

서울대 박사가 알려주는
《수학의 비밀》

스마트하게 성적을 올리는 수학 공략집

“절대로 읽지 마라! 그저 열심히‘만’ 공부해라!

성적이 오르지 않아도 괜찮다면!”

두 번째 비밀 : 명제

어수강 지음

머리말

: 그저 열심히‘만’ 공부 중이신가요? **열심히 공부하는데도 성적이 오르지 않는다면 공부 방법을 바꾸어야 합니다.**

우리가 몸짱이 되고자 운동을 할 때, 운동 관련 책이나 유튜브 또는 전문 트레이너를 통해 인체 구조와 운동의 원리에 대해 알고 운동한다면 무작정 피트니스에 등록해서 힘닿는 대로 운동하는 것보다 효율적이고 재미있을 것입니다.

수학 공부도 마찬가지입니다. 잘못된 방법으로 공부하면 효율도 떨어지고, 수학에 대한 흥미와 자신감마저 잃어버릴 수도 있습니다. **반면 수학의 구조와 원리를 알고 공부한다면 훨씬 효율적이고 재미있게 공부할 수 있을 것입니다.**

교육현장에서 문제집을 7-8권씩 푸는데도 성적이 오르지 않아 괴로워하는 학생들을 많이 봅니다. 고등학교 수학을 그저 열심히‘만’ 공부한다면 실패할 확률이 높습니다. **이 책은 ‘여러분의 노력이 헛되지 않도록, 적어도 노력한 만큼은 성적도 올라야 한다.’라는 마음으로 집필했습니다.**

이 책에서는 수학의 구조와 원리를 바탕으로 한 효율적인 공부 방법을 제시합니다.¹⁾ 그리고 이에 대한 이해를 돕기 위해 다양한 실전 문제(내신, 수능, 논술 및 면접 기출 문항 등)을 예로 들어 설명하였습니다.²⁾ 이 책을 통해 공부 방법을 숙지한 후에, **수학의 모든 개념과 문제에 이를 적용해 공부한다면 특별한 수학적 재능 없이도 높은 성취를 거둘 것이라 확신합니다.**

<이 책의 근간인 “수학의 구조 특강”과 이 책에 대한 후기>

안녕하세요. 이 책을 읽고나서 현직 수학교사로서 '신선한 충격'을 받게 되었습니다. 언제나 잘 가르치고 싶은 마음만 가득했는데 실제로 수학 공부의 방향이 어떻게 흘러가야 하고 어떠한 방식으로 공부를 해야하는지에 대해 정확하게 설명이 되어있는 책입니다. 강력히 추천합니다. 📌

kkiryco 2022-09-15 공감 (0) 댓글 (0) Thanks to 공감

알라딘, 현직 수학교사 리뷰

네 감사합니다! 쌤 근데 저 쌤이랑 수업하고 공부방법도 많이 바뀌고 그래서인지 다른 과목 성적도 많이 올랐어요 ㅎㅎ 생각하면서 공부해서 그런거 같아요! (요번 학기동안 4과목에서 1등해봤어요. 이런적 한번도 없었는데..) 공부하는 것도 훨씬 안두렵고 편해졌어요. 한학기 지나고 나니까 쌤 덕분에 변한 것 같다는 생각이들어요. 전반적으로 더 확실하고 정확하게 공부하게 된 것 같아요. 사실 저 1학기때는 통계 공부해도 5등급 밖에 안나왔거든요ㅋㅋ 정말 감사드려요~ 여러 방면에서 많은걸 배운 것 같아요!

미국 약학대학

감사합니다 ㅋㅋㅋㅋ
방학 때 공부가 많이 도움 된것 같아요. 나중에 쌤 수업 자랑할때 하나고 학생이 수학 5등급이었는데 방학때 잠깐 듣고 1찍었다고 ㅋㅋㅋ

서울대 컴퓨터공학과

선생님 안녕하세요. 저 연대치대 최종합격했습니다.
의대는 발표 기다리고 있구요.
3년 동안 흔들리지 않는 수학 실력을 완성시켜주셔서 너무 감사합니다.

경희대 의과대학

네 시험 2주전에 가서 선생님이 말씀하신 방법 전달해서 그대로 했는데 ~~ 그게 효과가 있었던거 같아요. 시험 끝나면 애들한테 숙제 보내주세요. 방학전 면학시간에 할수 있게요. 지금 자신감 회복으로 하려면 다 할 분위기에요 ㅎㅎ

카이스트 전산학부

아! 저 쌤이랑 수학하고나서 수학성적오르고 안내려가네여ㅋㅋㅋ

서강대 사학과

1)이 책은 저의 시그니처 수업인 “수학의 구조 특강”의 내용을 바탕으로 합니다.

2)이 공부 방법은 (이해를 돕기 위해 책에서 예로 든 실전 문제 뿐 아니라) 수학의 모든 개념과 모든 문제에 적용 가능합니다.

1) 누구를 위한 건가요?

- 본격적으로 고등수학을 공부하고자 하는 학생
- 열심히 공부하는데도 성적이 오르지 않는 학생**
- 성실하게 공부하는데도 성적이 들쭉날쭉한 학생
- 고등학교 입학 후 성적이 곤두박질친 학생**
- 문제를 많이 푸는데도 처음 보는 고난도 문제가 두려운 학생
- 안정적인 1등급을 원하는 학생**
- 최상위권 대학 진학을 희망하는 학생**
- 내신·수능·논술·면접 준비를 한 큐에 끝내고 싶은 학생 및 선생님
- 위와 같은 어려움을 겪는 학생들을 지도하고 계신 선생님
- 1등급 학생 또는 1등급을 원하는 학생들을 지도하고 계신 선생님**

2) 얻을 수 있는 것은 무엇인가요?

- (수학의 구조와 원리를 바탕으로 한) **구체적이고 효과적인 공부 방법**
- 효과적인 공부로 노력 이상의 안정적이고 높은 성취**
- 안정적이고 높은 성취로 흥미와 자신감 향상**
- 수학 불안 및 시험 불안 해소
- 처음 보는 고난도 문제에 대한 두려움 해소
- 효과적인 내신·수능·논술·면접 준비 및 성공적인 대학 입시**
- 수학에 대한 메타적인 관점과 효과적인 수학 지도 방법
- 티칭 개선으로 인한 자신감 향상
- 학생들의 성취도 향상으로 인한 즐거움과 보람
- 최근 10년간 지도한 학생의 과반 이상 'SKY'에 진학시킨 저자의 인사이트 및 노하우**

3) 당부의 말

: 무엇을 얻을 수 있는지만 보고 **무작정 이 책을 구입하지 마세요.** 당연한 얘기지만 단순히 이 책을 읽는 것만으로 수학 성적이 향상되지는 않습니다. 이 책은 별로 노력하지 않고도 수학 1등급을 받게 해주는 책이 아닙니다.

이 책에서 제시하는 공부 방법에 대해 충분히 고민해보고, 예제의 풀이를 확인하기 전에 반드시 스스로의 힘으로 예제를 풀어볼 것을 권장합니다.³⁾ 공부 방법을 숙지한 후에는 수학의 모든 개념과 문제를 공부하는데 이를 적용하기 위해 노력해야 합니다. 이와 같이 '성실'하게 '노력'한다면 시행착오는 줄어들고, 수학 1등급까지 걸리는 시간은 단축되며, 그 과정은 즐거워질 것입니다.

³⁾이 책에는 이해를 돕기 위한 고등학교 1학년 및 2학년 과정의 다양한 예제와 그 풀이가 수록되어 있습니다. 따라서 고등학교 2학년 과정까지 한 번 이상 공부한 후에 이 책을 보는 것을 권장합니다.

4) 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀은 다음과 같이 시리즈로 출간할 계획입니다.⁴⁾

#1. 첫 번째 비밀 : 집합

#2. 두 번째 비밀 : 명제

#3. 세 번째 비밀 : 연산

#4. 네 번째 비밀 : 문제 분석

#5. 다섯 번째 비밀 : 항등식과 방정식

#6. 여섯 번째 비밀 : 부등식과 최대·최소

#7. 일곱 번째 비밀 : 분할

#8. 여덟 번째 비밀 : 귀류법과 귀납법

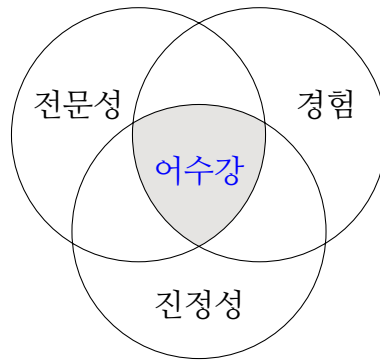
⁴⁾향후 계획이 변경될 수도 있습니다.

목차

머리말	1
저자 소개	5
1 두 번째 비밀 : 명제	7
[공부법4] 명제와 그 증명에 쓰인 핵심 아이디어	9
[요약]	19
맺음말	20

저자 소개

: 저자 어수강 박사는 전문성과 경험, 진정성을 바탕으로 공교육과 사교육을 넘나들며 학생들을 지도하고 있습니다. 학생들의 수학에 대한 흥미와 자신감 회복, 성취도 향상뿐 아니라 학생들의 하루하루가 빛날 수 있도록 고민하고 노력합니다.



* 전문성 : 수학 전공 이학박사로 첨단 수학의 연구 문제를 해결하여 국제 전문학술지에 다수의 논문을 게재하였고, 국제 전문학술지의 논문 심사위원으로서 다수의 논문을 심사하는 등 수학 전공자로서 뛰어난 전문성을 갖추고 있습니다.

* 경험 : 공교육과 사교육을 넘나들며 다양한 학생들을 지도하였습니다. 공교육에서 하나고등학교, 서울과학고등학교, EBS & KAIST 수학캠프, 서울대학교 과학영재원에서 학생들을 지도하였고, 사교육에서는 최상위권 학생 뿐 아니라 수학 5등급 이하의 학생들이 수학 1등급을 받고 최상위권 대학에 진학시킨 풍부한 경험을 갖추고 있습니다.

* 진정성 : 아이들이 겪는 어려움을 함께 고민하고, 아이들이 성장하는 과정에 함께하는 것을 기쁨과 보람으로 생각합니다. 형편이 어려운 학생들을 위해 무상으로 5년 이상 꾸준히 지도하고 소정의 장학금을 지급하기도 하였습니다.

[약력]

서울대학교 이학박사 (Ph.D. in Mathematics)

(前) 하나고등학교 교사

(前) 서울과학고등학교 교사

(前) EBS & KAIST 수학캠프 지도교사

(前) 서울대학교 과학영재원 지도교사

[논문]

석사논문

[A study on competition numbers of planar graphs \(2016\)](#)

박사논문

[Study on structures of digraphs and graphs in the aspect of their holes \(2019\)](#)

국제 전문학술지 게재 논문⁵⁾

1. [On \(1, 2\)-step competition graphs of bipartite tournaments \(2017\)](#)
2. [The partial order competition dimensions of bipartite graphs \(2019\)](#)
3. [A graph with the partial order competition dimension greater than five \(2019\)](#)
4. [The graph grabbing game on \$\{0, 1\}\$ -weighted graphs \(2019\)](#)
5. [The niche graphs of bipartite tournaments \(2020\)](#)
6. [On \$m\$ -step competition graphs of bipartite tournaments \(2020\)](#)
7. [On chordal phylogeny graphs \(2021\)](#)

[홈페이지 및 이메일]

블로그 : blog.naver.com/math-fish

이메일 : mathfish@snu.ac.kr

전자도서 : www.upaper.net/mathfish

⁵⁾현재 국제 전문학술지에 투고하여 심사 중인 논문은 scholar.google.com에서 “Soogang Eoh”로 검색하면 확인하실 수 있습니다.

두 번째 비밀 : 명제

① 모든 정리 · 성질 · 공식 · 법칙은 명제

: 참 · 거짓이 분명한 식 또는 문장을 명제라 합니다. 예를 들어 “유재석은 키가 크다.”는 문장은 사람에 따라 키가 크다는 것에 대한 기준이 다를 수 있으므로 명제가 아닙니다. 반면 “5는 자연수이다.”는 참인 명제이고 “얼룩소는 소가 아니다.”는 거짓인 명제입니다.

조금 더 중요한 예를 들어보겠습니다. 피타고라스 정리는 명제일까요? **중학교 수학 과정에서 피타고라스 정리가 성립함을 증명하였으므로 피타고라스 정리는 참인 명제입니다.** 마찬가지로 나머지 정리, 인수 정리, 중선 정리는 모두 명제입니다. 뿐만 아니라 등식의 성질, 켈레복소수의 성질, 제곱근의 성질, 로그의 성질, 극한의 성질, 곱셈 공식, 이차방정식의 근의 공식, 미분 공식, 드 모르간의 법칙, 지수 법칙 등 수학에서 다루는 모든 정리 · 성질 · 공식 · 법칙은 명제입니다.¹⁾

② ‘ $p \rightarrow q$ ’ 꼴의 명제

: 학생들에게 이차방정식의 근의 공식에 대해서 물어보면

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

라고 답하는 경우가 많습니다. 하지만 이것은 이차방정식의 근의 공식의 결론일 뿐, 이차방정식의 근의 공식이라 할 수 없습니다. 이차방정식의 근의 공식은

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0, a, b, c \text{는 실수}) \text{이면 } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

입니다.²⁾ 이차방정식의 근의 공식 뿐 아니라 모든 명제는 가정과 결론으로 이루어진 ‘ $p \rightarrow q$ ’의 꼴로 생각할 수 있습니다. 이를 토대로 효율적이고 체계적인 학습 방법에 대해서 알아보겠습니다.

¹⁾수학 교과서에서 정리 · 성질 · 공식 · 법칙 중에서 명제가 아닌 것이 있는지 확인해 보기 바랍니다.

²⁾이때 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0, a, b, c$ 는 실수)을 가정, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 를 결론이라 합니다.

③ 효율적이고 체계적인 학습 방법

: 모든 정리 · 성질 · 공식 · 법칙은 명제이므로 정리 · 성질 · 공식 · 법칙이 나오면

[공부법 4] 명제와 그 증명에 쓰인 핵심 아이디어

[공부법 5] 명제의 가정과 결론

[공부법 6] 필요충분조건

에 대하여 신경 써서 공부해야 합니다.³⁾ 왜 그런지 하나씩 살펴볼까요?

³⁾ 학습 방법에 대한 상담 및 수업에서는 다섯 가지를 이야기하지만 이 책에서는 세 가지만 이야기하도록 하였습니다.

[공부법4] 명제와 그 증명에 쓰인 핵심 아이디어

: 참 · 거짓이 분명한 식 또는 문장을 명제라 합니다. 그런데 수학에서 다루는 모든 정리 · 성질 · 공식 · 법칙은 명제므로 정리 · 성질 · 공식 · 법칙이 나오면 그것이 왜 참인지 또는 왜 거짓인지를 명확히 알아야 합니다. 즉, 명제와 그 증명에 쓰인 핵심 아이디어에 대해 신경 써서 공부해야 합니다.⁴⁾

다음 문제에 대해 생각해봅시다.

[예제1-1] 두 집합 $\{1, 2, 3\}$ 과 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여

$$\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하시오.

[풀이1] [풀이2]

[풀이] 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

⁴⁾이것이 중요한 학습목표이기 때문입니다.

고등학교 1학년 과정에는 다음과 같은 정리가 있습니다.

[정리1-1] 자연수 n 에 대하여 집합 A 의 원소가 n 개일 때,

- 1) A 의 부분집합의 개수는 2^n 개
- 2) A 의 원소 중 특정한 m 개를 포함하고 r 개를 포함하지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-m-r} 개 (단, m, r 은 0 이상의 정수이고 $m+r \leq n$)

이다.

[증명]

[정리1-1]을 이용해서 [예제1-1]을 다음과 같이 풀 수 있습니다.

[풀이1] X 는 1, 2, 3을 포함하는 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합이므로 X 는 2^{5-3} 개이다. ■

상위권 학생들을 포함한 대부분의 학생들이 위와 같은 유형의 문제를 [예제1-1]의 [풀이1]과 같은 방식으로 해결합니다. 이는 올바른 풀이지만 올바르게 공부한 것이라 보기는 어렵습니다.⁵⁾ 왜 그런지 아래의 [예제1-2]를 풀어보도록 합시다.

[예제1-2] 두 집합 $\{1, 2, 3\}$ 과 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 에 대하여

$$\{1, 2, 3\} \subset X \subset Y \subset Z \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

을 만족하는 집합 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z) 의 개수를 구하시오.

[풀이]

[풀이] 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

⁵⁾[정리1-1]의 결과를 올바르게 적용해서 문제를 해결했지만, 풀이를 여기에서 마친다면 [정리1-1]에 쓰인 핵심 아이디어를 놓치기 쉽기 때문입니다.

[예제1-2]는 [예제1-1]의 [풀이1]과 같이 [정리1-1]의 결과를 적용해서 풀기는 어렵습니다. [예제1-2]를 풀지 못했거나 지나치게 복잡한 방법으로 해결했다면 이는 [예제1-2]가 특별히 어려운 문제라거나 [예제1-2]와 그 풀이를 제대로 유형화하지 못했기 때문이 아니라, [정리1-1]을 증명하는데 쓰인 핵심 아이디어를 놓쳤기 때문일 가능성이 높습니다.

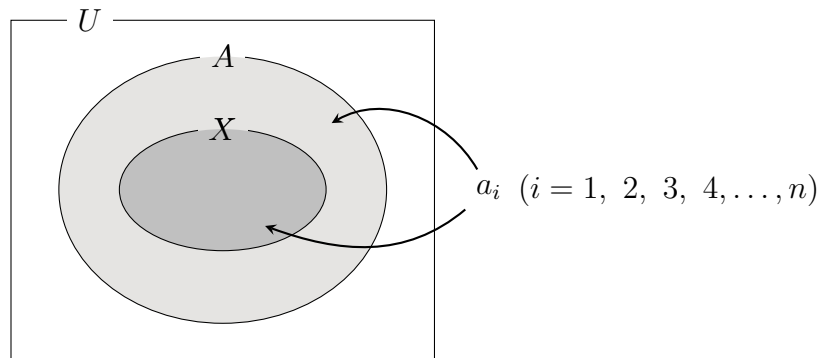
그럼 [정리1-1]의 증명에 쓰인 핵심 아이디어가 무엇인지 알아보고, 이를 이용하여 [예제1-1]과 [예제1-2]를 다시 풀어보도록 하겠습니다.

[증명] 전체집합을 U 라 하고 집합 A 를

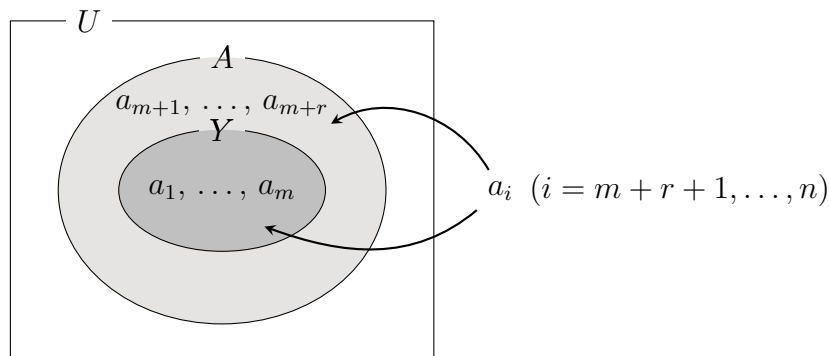
$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

이라 하자.

- 1) $X \subset A$ 라 하자. 이때 A 의 원소의 입장에서 경우의 수를 생각해보면, 아래의 벤 다이어그램에서 a_1, a_2, \dots, a_n 이 들어갈 수 있는 영역은 X 또는 $A - X$ 의 두 가지이므로 $X \subset A$ 를 만족하는 X 의 개수는 2^n 개이다.



- 2) a_1, a_2, \dots, a_m 은 포함하고 $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+r}$ 은 포함하지 않는 A 의 부분집합을 Y 라 하자. 마찬가지로 A 의 원소의 입장에서 경우의 수를 생각해보면, 아래의 벤 다이어그램에서 a_1, a_2, \dots, a_m 이 들어갈 수 있는 영역은 Y 뿐이고, $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+r}$ 이 들어갈 수 있는 영역은 $A - Y$ 뿐이다. 한편 $a_{m+r+1}, a_{m+r+2}, \dots, a_n$ 이 들어갈 수 있는 영역은 Y 또는 $A - Y$ 의 두 가지이다.



따라서 Y 가 될 수 있는 것의 개수는 2^{n-m-r} 개이다. ■

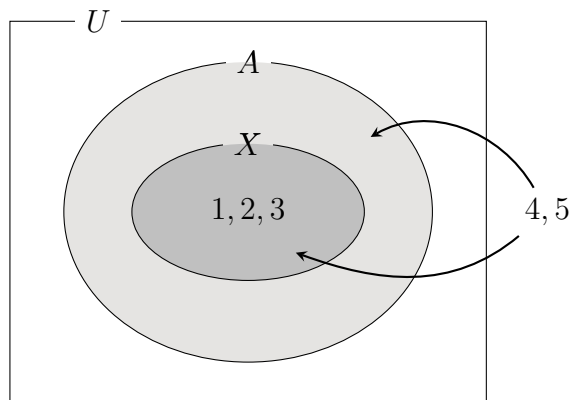
[정리1-1]의 [증명]에 쓰인 핵심 아이디어는

“원소의 입장에서 경우의 수를 생각”

하는 것입니다. 그럼 이제 [정리1-1]의 증명에 쓰인 핵심 아이디어를 이용하여 [예제1-1]과 [예제1-2]를 풀어볼까요?

먼저 [예제1-1]의 두 번째 풀이를 보겠습니다.

[풀이2] 집합 A 를 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 라 하자. 그러면 X 는 1, 2, 3을 포함하는 A 의 부분집합이므로 아래의 벤 다이어그램에서 1, 2, 3이 들어갈 수 있는 영역은 X 뿐이고, 4, 5가 들어갈 수 있는 영역은 X 또는 $A - X$ 의 두 가지이다.



따라서 X 의 개수는 2^2 개이다. ■

[정리1-1]의 핵심 아이디어를 이용한 [예제1-1]의 [풀이2]도 쉽지만, [예제1-1]의 [풀이1]이 워낙 간단하기 때문에 [정리1-1]의 핵심 아이디어가 별 필요 없는 것처럼 느껴질 수도 있습니다.

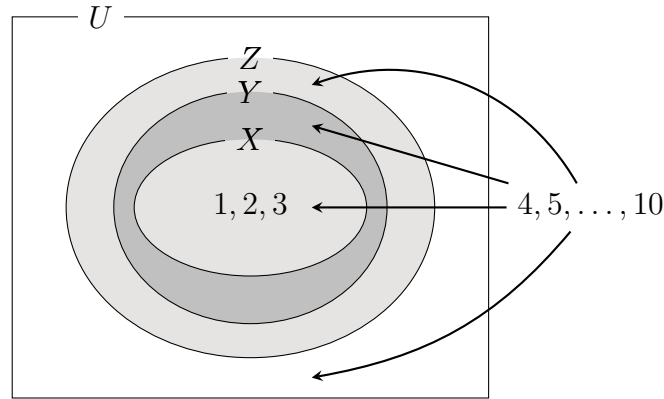
[정리1-1]의 핵심 아이디어를 이용하여 [예제1-2]를 다시 풀어본 후에 다음 페이지의 [풀이]을 보도록 합시다.

[풀이] 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

[풀이] 집합 U 를 $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이라 하자. 그러면 아래의 벤 다이어그램에서 1, 2, 3이 들어갈 수 있는 영역은 X 뿐이고, 4, 5, ..., 10이 들어갈 수 있는 영역은

$$X \text{ 또는 } Y - X \text{ 또는 } Z - Y \text{ 또는 } U - Z$$

의 네 가지이다.



따라서 순서쌍 (X, Y, Z) 의 개수는 4^7 개이다. ■

[예제1-2]는 [정리1-1]의 결과를 적용하여 풀기는 매우 어렵지만 [정리1-1]의 증명에 쓰인 핵심 아이디어를 이용하면 [예제1-1]과 같이 쉽게 풀 수 있습니다.

“[예제1-1]은 [정리1-1]의 결과를 적용해서 푸는 문제”와 같이 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부하면, 명제의 증명에 쓰인 핵심 아이디어를 놓치게 됩니다. 이렇게 되면, 시험에서 [예제1-2]와 같이 [정리1-1]의 핵심 아이디어를 제대로 학습했는지 평가하는 문제를 해결하지 못할 가능성이 매우 높습니다. 명제의 증명과 이에 쓰인 핵심 아이디어를 정확하게 이해하는 것은 매우 중요한 학습 목표이기 때문에 신경 써서 공부해야 합니다.⁶⁾

예를 하나 더 살펴보도록 하겠습니다.

[예제1-3] $0 \leq \theta \leq 5\pi$ 인 실수 θ 에 대하여

$$\sin \theta = 7 \cos \theta + \frac{8\sqrt{7}}{3}$$

을 만족하는 θ 의 개수를 구하시오.

[풀이1] [풀이2]

[풀이] 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

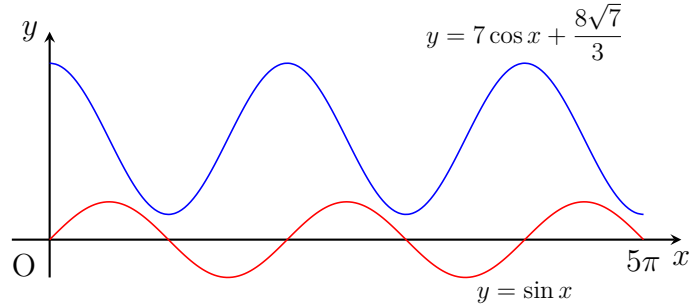
⁶⁾명제의 증명에 쓰인 핵심 아이디어를 이해하는 것은 매우 중요한 학습 목표이기 때문에, 다양한 형태로 시험에 출제가 됩니다.

[풀이1] $0 \leq x \leq 5\pi$ 에서 $y = \sin x$ 와 $y = 7 \cos x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 의 그래프의 교점의 개수를 구한다. ☒

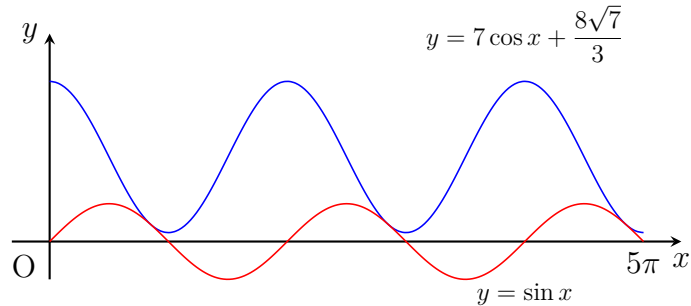
[예제1-3]의 [풀이1]이 제법 그럴듯해 보이지만, 이 문제는 이와 같은 방식으로 풀기 어렵습니다.⁷⁾ 왜 그럴까요? 이에 대해 충분히 고민해 본 후에 다음 페이지의 [분석1-1]을 보도록 합시다.

⁷⁾대부분 학생들이 [예제1-3]과 같은 유형의 문제를 크게 두 가지 방법으로 해결합니다. 첫 번째는 [풀이1]과 같이 그래프를 이용한 방법이고, 두 번째는 $\sin \theta = 7 \cos \theta + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 의 양변을 제곱한 후 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ 임을 이용하여 대수적으로 푸는 방법입니다. 두 번째 방법을 [예제1-3]에 적용하면 계산이 너무 복잡해서 실수하기 쉽습니다.

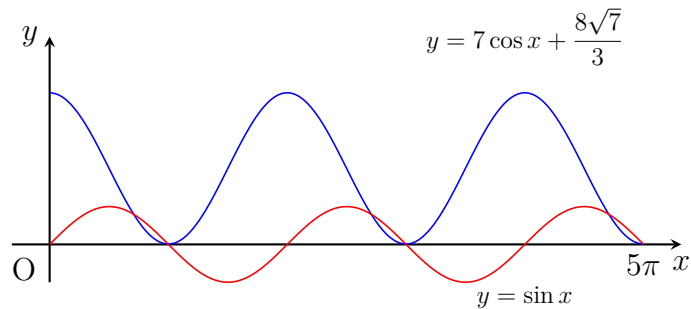
[분석1-1] [예제1-3]을 [풀이1]과 같이 풀기 어려운 이유는 간단합니다. 특수각에 대한 삼각함수의 값을 계산하는 것만으로는 두 함수 $y = \sin x$ 와 $y = 7 \cos x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 의 그래프의 개형이 아래의 [그림1], [그림2], [그림3] 중 어떤 것과 같은지 알 수 없기 때문입니다.



[그림1]



[그림2]



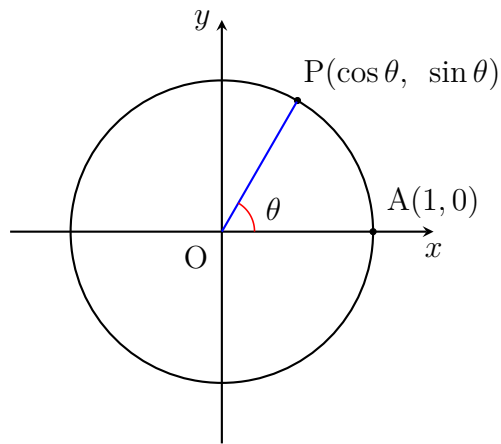
[그림3]

그러므로 고등학교 수준에서 [예제1-3]을 [풀이1]과 같이 풀기는 어렵습니다. ■

그럼 [예제1-3]은 어떻게 풀어야 할까요? 충분히 고민해 본 후에 다음 페이지를 보도록 합시다.

[풀이] 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

삼각함수의 그래프를 유도하는데 쓰인 핵심 아이디어는 아래의 그림과 같이



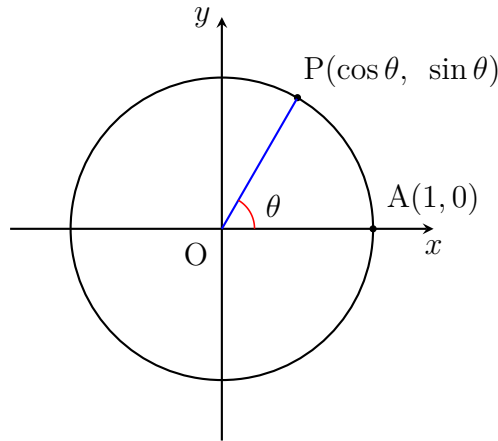
“점 $A(1, 0)$ 과 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여
 $\angle POA = \theta$ 일 때, 점 P 의 좌표를 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 로 생각할 수 있다는 것”

입니다.⁸⁾ 이를 이용해 [예제1-3]을 다시 풀어본 후에 다음 페이지의 [풀이2]를 보도록 합시다.

[풀이] 직접 풀어 본 후에 다음 페이지의 풀이를 봅시다.

⁸⁾보다 자세한 내용이 알고 싶으시면 ‘수학의 정석’의 ‘수학I (기본)’의 110쪽을 참고하셔도 좋습니다.

[풀이2] 좌표평면 위의 점 A의 좌표를 (1, 0)이라 하자. 이때, 실수 θ 에 대하여 $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ 라 하면 점 P(x, y)는 $\angle AOP = \theta$ 인 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이 된다.



그런데 $0 \leq \theta \leq 5\pi$ 이므로 점 P는 A에서 출발해서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 반시계 방향으로 두 바퀴 반 회전하는 것으로 생각할 수 있다.

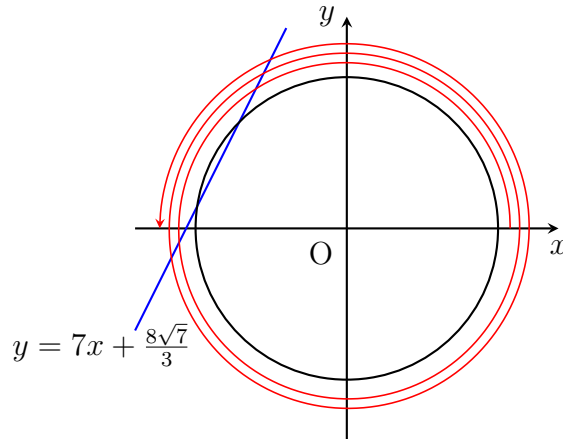
한편, 주어진 식 $\sin \theta = 7 \cos \theta + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 에 $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ 를 대입하면 $y = 7x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 이므로

“실수 $0 \leq \theta \leq 5\pi$ 에 대하여 $\sin \theta = 7 \cos \theta + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 을 만족하는 θ 의 개수”

가

“직선 $y = 7x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 과 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직이는 점 P가 만나는 횟수”

와 같음을 알 수 있다. 이를 좌표평면에 그림으로 나타내면 아래와 같다.⁹⁾



점 P가 점 A에서 출발하여 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 반시계 방향으로 두 바퀴 반 회전하는 동안 직선 $y = 7x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 와 6번 만나므로 답은 6개이다. ■

⁹⁾ 직선 $y = 7x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 의 x절편이 -1 보다 작고, 원의 중심 O와 직선 $y = 7x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 과 원 $x^2 + y^2 = 1$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1 보다 작음을 통해 원과 직선의 위치 관계를 알 수 있습니다.

[예제1-3]은 [풀이1]처럼 $y = \sin x$ 와 $y = 7 \cos x + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 의 그래프를 이용해서 접근해서 푸는 것은 고등학교 수준에서 불가능하고, $\sin \theta = 7 \cos \theta + \frac{8\sqrt{7}}{3}$ 의 양변을 제곱한 후 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ 를 이용하여 방정식으로 접근하면 계산이 매우 복잡하고 어려울 뿐 아니라 실수하기도 매우 쉽습니다.¹⁰⁾ 반면, $(\cos \theta, \sin \theta)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이라는 사실에 착안하면 [풀이2]와 같이 쉽게 풀 수 있습니다.¹¹⁾

이 아이디어가 핵심적인 역할을 하는 문제는 시중 문제집에도 많이 수록되어 있습니다. 예를 들어 볼까요?

[예제1-4] 실수 θ 에 대하여

$$\frac{\sin \theta - 4}{\cos \theta - 3}$$

의 최댓값 M 과 최솟값 m 의 합 $M + m$ 의 값을 구하시오.

문제를 충분히 풀어본 최상위권 학생들의 경우, $(\cos \theta, \sin \theta)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이라는 것을 이용하여 [예제1-4]와 같은 문제를 쉽게 해결합니다.¹²⁾ 그런데 최상위권 학생들 중 대부분이 [예제1-3]을 풀 때는 이 아이디어를 떠올리지 못하고 [풀이1]처럼 그래프를 이용해서 접근하거나 양변을 제곱한 후에 풀려고 합니다. 왜 그럴까요?

최상위권 학생들조차도 대부분 “[예제1-3]은 그래프를 이용해 푸는 문제”, “[예제1-4]는 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 를 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점으로 생각해서 푸는 문제”와 같이 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부했기 때문일 것입니다.

명제와 그 증명의 핵심 아이디어를 이해하는 것은 중요한 학습 목표이기 때문에 시험에도 자주 출제가 됩니다.¹³⁾ 때로는 익숙한 방법으로 쉽게 풀 수 있도록 출제가 되기도 하지만, 때로는 [예제1-2]나 [예제1-3]과 같이 익숙한 방법으로는 해결하기 어려운 형태로 출제가 되기도 합니다. 시험에 이와 같은 문제가 출제될 경우, 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한 학생은 크게 당황할 가능성이 높지만, 명제와 그 증명의 핵심 아이디어에 대해 신경 써서 공부한 학생이라면 당황하지 않고 쉽고 정확하게 해결할 수 있을 것이라 생각합니다.¹⁴⁾ 그러므로 명제와 그 증명에 쓰인 핵심 아이디어를 신경 써서 공부하는 것을 크게 권장합니다.

¹⁰⁾ 계산만 복잡한 것이 아니라, 양변을 제곱하는 과정에서 필요충분조건이 깨지기 때문에 실수하기 쉽습니다.

¹¹⁾ 대단한 풀이는 아니지만, 학교 수업에서 이 풀이로 하나고 2기 학생들에게 기립박수를 받았던 기억이 나네요 :)

¹²⁾ $\frac{\sin \theta - 4}{\cos \theta - 3}$ 가 점 $(3, 4)$ 와 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 한 점 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 를 지나는 직선의 기울기임을 이용하면 쉽게 풀 수 있습니다. 자세한 풀이는 생략합니다.

¹³⁾ 중요하기 때문에 시험에 출제되는 것이지, 시험에 출제되기 때문에 중요한 것이 아닙니다.

¹⁴⁾ 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한 학생이라면, 시험에서 [예제1-2]나 [예제1-3]과 같은 문제를 접할 경우 크게 당황할 가능성이 높습니다. 이와 같은 문제에 시간만 뺏기고 답을 내지 못하게 되면 멘탈이 무너져 시험 전체에 크게 마이너스가 되기도 합니다.

[요약]

: 수학에서 다루는 모든 정리 · 성질 · 공식 · 법칙은 명제이므로 정리 · 성질 · 공식 · 법칙이 나오면 그것이 왜 참인지 또는 왜 거짓인지를 명확히 알아야 합니다. 따라서

[공부법 4] 명제와 그 증명에 쓰인 핵심 아이디어

에 대해 공부해야 합니다. 뿐만 아니라, 모든 명제는 가정과 결론으로 이루어진 ' $p \rightarrow q$ '의 꼴이므로

[공부법 5] 명제의 가정과 결론

[공부법 6] 필요충분조건

에 대해 공부해야 합니다. [공부법 4], [공부법 5], [공부법 6]을 모두 신경 써서 공부했다면, 삼단논법을 통해 문제를 분석하고 논리적으로 해결하는 방식으로 학습의 완성도를 높여나가면 됩니다.

제 2장에서는 명제에 대한 이해를 바탕으로 효율적으로 공부하는 방법에 대해서 알아보았습니다.¹⁵⁾ 제 3장에서는 연산에 대한 이해를 바탕으로 효율적인 공부 방법에 대해서 다루도록 하겠습니다.

¹⁵⁾ 여기에 제시된 예제 뿐 아니라 수학의 모든 문제가 예제입니다. 쉬운 문제에서부터 어려운 문제까지 [공부법 4], [공부법 5], [공부법 6]을 적용하는 연습을 해보세요. 쉬운 문제에서부터 연습하지 않고 어려운 문제에 바로 적용하는 것은 쉽지 않습니다. 반면 쉬운 문제에서부터 착실하게 연습한다면 어려운 문제에도 쉽게 적용할 수 있을 것입니다.

맺음말

: 그저 열심히‘만’ 공부 중인가요? **잘못된 방법으로 그저 열심히‘만’ 공부한다면 ‘노력’이 당신을 ‘배신’할 수도 있습니다.** 열심히 공부하는데도 성적이 오르지 않는다면 공부 방법을 바꾸어야 합니다. **수학의 구조와 원리에 대한 이해를 바탕으로 공부한다면 훨씬 쉽고 재미있게 공부할 수 있습니다.**¹⁶⁾

이 책에서는 효과적인 공부를 위해

“수학에서 다루는 모든 정리 · 성질 · 공식 · 법칙은 명제이다.”

라는 사실에 착안하여, 명제의 관점에서 공부 방법을 제시하였습니다.

수학에서 다루는 모든 정리 · 성질 · 공식 · 법칙은 명제이므로 정리 · 성질 · 공식 · 법칙이 나오면 그것이 왜 참인지 또는 왜 거짓인지를 명확히 알아야 합니다. 따라서

[공부법 4] 명제와 그 증명에 쓰인 핵심 아이디어

에 대해 공부해야 합니다. 뿐만 아니라, 모든 명제는 가정과 결론으로 이루어진 ‘ $p \rightarrow q$ ’의 꼴이므로

[공부법 5] 명제의 가정과 결론

[공부법 6] 필요충분조건

에 대해 공부해야 합니다. [공부법 4], [공부법 5], [공부법 6]을 모두 신경 써서 공부했다면, 삼단논법을 통해 문제를 분석하고 논리적으로 해결하는 방식으로 학습의 완성도를 높여나가면 됩니다.

두 번째 비밀에서는 명제에 대한 이해를 바탕으로 효율적으로 공부하는 방법에 대해서 알아보았습니다.¹⁷⁾ 세 번째 비밀에서는 연산에 대한 이해를 바탕으로 효율적인 공부 방법에 대해서 다루도록 하겠습니다.

¹⁶⁾수학도 “知彼知己, 百戰不殆”입니다.

¹⁷⁾여기에 제시된 예제 뿐 아니라 수학의 모든 문제가 예제입니다. 쉬운 문제에서부터 어려운 문제까지 [공부법 4], [공부법 5], [공부법 6]을 적용하는 연습을 해보세요. 쉬운 문제에서부터 연습하지 않고 어려운 문제에 바로 적용하는 것은 쉽지 않습니다. 반면 쉬운 문제에서부터 착실하게 연습한다면 어려운 문제에도 쉽게 적용할 수 있을 것입니다.