$을 지난다. 만약 곡선 $y=h(x)$가 $(0,\ 0)$에서 x축에 접하지 않는다면 삼차함수는 $x=0$에서 x축을 뚫고 지나가 부등식을 위배할 것이다. 따라서 $h(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$**는 x^2을 인수로 가져야 하므로 $b=2a$이다.**
$\therefore\ h(x)=x^3+(a-3)x^2$

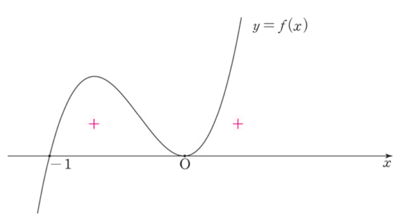
3. 여기서 끝이 아니다. **곡선 $y=h(x)$는 $x \geq -1$인 모든 x에서 $h(x) \geq 0$**이어야 한다.
곡선 $y=h(x)$와 x축의 교점 중 $x=0$이 아닌 교점이 이를 결정한다.

$h(x)=x^2(x+a-3)$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 $x=0$ x축에 접하고 $x=3-a$에서 x축을 뚫고 지나간다. 직관적으로 α가 $\alpha \leq -1$이어야 한다고 생각할 수 있지만, $x=3-a=\alpha$의 위치를 $x=-1$**과 $x=0$을 경계로 하여 다섯 가지 CASE로** 나누어 살펴보자.

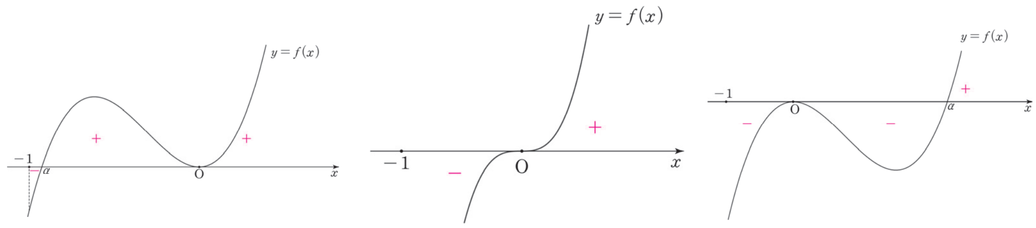
① $\alpha < -1$



② $\alpha=-1$



③ $-1<\alpha<0$ ④ $\alpha=0$ ⑤ $\alpha>0$



※ 귀찮은 작업을 굳이 해야 하냐고 생각할 수 있지만, 사소한 부분에서도 단계적, 논리적으로 따지는 사고가 중요하다.

$\alpha\le -1$일 때만 부등식을 만족하므로 $\alpha=3-a\le -1$ $\therefore$ $a\ge 4$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+b$
$=x^3+ax^2+2ax+2a$
$f(2)=8+10a\ge 48$

답은 ⑤!!

※다른 풀이 : 부등식의 양변을 '변수'로 나누기 (단, 변수의 범위 주의)

$x\ge -1$인 모든 실수 x에서 $x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge 0$을 만족한다.
→ 이 부등식을 부등식의 양변을 변수로 나누는 도구를 통해서도 풀 수 있을까?

부등식 $x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge 0$의 양변을 x로 나눠보자. (단, $x=0$일 때는 따로 생각해주자. 양변을 0으로 나눌 수는 없다.) 이때, **부등호 방향과 관련해 실수**를 많이 할 것이다. 정의역이 $x\ge -1$인 모든 실수이므로, 음수 구간과 양수 구간을 나눠줘야 한다.

(ⅰ) $-1\le x<0$일 때

$x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge 0$
양변을 x로 나눈다면 음수(-)로 나누는 셈이므로 부등호 방향은 변한다.
$x^2+(a-3)x+b-2a\le 0$

(ⅱ) $x=0$일 때

$x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge 0$에 $x=0$을 대입하면 $0\ge 0$이 되어 부등식이 성립한다.

(ⅲ) $x>0$일 때

$x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge 0$
양변을 x로 나눈다면 양수(+)로 나누는 셈이므로 부등호 방향은 그대로다.
$x^2+(a-3)x+b-2a\ge 0$

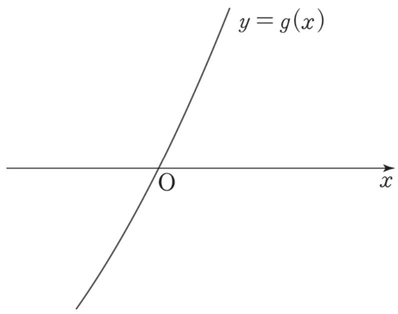
(ⅰ) $-1 \le x < 0$일 때

$x^2+(a-3)x+b-2a \le 0$

(ⅲ) $x > 0$일 때

$x^2+(a-3)x+b-2a \ge 0$

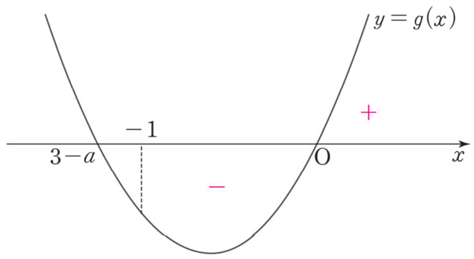
$g(x)=x^2+(a-3)x+b-2a$라 할 때, (ⅰ), (ⅲ)에 의해 $x=0$ 좌우에서 $g(x)$의 부호는 음(-)에서 양(+)으로 바뀐다. $g(x)$는 연속함수이므로 이를 만족하기 위해 곡선 $y=g(x)$는 아래 그림과 같이 점 $(0,\,0)$을 지나야 한다.



$g(0)=0$이므로 $g(0)=b-2a=0$

$g(x)=x^2+(a-3)x=x(x+a-3)$

따라서 방정식 $g(x)=0$의 실근은 $x=0$ 또는 $x=3-a$이다. 마지막으로 $-1 \le x < 0$에서 $g(x) \le 0$이 되려면 $3-a \le -1$이어야 한다. $\therefore\ 4 \le a$



a의 범위와 a, b의 관계식을 모두 구했으므로 $f(x)$로 돌아와서 $f(2)$의 최솟값을 구하자.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

$b=2a$를 대입하면 $f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$

$\therefore\ f(2)=8+10a \ge 48$

답은 ⑤!!

comment

본 풀이와 다른 풀이 모두 소화하고 넘어가자. 함수 간의 부등식과 관련하여 굉장히 표준적인 문항이므로 정확히 풀 수 있어야 한다.

예제(9) 15학년도 9월 평가원 21번

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

(가) $f(0)=-3$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

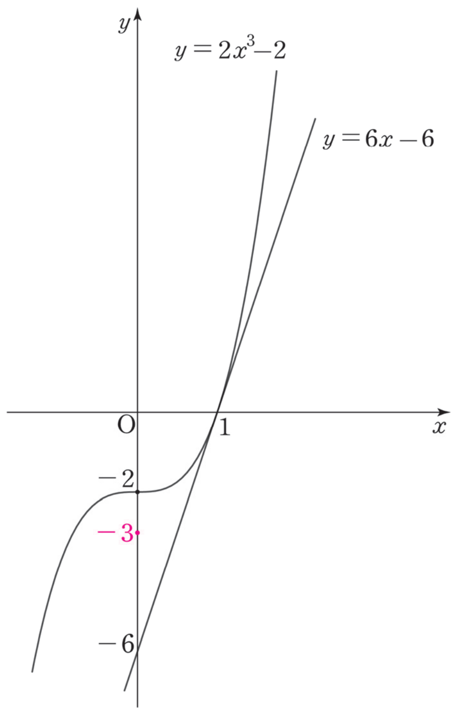
1. **(가)** $f(0)=-3$

(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$

제시된 3가지 정보

$y=6x-6$, $y=2x^3-2$, $f(0)=-3$

를 좌표평면에 나타내자.

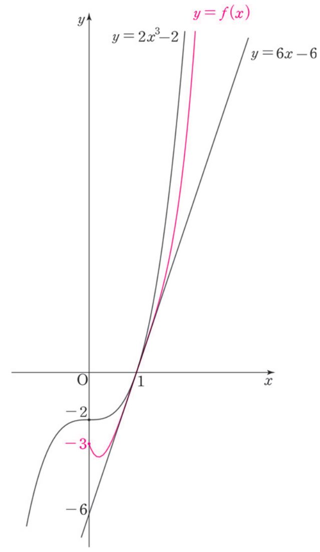


$y=6x-6$, $y=2x^3-2$가 모두 점 $(1, 0)$을 지나고 $x=1$일 때의 미분계수가 6으로 같다.

따라서 두 함수의 그래프는 $x=1$에서 접한다.

※ 함수 각각의 그래프를 그린 것만으로는 미분계수를 알 수 없으므로 접한다는 사실을 알 수 없다. 그러나 **함수의 대소관계를 따지기 위해 두 함수의 그래프가 교점에서 서로 접하는지**도 필수적으로 따져봐야 한다.

2. **모든 양의 실수 x에 대하여 $y=f(x)$는 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$를 만족해야 한다.**
('모든 양의 실수'와 같은 조건은 절대 까먹지 말자.)



두 함수 $y=6x-6$, $y=2x^3-2$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$에서 서로 접하므로, $y=f(x)$ 또한 점 $(1,\ 0)$에서 두 함수의 그래프에 접해야 한다.

$\therefore\ f(1)=0,\ f'(1)=6$

그런데 문제가 생겼다. 다항함수 $f(x)$의 차수가 제시되지 않았다.
태도 : 다항함수가 제시되면 차수와 최고차항 계수를 반드시 따지자.

차수를 알 수 있는 추가조건이 없으므로 CASE 분류가 요구된다.
이때, **〈다항함수의 차수와 함숫값의 증가 속도의 관계〉**를 필수적으로 고려하자. 모든 양의 실수 x에서 $f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 직선과 최고차항의 계수가 양수인 삼차곡선의 사이에 존재하기 위해서는 **$f(x)$의 차수가 $1,\ 2,\ 3$ 중 하나**여야만 한다.

만약 $f(x)$의 차수가 4 이상이 되어버리면 $x=1$ 부근에서는 $f(x)$의 그래프가 두 함수의 사이에 존재하는 것 같이 보여도, 언젠가는 삼차함수의 그래프를 뚫고 올라가 버리기 때문이다.

- 〈Chapter 4. 다항함수〉

3. CASE 분류

1) $f(x)$가 일차함수인 경우

$f(0)=-3$, $f(1)=0$이므로 $f(x)=3x-3$이다. 그러나 이 경우 $f(x)$는 $x>1$에서 직선 $y=6x-6$보다 아래에 존재할 뿐만 아니라 $f'(1)\neq 6$이다.

2) $f(x)$가 이차함수인 경우

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 $f(x)=x^2+ax+b$로 일반식을 작성한 다음 $f(0)=-3$, $f(1)=0$을 대입하여 a, b를 구하면 된다.

그러나 **접하는 상황**이 제시되었으므로 **차이함수**를 활용하면 효율적으로 식을 작성할 수 있다.
도구 : 두 함수의 그래프가 서로 접하는 상황에서 차이함수를 이용하면 간단하게 함수식을 작성할 수 있다.

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=6x-6$이 $x=1$에서 서로 접하므로 $f(x)-6x+6=(x-1)^2$이다. 하지만 이 경우 $f(0)=-5$이므로 '조건 $f(0)=-3$'을 위배한다.

3) $f(x)$가 삼차함수인 경우

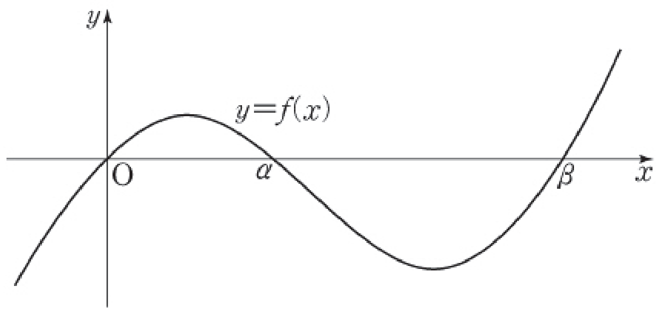
2)와 같이 차이함수를 작성하자. $f(x)-6x+6=(x-1)^2(x+a)$
$f(0)=-3$을 적용해주면 $a=3$ $\therefore\ f(3)=36$ **답은 ①!!**

예제(10) 11학년도 6월 평가원 15번

삼차함수 $f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$ $(0<\alpha<\beta)$와 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를
$g(x)=f(a)+(b-a)f'(x)$ 라고 하자.
$a<0$, $\alpha<b<\beta$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. x에 대한 방정식 $g(x)=f(a)$는 실근을 갖는다.
ㄴ. $g(b)>f(a)$
ㄷ. $g(a)>f(b)$



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. $g(x)=f(a)$

$\Leftrightarrow f(a)+(b-a)f'(x)=f(a)$

$\Leftrightarrow (b-a)f'(x)=0$

삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다. 따라서 x에 대한 방정식 $g(x)=f(a)$는 실근을 갖는다. (O)

2. $g(b)>f(a)$

$g(b)>f(a)$

$f(a)+(b-a)f'(b)>f(a)$

$(b-a)f'(b)>0$

$b-a>0$이므로 부등식의 양변을 $(b-a)$로 나누면 $f'(b)>0$

$\alpha<b<\beta$를 만족하는 b에 대해 $f'(b)$는 음수, 0, 양수 모든 값을 가질 수 있다. (X)

3. $g(a)>f(b)$

$g(a)>f(b)$

$f(a)+(b-a)f'(a)>f(b)$

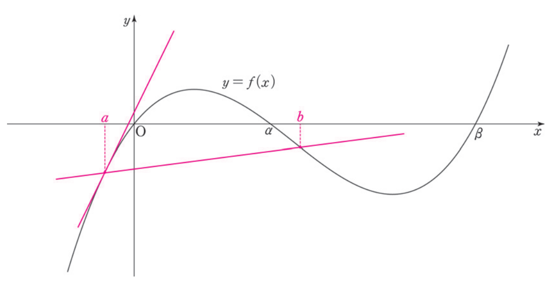
$f(x)$의 $x=a$부터 $x=b$까지의 평균변화율 공식이 눈에 들어와야 한다.

$(b-a)f'(a)>f(b)-f(a)$

$b-a>0$이므로 **부등식의 양변을 $(b-a)$로 나누면**

$$f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$y=f(x)$의 그래프를 관찰하면 $x=a$에서의 $y=f(x)$의 미분계수는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나가는 직선의 기울기보다 항상 크다. (O)



옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답은 ④!!

memo