P · A · R · T

0 Zero

삼각함수 도형의 극한을 대하는 우리 자세

미적분 선택과목을 선택하신 여러분이 항상 정답을 챙기고 시간을 벌 수 있는 유일한 파트일 것입니다.

우리의 목표는 단 하나입니다.

‘정확하고 빠르게 삼도극을 수능에서 푸는 것입니다.’

이 책에서 ’차수논리‘와 더불어 가장 중요한 부분이니 천천히 읽어주시고, 뒷 부분에서 이해가 안되면 언제나 여기로 돌아와 정독해주시기 바랍니다!

◭ Zero. 삼각함수 도형의 극한을 대하는 우리의 자세

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\theta}=1$$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\theta+\theta^2}{\theta}=1$$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\theta+\theta^2+\theta^3}{\theta}=1$$

이 세 가지 식의 값이 모두 같다는 것에서 근사는 시작합니다.

우리가 흔히 '$x\to\infty$'의 상황에서 다항식의 분수로 표현된 식의 극한값을 구할 때 최고차항을 기준으로 해석합니다. ex) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{2n^2+n}=\frac{1}{2}$

θ가 0으로 가는 상황도 마찬가지이지만, 정확히 반대로 해석하시면 됩니다.

[최저차항]을 기준으로 하는 겁니다. 즉, 위의 식들 모두 최저차항이 θ에 대해 1차이고, 분모도 1차이므로 모두 값이 같다는 것을 알 수 있는 것입니다. 따라서, 우리는 삼각함수 도형의 극한을 계산할 때 정말로 필요한 부분까지만 얻어내면 된다는 것입니다.

ex) $\lim_{\theta\to0}\left(\frac{2}{\theta}+4\right)\approx\frac{2}{\theta}$ ($\because$ 세타가 분모에 있으면 그 분수는 사실상 무한대로 가기 때문)

또한, 우리가 다루는 식은 곱으로 이루어지지 않은 단일한 식에서 단 [3차]까지만 나옵니다.

$\sin\theta$, $\tan\theta\to\theta$에 대해 1차

$(1-\cos\theta)$, $(\sec\theta-1)\to\theta$에 대해 2차

$(\tan\theta-\sin\theta)=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times(1-\cos\theta)\to\theta$에 대해 3차

_ 위의 식들이 왜 각각 1, 2, 3차인지는 뒤에서 서술하도록 하겠습니다.

이처럼 차수에 대한 논리에 기반한 근사를 해야 만이 수식적으로 엄밀한 근사가 가능하며,

도형의 모양으로 대충 근사하는 방법으로부터 발생하는 오류를 잡을 수 있습니다.

따라서, 우리는 이렇게 세 가지 차수의 엄밀성 중 상황에 맞는 것을 골라야 합니다.

예시를 들어봅시다.

$\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{(1-\cos\theta)}{\theta^2} = ?$ 의 상황에서 우리는 분모가 2차이기에 2차까지 엄밀해야 합니다.

만일 여기서 $\cos\theta$를 1로 근사하여 계산해버리는 순간, 분자는 0이라고 나오면서 계산이 불가해집니다.

하지만, 교과서에 나와있듯이 저 문제 상황의 답은 실제로 $\dfrac{1}{2}$입니다. $\cos\theta$를 1로 쓸 수 있느냐, $1-\dfrac{1}{2}\theta^2$로 쓰느냐의 차이인 것이죠. 이러한 문제점을 모르는 채로 근사를 하게 되면 이유도 모르고 오류가 나는 것입니다. 따라서, 이 책에서 이와 같은 차수로 인한 오류를 수정하는 방법을 배우고 정답률 100%의 근사를 터득해봅시다.

◭ 삼각함수 도형의 극한의 목적

목적: 답을 도출하는 데에 필요한 최소한의 차수만 계산하여 정확하고(1) 빠르게(2) 답을 맞추는 것.

이 목적을 '완전히' 이해한다면 모든 문제를 근사로 풀 수 있게 됩니다. 그만큼 앞으로 절대 잊어서는 안 되는 문장이니 여러 번 읽어주시고, 앞으로의 공부의 근간으로 여겨주세요.

하지만, 이 문장을 보고 대다수의 근사를 이용하는 학생들은 '최소한의 차수'라는 말을 온전히 알지 못해 어떤 문제는 맞추고 어떤 문제는 틀리게 되는 도박판에 처하게 됩니다. 그러나, 우리는 인생이 걸린 수능장에서도 정답에 대한 확신을 가질 수 있어야 합니다. 결국 저 목적에 대한 완전한 이해를 하는 것이 여러분들이 근사 공부에 있어서 해야 하는 일인 겁니다.

우선, 삼각함수 도형의 극한에 대한 풀이는 우선 두 단계로 나뉩니다.

1. 도형의 성질을 이용해 식을 세운다.
2. 식을 계산한다.

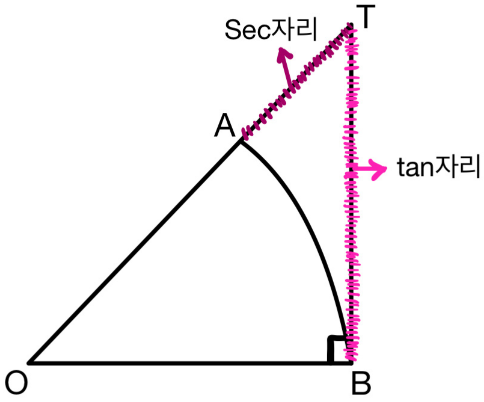
흔히들 사용하는 근사는 [2. 식을 계산한다]에 대한 근사입니다.

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ 들을 변형하여

$\lim_{x\to0}\sin x\approx x$, $\lim_{x\to0}\tan x\approx x$, $\lim_{x\to0}(1-\cos x)\approx\frac{1}{2}x^2$ 을 알 수 있다.

이 사실들을 식 근사에서만 사용하는 것에 한정되었던 것이 기존의 풀이입니다. 하지만, 이 사실들을 [1. 도형의 성질을 이용해 식을 세운다]에서도 사용한다면 [2. 식을 계산한다]에서 계산해야 하는 식 자체를 간단하게 만들 수 있습니다.

이제 여러분들이 이 책에서 근사를 본격적으로 배우기 위해서 알아두어야 하는 예열 단계는 끝이 났으며, 지금부터는 개념 학습이 시작될 것입니다. 포스트잇과 펜을 챙기고 따라오세요!



위의 과정과 동일하게 해봅시다.

$\overline{\mathrm{AT}}=\mathrm{R}(\sec\theta-1)\approx R\times\frac{1}{2}\theta^2$ _ 앞으로 **sec자리**

$\overline{\mathrm{BT}}=\mathrm{R}\tan\theta\approx R\times\theta$ _ 앞으로 **tan 자리**

지금까지 한 것을 모두 정리해봅시다.

✓ Skill [기본 근사]

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BT}}\approx R\theta,\ \overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AT}}\approx R\times\frac{1}{2}\theta^2$

$\overline{\mathrm{AC}}=\mathrm{R}\sin\theta\approx R\theta$ _ Sin자리

$\overline{\mathrm{BC}}=\mathrm{R}(1-\cos\theta)\approx R\times\frac{1}{2}\theta^2$ _ Cos자리

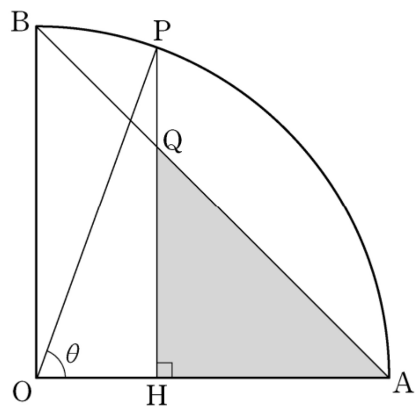
$\overline{\mathrm{BT}}=\mathrm{R}\tan\theta\approx R\times\theta$ _ Tan자리

$\overline{\mathrm{AT}}=\mathrm{R}(\sec\theta-1)\approx R\times\frac{1}{2}\theta^2$ _ Sec자리

기본 근사할 때 주의하셔야 할 부분은 바로 꼴 확인입니다. 기본근사는 원의 중심으로부터 만들어진 부채꼴의 중심각이 θ로 표현되어 0으로 갈 때 사용하는 것입니다. 부채꼴이 아니거나, 중심각이 실제 각일 때 사용하지 않도록 유의하시기 바랍니다.

02

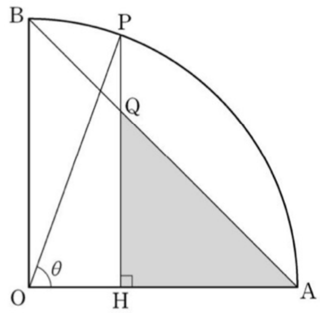
그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

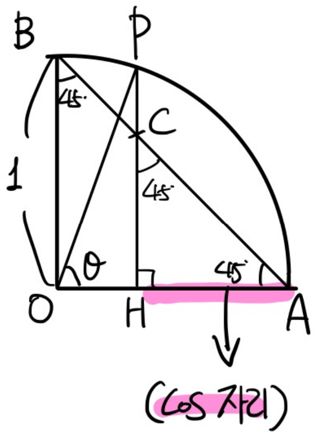


정석풀이

근사풀이

기본 근사 (Cos자리)



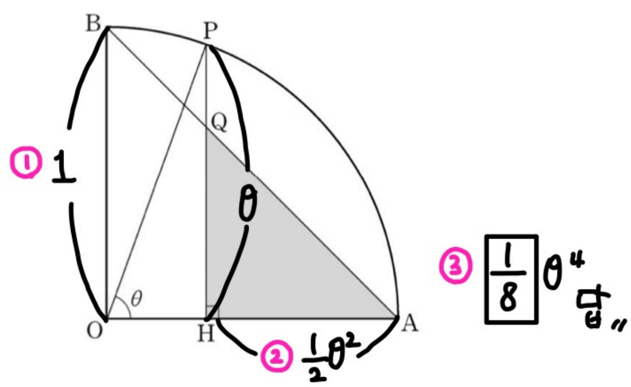


$\therefore \overline{HA} = \frac{1}{2}\theta^2$

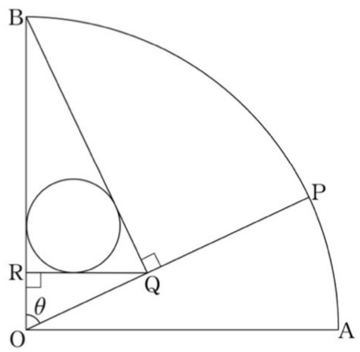
$\triangle CAH = \frac{1}{2} \times \left(\underbrace{\frac{1}{2}\theta^2}_{\overline{HA}}\right)^2 = \frac{1}{8}\theta^4$

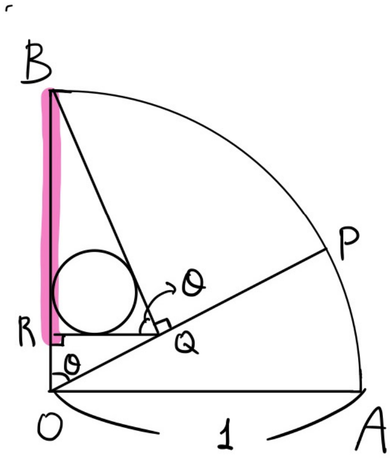
$\therefore \lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta^4} = \boxed{\frac{1}{8}}$ 답

✓ Mini_Map



직각삼각형의 성질, 가벼운 기본 근사

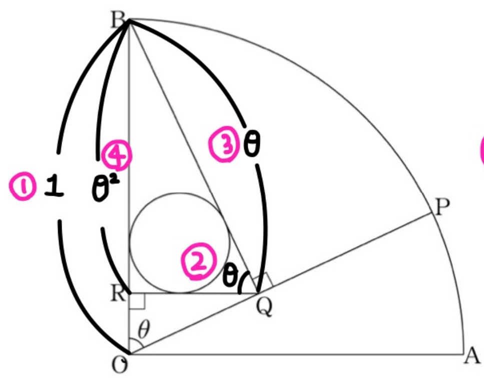




$\overline{OB}=1 \rightarrow \overline{BQ}=\theta \rightarrow \overline{BR}=\theta^2$ ($\because$ sin 자리)

직각삼각형의 성질 ; $2r=\overline{BR}=\theta^2 \quad \therefore r=\frac{1}{2}\theta^2 \rightsquigarrow \lim_{\theta\to 0}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$ 답

✓ Mini_Map



⑤ $r=\frac{1}{2}\theta^2$

↓

$\boxed{\frac{1}{2}}$ 답,,

이번엔 진짜 쉬어가는 글 _

수능장에는 별의별 사람이 다 있습니다!

1 누구에게나 첫 수능이 있다

때는 바야흐로 2020년 수능날이었습니다.
당시 인생 처음으로 수능을 보던 저는 인생의 마지막 평가원 시험이라는 생각으로(풉) 등교를 했습니다.
슬리퍼도 안 가져갔었고, 수특이랑 물통, 도시락통 들고 등교를 했었고, 불안한 마음에 시계, 필기구들 모두 두 개씩 가져왔었습니다. 책상과 의자 밑에 종이도 껴 넣어서 흔들리지 않게 고정도 했고, 모든 게 다 계획대로 흘러가고 있었습니다. 그 사람이 오기 전까지...

2 누구에게나 수능이 평범하지는 않다

오른쪽 앞, 그러니까 대각선 앞에 한 분이 앉았습니다. 덩치가 좀 있으신 분이었는데 막 눈에 띄진 않으셨어요. 수능 시계를 꺼내기 전까지는요... 감독관들이 돌아다니면서 검사를 합니다. 얼굴 확인하고, 자리 보고 그런 거요. 그런데 그때, 갑자기 그가 꺼낸 시계는 일반적인 수능 시계가 아니었습니다. 다름 아닌 자명종, 미키마우스 모양의 종이 두 개 머리에 달린 바로 그 시계 말이죠. 그걸 꺼내고 감독관에게 물어보더군요. 이 시계밖에 없는데 가능할까요? 머리를 싸매다가 이내 나가신 감독관 님. 몇 분 후 돌아왔지만 규정상 문제없다고 하네요. 그렇게 시작된 국어 시간. 왠지 울리지 않을까 자꾸 시선이 가다 결국은 그 시계로 제 시간을 체크하기까지 이르렀습니다. 왜냐면 화면이 너무 커서 잘 보이거든요! 정신없이 풀고 대충 하나 정도 틀렸을 거라 생각했던 국어 시험을 그 시계와 함께 끝냈습니다. 결과적으로는 난생 처음 뜬 2에 눈물을 흘렸지만요.

3 누구는 수능 때 특이한 일을 여럿 겪는다

그래도 알림이 안 울리는 자명종에 어느새 정이 들었습니다. 나의 첫 수능 시험을 함께 한 전우 같았달까요...? 국어를 치고 나서 수학이 시작하기 전 쉬는 시간에 반드시 초콜릿 같은 것을 먹어야 합니다. 국어 풀면 정말 진이 빠지고 당 떨어지는 느낌 들면서 머리가 핑 돌거든요. 그래서 저도 준비했던 금박에 싸인 동글동글한 그 초콜릿을 꺼내 먹었습니다. 그런데 또 그때. 대각선 앞 그분, 자명종 그분이 가방에서 또 무언가를 꺼내는 겁니다. 책상보다 조금 작은 흰 박스, 그 위에 쓰인 초록색 글씨. 콜라스파 콜라와 초성이 같은 그 도넛이었습니다. 달달한 맛에 유명한 그 집이요. 열어보니 6개의 베이지색 도넛이 가득 들어있었습니다. 그리고 시작된 도넛 먹방. 향기로운 향과 함께 너무 맛나게 먹는 그 모습은 쉬는 시간 동안 눈을 감고 쉬기보다는, 홀린 듯 구경하게끔 만들기에 충분했습니다.

4 누구에게나 첫 수능은 있지만, 그 이후의 수능은 누구에게만 있다

다사다난했던 제 현역 21 수능은 그렇게 게속 진행되었고, 인생 첫 국어 2, 인생 첫 영어 2 with 듣기 3점 틀려 나온 89점, 수학 88, 화학1 47로 1등급, 물리2 계속 백분위 98 이상이었다가 수능날 40점대지만 등급은 4가 뜨며 (이때 2등급 blank가 뜨긴 했지만 충격적 결과...), 커리어 로우로 결과가 나왔습니다. 이때 제 패인은 압도적인 긴장감 속 경직된 사고, 약속된 플레이를 준비해가지 않음, 시간이 지나가는 거에 대해 곤두선 신경 등이었던 것 같네요. 수능장에서도 할 수 있을까? 라는 생각을 공부하면서 계속 생각해야 될 겁니다. 아무리 긴장돼도 내가 XX를 보면 OO로 반응해야겠다는 것과 같이 약속된 플레이, [생각의 회로]를 많이 준비해 가시길 바랍니다. 고등학생이 초등학생 문제로 시험 보면 긴장이고 뭐고에 상관없이 성적이 잘 나오는 것처럼, 수능이 시시해지고 지루해질 때까지 배움을 정진하시길 바랍니다. 그리고 숨 막히는 수학 시험 중에서도 삼도극만큼은 너무 쉽게 풀려서, 다른 문제를 풀 시간도 확보가 될 수 있도록, 삼극사기가 도움이 되길 바랍니다! _ 올해가 후회 없는 마지막 수능이 되도록 :)

P · A · R · T

3

THREE

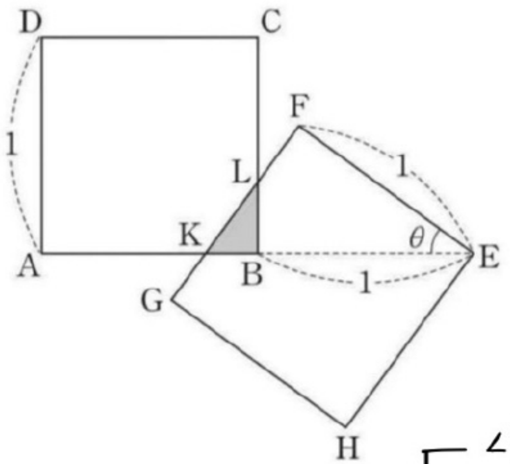
정석해설

식을 정석적으로 세우고, 계산 시에는 기본 근사만을 활용했습니다.

몇몇 문제 중 정석 풀이가 과하게 식이 긴 경우,

근사로 푸시길 권장하는 의미에서 풀이를 생략했으니 참고하시길 바랍니다.

기본 근사 예제 1



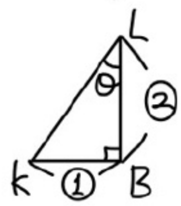
$$\boxed{\text{발문\_ } \lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = ?}$$

Ⓐ : △BKL 넓이 ⇝ Ⓝ

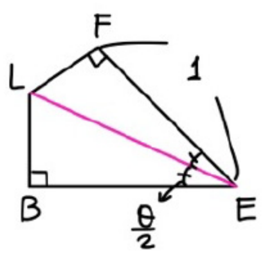
- $\angle KBL \rightsquigarrow \frac{\pi}{2}$
- $\overline{KB}$ ··· ①
- $\overline{LB}$ ··· ②

$\angle FEB = \theta \rightsquigarrow \angle KLB = \theta$

↓



① = ② × $\tan\theta$



(∵ RHS합동)

; $\overline{LB} = \tan\frac{\theta}{2}$ = ②

↓

① = $\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta$

$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times \tan\frac{\theta}{2} \times \tan\frac{\theta}{2}\tan\theta$

$\approx \frac{1}{2} \times \frac{\theta}{2} \times \left(\frac{\theta}{2} \times \theta\right) = \frac{1}{8}\theta^3 \rightsquigarrow \boxed{65}$ 답