수학 4 Grade
'23 Since Alize

1등급 두뇌 장착,
스스로의 힘으로!

김주헌 (단국대학교 의예과)

수학에서 '건물의 기반이 되는 격'인 개념 학습의 중요성은 제가 굳이 강조하지 않아도 잘 아시리라 생각됩니다. 〈맑은개념〉은 이러한 개념학습을 이끄는 최고의 독학서입니다.

전대원 (미적분 백분위 100)

저는 일격필살팀의 인투더 중학도형/ 인투더 수학1&2/ 인투더 미적분/ 트윈기출(2022수능대비) 수1, 수2, 미적분/ 일격필살 N제 시즌1 수1&수2, 미적/ 일격필살 N제 시즌2 수1&수2&미적/ 일격필살 파이널 모의고사를 모두 풀었습니다. 일격필살팀의 콘텐츠들을 읽고 풀어 나가며 어떤 새로운 문제가 나오더라도 풀어낼 수 있는 힘을 기를 수 있었던 것 같습니다.

윤찬민 (대구한의대학교 한의예과 재학, 문과 → 이과 첫 해 기하 96점)

〈맑은개념〉은 개념에 친숙해지는 데에 있어서 큰 도움이 되는 교재입니다. 〈맑은개념〉은 개념공부를 속도 있게 할 수 있도록 돕습니다. 경제적인 설명이 되어 있으며, 깊은 이해가 필요한 부분에 추가설명과 증명을 수록하여 이를 활용하면 개념공부를 빠르지만 놓치는 부분 없이 할 수 있습니다.

윤준서 (나형 5등급 / 가형 6등급 → 미적 2등급 성적향상)

〈맑은개념〉은 책 제목에 걸맞게 불필요한 내용을 다루지 않습니다.
논리적인 책의 구성을 따라가면 자연스럽게 수학을 어떻게 공부해야 할지 감을 잡을 수 있으며 가독성도 매우 훌륭하기에 회독도 쉽습니다.
성적이 낮았을 때부터 〈맑은개념〉에서 제시하는 방향대로 공부했고 끈질기게 공부한 결과 유의미하게 성적을 올릴 수 있었습니다.
책을 회독할수록 수학 실력 향상에 초점을 맞춘 책의 구성이 공감되었고 문장 하나하나 저자의 정성과 고민의 깊이를 엿볼 수 있었습니다.

본 교재의 정오표 및 첨부 파일은 atom.ac의 본 교재 페이지에서 다운로드 하실 수 있습니다.

값 26,600원
54410
9 791167 026514
ISBN 979-11-6702-651-4
ISBN 979-11-6702-649-1 (시리즈)

수학 I · 수학 II

맑은 개념

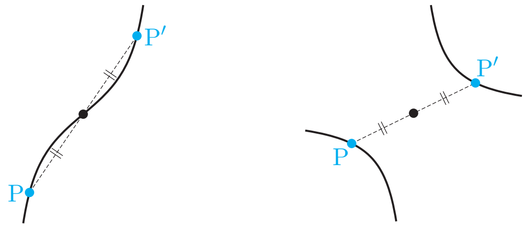
INTO THE MATH

Collector's Edition

송지은 편저

smart is sexy
Orbi.kr

orbibooks



그림과 같이 점 $(p,\ q)$에 대칭인 함수를 '중심이 $(p,\ q)$인 점대칭함수' 또는 점대칭함수라 부르기로 합시다. 점대칭함수의 그래프인 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에 대하여, 점 P의 대칭점 P'은 곡선 $y = f(x)$ 위의 점입니다. 이때 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 실수 x가 다음을 만족시킵니다.

$$f(x) + f(2p - x) = 2q$$

이 식의 x에 $x = p + t$를 대입하여[77] 다음과 같은 표현을 사용할 수도 있습니다.

$$f(p + t) + f(p - t) = 2q$$

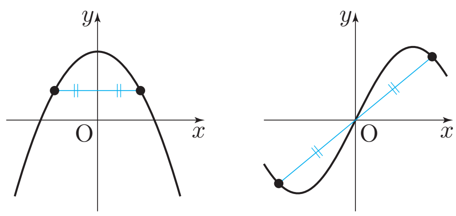
77) $f(x)$의 정의역이 실수 전체라면 $x = p + t$를 자유롭게 대입할 수 있겠지만, $f(x)$의 정의역이 제한되어 있다면 t의 범위에 주의해야 합니다.

대칭성

함수 $f(x)$의 그래프 G를 대칭이동한 도형 G'이 G와 일치하는 성질을 대칭성이라 부르기로 합시다. 어떤 함수가 대칭성이 있으면 선대칭함수 또는 점대칭함수이고, 대칭성이 없으면 선대칭함수도 아니고 점대칭함수도 아닙니다. 마치 실수에서 부호가 있으면 음수이거나 양수이고, 부호가 없으면 0인 것과 같습니다. 한편 선대칭함수이면서 동시에 점대칭함수인 함수는 상수함수뿐입니다.[78]

78) 이는 본문에서 말하는 선대칭함수가 대칭축이 $x = a$인 경우로 한정되었기 때문입니다. 선대칭의 대칭축이 $x = a$가 아닌 경우를 생각한다면 더 많은 함수들이 선대칭성과 점대칭성을 동시에 갖습니다. 예를 들어 일차함수와 〈수학〉에서 배우는 유리함수의 그래프는 점대칭성과 선대칭성을 동시에 갖습니다.

특별한 대칭성 : 홀짝성



대칭성을 띠는 상황 중에서 가장 간결한 상황은 'y축에 대한 대칭'과 '원점에 대한 대칭'입니다. 이러한 대칭성을 홀짝성이라 부르기로 하고, 중심이 원점인 점대칭함수를 홀함수라 부르기로 하고, 대칭축이 y축인 선대칭함수를 짝함수라 부르기로 합시다.[79]

홀함수는 정의역 내의 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키고, 짝함수는 정의역 내의 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$를 만족시킵니다. 대표적인 홀함수로는 홀수차항으로만 이루어진 다항함수, $\sin x$, $\tan x$가 있고, 대표적인 짝함수로는 짝수차항으로만 이루어진 다항함수, $\cos x$가 있습니다.

어떤 함수가 홀짝성이 있으면 홀함수 또는 짝함수이고, 홀짝성이 없으면 홀함수도 아니고 짝함수도 아닙니다. 마치 실수에서 부호가 있으면 음수이거나 양수이고, 부호가 없으면 0인 것과 같습니다. 한편 홀함수이면서 동시에 짝함수인 함수는 $y = 0$뿐입니다.

79) 홀함수와 짝함수라는 용어를 쓰는 것은 용어에 담긴 의미를 생생하게 나타내기 위한 것입니다. 주로 쓰이는 용어인 기함수의 기(奇)는 홀을 의미하고, 우함수의 우(偶)는 짝을 의미합니다. 영어로도 마찬가지인데, odd function과 even function에서 odd와 even이 각각 홀, 짝을 의미합니다.

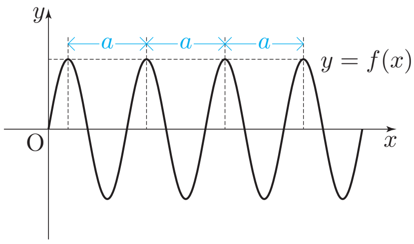
03 주기성

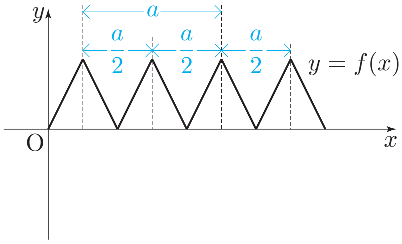
주기함수

함수 $f(x)$가 0이 아닌 상수 a와 정의역 내의 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x+a)=f(x)$$

를 만족시킬 때, '함수 $f(x)$는 **주기함수**'라 합니다.





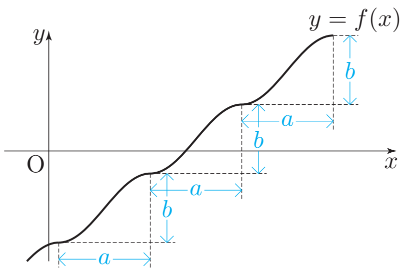
$f(x+a)=f(x)$를 만족하는 주기함수의 그래프는 $y=f(x)$를 x축 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프가 $y=f(x)$와 일치하므로, a마다 동일한 모양이 반복됩니다.

준주기함수

함수 $f(x)$가 상수 a와 정의역 내의 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x-a)+b=f(x)$$

를 만족시킬 때, '함수 $f(x)$는 준주기함수'라 부르기로 합시다.[80]



$f(x-a)=f(x)-b$를 만족하는 준주기함수의 그래프 $y=f(x)$를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동하면 $y=f(x)$와 일치하므로, a마다 동일한 모양이 반복됩니다.

80) '주기함수의 정의'와 일관된 표현을 위해서는 좌변을 $f(x+a)-b$로 적는 것이 좋지만, 평행이동을 고려하면 본문의 표현이 더 자연스럽습니다.

‘취하다’라는 용어의 정의와 확장

교육과정에서 ‘취하다’라는 말을 정의하지는 않았습니다. 하지만 여러분은 ‘등식 $a=b$에 대하여 $\log$을 취하면 $\log a=\log b$이다’와 같은 표현을 많이 접했을 것입니다. 이를 좀 더 형식을 갖추어 표현하면 다음과 같습니다.

함수 $f(x)=\log x$의 정의역의 원소 a, b에 대하여 $a=b$이면 $f(a)=f(b)$이다.

이러한 방식으로 등식에서 ‘양변에 무엇을 취한다’는 것의 의미를 정하기로 합시다. 즉 등식 $a=b$에 대하여 다음과 같이 생각할 수 있습니다.

양변에 절댓값을 취하면 $\quad |a|=|b|$

양변에 근호를 취하면 $\quad \sqrt{a}=\sqrt{b}$

양변에 로그를 취하면 $\quad \log a=\log b$

이제 ‘취하다’의 의미를 확장하여 함수의 합성에도 적용해봅시다. $y=f(x)$에 절댓값, 근호, 로그를 취하면 각각 다음과 같습니다.

양변에 절댓값을 취하면 $\quad |y|=|f(x)|$

양변에 근호를 취하면 $\quad \sqrt{y}=\sqrt{f(x)}$

양변에 로그를 취하면 $\quad \log y=\log\{f(x)\}$

절댓값, 근호, 로그를 각각 절댓값함수 $|\ |$, 무리함수 $\sqrt{\ }$, 로그함수 $\log$라 생각하면, 다음과 같이 생각할 수 있습니다.

$$|f(x)| \Leftrightarrow f\text{에 절댓값을 취한 함수} \Leftrightarrow (|\ |)\circ f$$

$$\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow f\text{에 근호를 취한 함수} \Leftrightarrow (\sqrt{\ })\circ f$$

$$\log f(x) \Leftrightarrow f\text{에 로그를 취한 함수} \Leftrightarrow (\log\ )\circ f$$

따라서 같은 문장 구조를 함수 $g(f(x))$를 설명할 때 쓴다면, $y=f(x)$의 양변에 g를 취하면 $g(y)=g(f(x))$이므로 $g(f(x))$를 ‘f에 g를 취한 함수’라 부르는 것은 매우 자연스럽습니다. 거꾸로, $f(g(x))$는 ‘g에 f를 취한 함수’라 부르면 될 것입니다.

속함수와 겉함수

$f(g(x))$에서 안쪽에(속에) 위치한 g를 속함수라 부르기로 하고, 바깥쪽에(겉에) 위치한 f를 겉함수라 부르기로 합시다. 지금까지 정의한 용어로 합성함수를 설명하면 ‘속함수에 겉함수를 취한 함수’라 할 수 있겠습니다.

함수의 합성과 역함수

역함수와 연관지어 원함수 $f: X\to Y$와 역함수 $f^{-1}: Y\to X$를 생각해봅시다. f에 f^{-1}를 취하면 항등함수 $I_{X\to X}$이고, f^{-1}에 f를 취해도 항등함수 $I_{Y\to Y}$입니다.[89] 즉 함수 연산에서 역함수와 원함수가 서로 합성되어 있으면 연산이 취소됩니다. 마치 $\times 3$을 했다가 $\div 3$을 하면 $\times 1$이 되어 곱하기 연산이 취소되는 것과 같은 원리입니다.

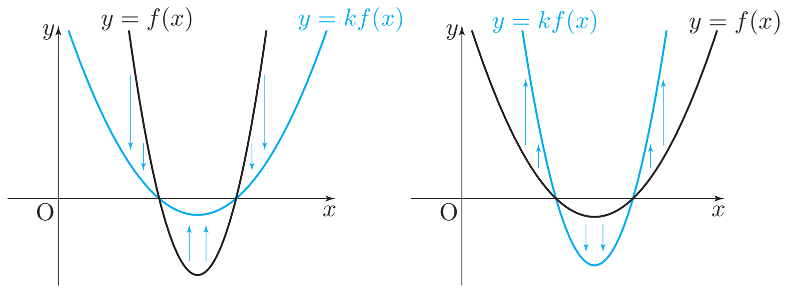
89) 둘 모두 항등함수이기는 하지만, 정의역과 치역이 달라집니다. 합성되는 순서에 따라
① 속함수의 정의역
② 속함수의 치역의 부분집합인 겉함수의 정의역 (단, 현재 f와 f^{-1}는 역함수 관계이므로 두 집합이 일치함)
③ 겉함수의 치역
을 화살표 순서대로 따라가며 분석해보면, 전자는 $X\to Y\to X$, 후자는 $Y\to X\to Y$가 됩니다. 그래서 전자는 항등함수 $I_{X\to X}$, 후자는 항등함수 $I_{Y\to Y}$인 것입니다.

03 그래프의 변형(신축)

$f(x)$에 kx를 취하거나, kx에 $f(x)$를 취하면 함수 $y = f(x)$ 그래프의 모양이 쪼그라들거나 늘어나면서 변형됩니다. 이는 마치 고무줄과 같이 신축성이 있는 물체를 한 방향으로[94] 쪼그리거나 늘였을 때 나타나는 모습과 유사합니다. 이를 그래프의 **신축**이라고 부르기로 합시다.[95]

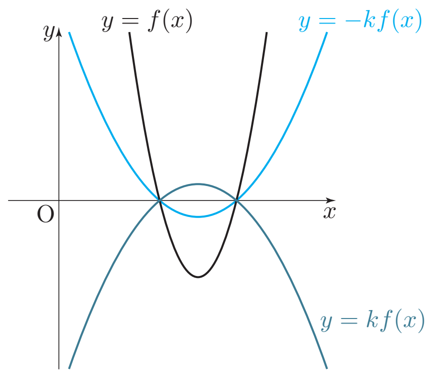
상하로(위쪽과 아래쪽으로) 신축

상수 k에 대하여 $f(x)$에 kx를 취한 함수 $y = kf(x)$의 그래프를 생각해봅시다. 이는 신축 전과 비교하였을 때, 같은 x를 대입했을 때 얻을 수 있는 y의 값이 $f(x)$에서 $\times k$한 $kf(x)$가 된 것입니다.[96] 따라서 y값이 0인 경우를 제외하고는 x축으로부터 멀어지거나 가까워지게 되므로, 그래프가 상하로 신축됩니다.



(a) $0 < k < 1$인 경우 (b) $k > 1$인 경우

상하로 신축하더라도 x절편은 그대로 유지됩니다. $0 < k < 1$일 때에는 그래프가 x축을 향하여 위아래로 쪼그라들고, $k > 1$일 때에는 그래프가 x축에서 멀어지며 위아래로 늘어납니다.



k가 음수인 경우, $y = -kf(x)$의 그래프를 먼저 생각한 후, x축에 대하여 대칭이동한 것이라 볼 수 있습니다.

상하로 신축하면 최댓값과 극값이 바뀐다.

위 그림에서 알 수 있듯, 그래프가 상하로 신축하면 0이 아닌 최댓값과 극값이 바뀝니다. 따라서 그래프가 상하로 신축될 때 최댓값과 극값의 변화에 따른 상황이 출제될 수 있습니다.

94) 세로는 가만히 둔 채 가로로만 쪼그리거나, 가로는 가만히 둔 채 세로로만 쪼그리거나 늘리는 상황을 말합니다.

95) 신축성에서의 신축(伸縮)입니다. 네이버 국어사전에서는 표제어 신축[1]으로 '늘고 줆. 또는 늘이고 줄임.'을 제시하고 있습니다. 따라서 이때 우리가 그래프를 쪼그리거나 늘이는 행위는 '그래프를 신축하다', 늘여지거나 쪼그려진 그래프는 '신축된 그래프'라 부를 수 있습니다. '신축'이라는 표현을 최초로 제안한 kzunny 님의 글은 아래의 QR 코드를 통해 확인하실 수 있습니다.

96) $f(3) = 2$이고 $k = 5$인 상황을 생각해봅시다. $f(x)$에서는 $x = 3$을 대입하여 2를 얻지만, $5f(x)$에서는 $x = 3$을 대입하여 10를 얻습니다. 동일하게 $x = 3$을 대입하였을 때 얻는 함숫값이 2에서 $\times 5$된 10으로 바뀐 것입니다.

연속함수의 재해석

$x=a$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 연속의 정의에 의하여 다음이 성립합니다.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

이때 $a=\lim_{x\to a} x$이므로 우변의 a 대신 $\lim_{x\to a} x$를 대입하면 다음을 얻습니다.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$$

이를 통해 연속함수 f는 f와 $\lim$의 순서를 바꾸어도 값을 유지하는 함수라고 이해할 수 있습니다.

합성된 연속함수의 해석

'치환'과 '연속함수의 재해석'을 이용하여 합성된 연속함수의 극한을 해석해봅시다. $x=\bigstar$에서 연속인 함수 $g(x)$와 $x=g(\bigstar)$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립합니다.

$$\lim_{x\to\bigstar} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to\bigstar} g(x)\right) = f\left(g\left(\lim_{x\to\bigstar} x\right)\right) = f(g(\bigstar))$$

즉 '연속함수의 재해석'에 따르면 연속함수와 $\lim$의 순서를 바꿀 수 있으므로, 연속함수가 겹겹이 취해져 있어도 관계없이, 함수와 $\lim$의 순서를 연달아 바꾸어 계산할 수 있는 것입니다. 이는 치환을 이용하여 다음과 같이 쉽게 증명할 수 있습니다.

증명

$g(\bigstar)=\blacklozenge$라 하면 함수 $f(x)$는 $x=\blacklozenge$에서 연속이므로 $\lim_{x\to\blacklozenge} f(x)=f(\blacklozenge)$이다.

한편 $g(x)=t$라 치환하면 $x\to\bigstar$일 때 $t\to\blacklozenge$이므로 주어진 극한을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\bigstar} f(g(x)) &= \lim_{t\to\blacklozenge} f(t) = f(\blacklozenge)\\ &= f(g(\bigstar))\end{aligned}$$

■

$\lim_{x\to\bigstar} f(x)=\lim_{t\to\bigstar} f(t)$는 치환이 아니라 변수 교체

$\lim_{x\to\bigstar} f(x)=\lim_{t\to\bigstar} f(t)$와 같은 식에서 변수가 t에서 x로 바뀌다보니, 이 식이 의미하는 것이 지금까지 논한 치환과 같은 것이라고 착각할 수 있습니다. 그러나 이것은 치환이 아니라 단순한 변수 교체이므로 주의합시다.

이렇게 변수를 바꾸어도 상관없는 이유는 주어진 극한의 주인공이 't와 x'가 아니라, 'f와 ★'이기 때문입니다. 극한에서 논하고 싶은 함수는 f이고, 수렴 여부를 따지고 싶은 위치는 ★입니다. f와 ★의 연결고리 역할을 하는 것이 x와 t일 뿐이며, x와 t 자체가 식에서 중요한 것이 아닙니다.

예를 들어 다음의 식 변형 과정을 생각해봅시다.

$$\lim_{x\to 0+}\left(x+x^2\right)=0\cdots①$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)=0\cdots②$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0\cdots③$$

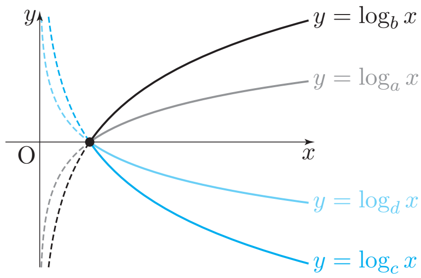
이때 ②에서 ③으로 넘어가는 과정에서 많은 학생들이 다음과 같이 질문하곤 합니다.

'①에서 ②로 넘어갈 때 $x=\frac{1}{t}$로 치환했는데, 왜 ②에서 ③으로 넘어갈 때 t를 x랑 같다고 두는 건가요? $x=\frac{1}{t}$였으니까 t 자리에 $\frac{1}{x}$을 넣어야 하는 것 아닌가요?'

그러나 앞서 설명했듯이 ①에서 ②로 넘어가는 것은 치환이고, ②에서 ③으로 넘어가는 것은 치환이 아닙니다. 그저 동일한 의미의 극한 식을 설명하기 위한 변수를 t에서 x로 바꾸었을 뿐입니다. 비슷한 예로, 함수 $f(t)$의 $t=3$에서의 함숫값이나, 함수 $f(x)$의 $x=3$에서의 함숫값이나 모두 $f(3)$으로 같은 것, 정적분에서 $\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx$인 것[121] 등이 있습니다.

121) 정적분에 대해서는 Calculus에서 더 자세히 설명합니다.

$x>1$일 때 네 함수 $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$, $\log_d x$의 비교



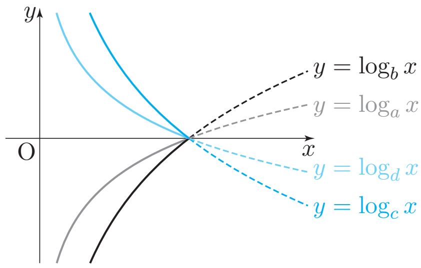
$x>1$일 때, $\log_c x<\log_d x<0<\log_a x<\log_b x$입니다. 이를 시각적으로 이해하면 다음과 같습니다.

① 로그함수의 밑이 1보다 크면 $x>1$에서 x축 위쪽 영역에 그려지고, 1보다 작으면 x축 아래쪽 영역에 그려진다.

② 로그함수에서 밑의 값이 1에 가까울수록 그래프가 $0<x<1$에서 기준선과 가까워지고, 1과 멀수록 그래프가 기준선과 멀어진다.

③ 로그함수의 밑의 값이 1과 가까울수록 그래프가 x축과 멀어지고, 1과 멀어질수록 그래프가 x축과 가까워진다.

$0<x<1$일 때 네 함수 $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$, $\log_d x$의 비교

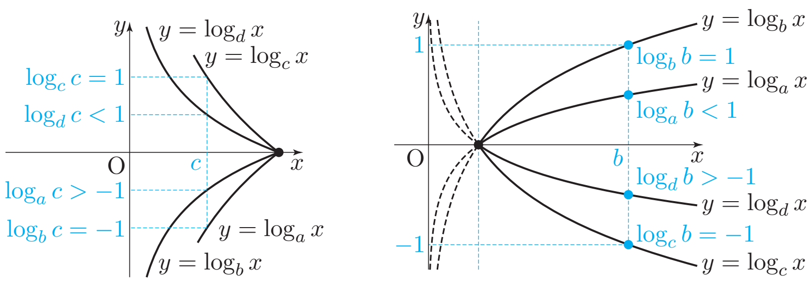


$0<x<1$일 때, $\log_b x<\log_a x<0<\log_d x<\log_c x$입니다. 이를 시각적으로 이해하면 다음과 같습니다.

① 로그함수의 밑이 1보다 크면 음의 값을 갖고, 1보다 작으면 양의 값을 가지며, 밑의 범위에 관계없이 기준선과 점근선 사이에 그려진다.

② 로그함수에서 밑의 값이 1에 가까울수록 그래프가 기준선에 가까워지고, 1과 멀어질수록 그래프가 기준선과 멀어진다.

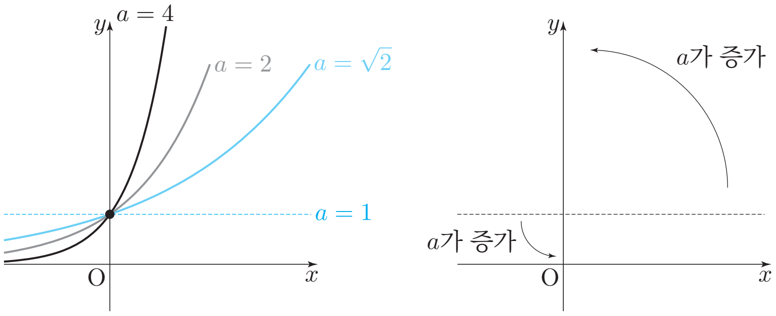
③ 로그함수의 밑의 값이 1과 가까울수록 그래프가 y축과 먼 모습으로 그려지고, 1과 멀어질수록 그래프가 y축과 가까워진다.



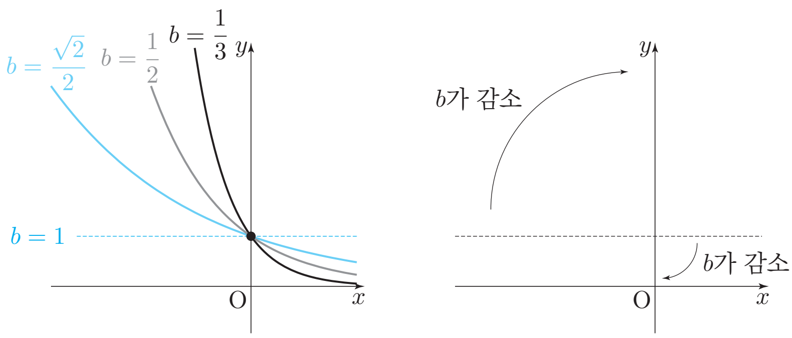
(a) (b)

$x=c$나 $x=b$를 그려 위에서 설명한 그래프의 위치관계를 쉽게 이해할 수 있습니다.

밑의 변화에 따른 지수함수와 로그함수의 변화 : 언제 축에 더 가까워지는가

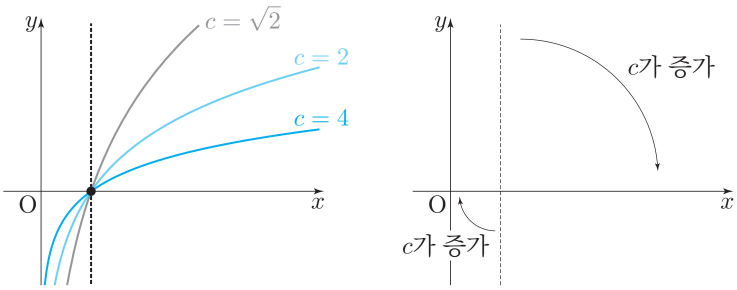


그림과 같이 $y=a^x$에서 $a>1$인 a의 값이 커짐에 따라 y축과 x축에 가까워짐을 알 수 있습니다. 즉 두 축에 더 가까운 그래프의 밑이 더 큽니다.

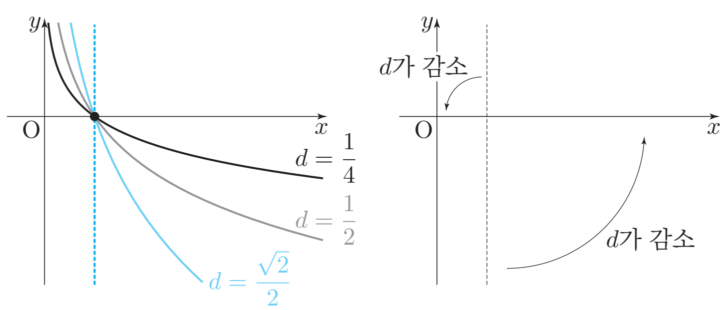


그림과 같이 $y=b^x$에서 $0<b<1$인 b의 값이 작아짐에 따라 y축과 x축에 가까워짐을 알 수 있습니다. 즉 두 축에 더 가까운 그래프의 밑이 더 작습니다.[145)]

145) 이때 $b^{-x}=\left(\frac{1}{b}\right)^x$임을 생각하면, 1보다 큰 양수인 $\frac{1}{b}$이 커질수록 축에 가까워진다고 생각할 수도 있습니다.



그림과 같이 $y=\log_c x$에서 $c>1$인 c의 값이 커짐에 따라 x축과 y축에 가까워짐을 알 수 있습니다. 즉 두 축에 더 가까운 그래프의 밑이 더 큽니다.



그림과 같이 $y=\log_d x$에서 $0<d<1$인 d의 값이 작아짐에 따라 x축과 y축에 가까워짐을 알 수 있습니다. 즉 두 축에 더 가까운 그래프의 밑이 더 작습니다.[146)]

146) 이때 $\log_d x=-\log_{\frac{1}{d}} x$임을 생각하면, 1보다 큰 양수인 $\frac{1}{d}$이 커질수록 축에 가까워진다고 생각할 수도 있습니다.

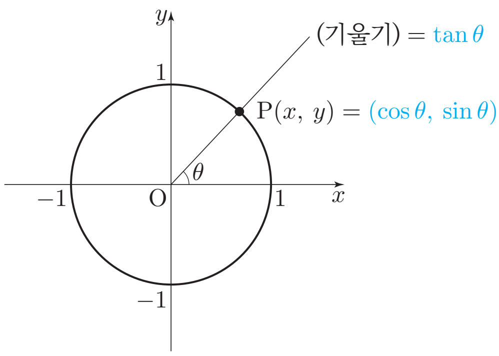
01 삼각함수 다시 살펴보기

삼각함수의 정의

중심이 원점 O이고 반지름이 r인 원 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 세 삼각함수 사인, 코사인, 탄젠트의 정의가 다음과 같음을 숙지한 상태에서 논의를 시작합시다.

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

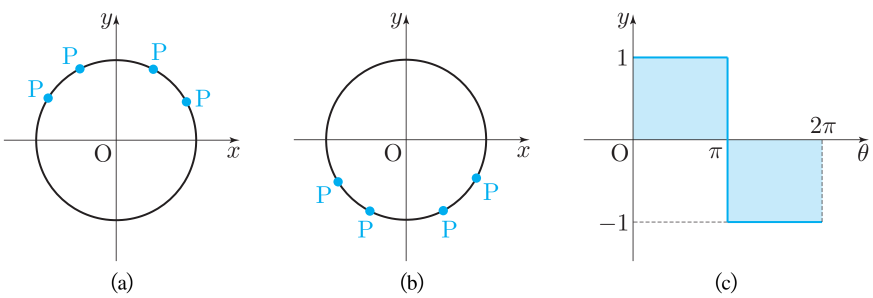
이때 반지름 r이 1인 경우를 생각하면 $\sin\theta = \frac{y}{1} = y$, $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$가 되어 x와 y만을 이용하여 사인, 코사인, 탄젠트를 설명할 수 있게 됩니다. 이와 같이 삼각함수에서 단위원을 활용하는 것은 계산과 사고의 편리성 측면에서 자연스럽습니다.



단위원 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$이므로, 사인은 P의 y좌표이고 코사인은 점 P의 x좌표임을 알 수 있습니다. 이때 $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$이므로 $-1 \le \cos x \le 1$, $-1 \le \sin x \le 1$입니다. 그리고 $\tan\theta$는 직선 OP의 기울기의 정의와 동일합니다. 이를 바탕으로 사인, 코사인, 탄젠트를 다시 살펴봅시다.

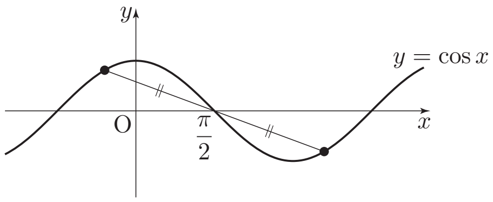
사인함수와 코사인함수 다시 살펴보기

사인함수 : 점 P의 y좌표 관찰



(a)와 같이 $0 < \theta < \pi$일 때에는 P의 y좌표가 양수이고, (b)와 같이 $\pi < \theta < 2\pi$일 때에는 P의 y좌표가 음수입니다. 또한 앞서 $-1 \le y \le 1$이었음을 고려하면, $\sin\theta$의 그래프는 (c)에서 색칠된 영역에 그려집니다.

합성으로 해석하는 삼각함수의 각변환



삼각함수의 각변환은 $\sin(k \pm \theta)$이나 $\cos(k \pm \theta)$ 꼴이 주어졌을 때 이를 간단한 $\pm\sin$ 또는 $\pm\cos$ 꼴로 나타내는 것입니다. 각변환하기 이전의 꼴은 합성함수이므로, 합성함수 단원에서 다루는 것입니다. 전통적인 방법과 새로운 관점을 배워봅시다.

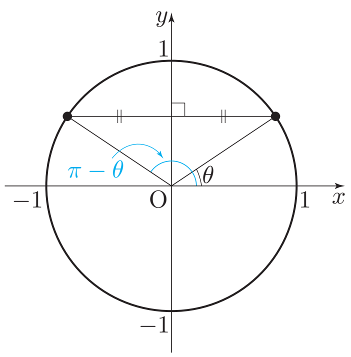
전통적인 방법

$f(\theta) = \cos(3\pi - \theta)$을 여러 가지 방법으로 각변환해봅시다.

주기성과 대칭성을 이용하기

삼각함수의 주기성과 대칭성을 이용하여 군더더기로 붙은 k나 $\pm$를 떼어낼 수 있습니다. 먼저 주기성을 이용하면 $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$이므로 $\cos(3\pi - \theta) = \cos(\pi - \theta)$입니다. 이때 대칭성을 이용하면 $y = \cos\theta$는 중심이 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$인 점대칭함수이므로 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$입니다.

단위원을 이용하기



사인은 단위원에서 y좌표, 코사인은 단위원에서 x좌표를 나타냅니다. $\cos(3\pi - \theta) = \cos(\pi - \theta)$에서 θ가 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때를 생각하면, 동경이 $\pi - \theta$일 때의 x좌표는 동경이 θ일 때 x좌표와 부호만 다르므로 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$입니다.

174) (1), (2), (3), (4)는 매우 자주 쓰이므로 암기하도록 합시다.

예제 1. 다음 삼각함수를 간단히 나타내시오.[174]

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

(4) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

(5) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)$

(6) $\sin\left(\frac{7}{2}\pi-x\right)$

새로운 각변환

그런데 이런 복잡한 과정 없이도 간단히 각변환할 수 있는 방법이 있습니다.

① 주어진 함수를 $f(\theta)$라 둔다.

② $f(0)$을 구한다.

(1) $f(0)=+1$이면 $f(\theta)=+\cos\theta$이다.

(2) $f(0)=-1$이면 $f(\theta)=-\cos\theta$이다.

(3) $f(0)=0$이면 ③을 진행한다.

③ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$를 구한다.

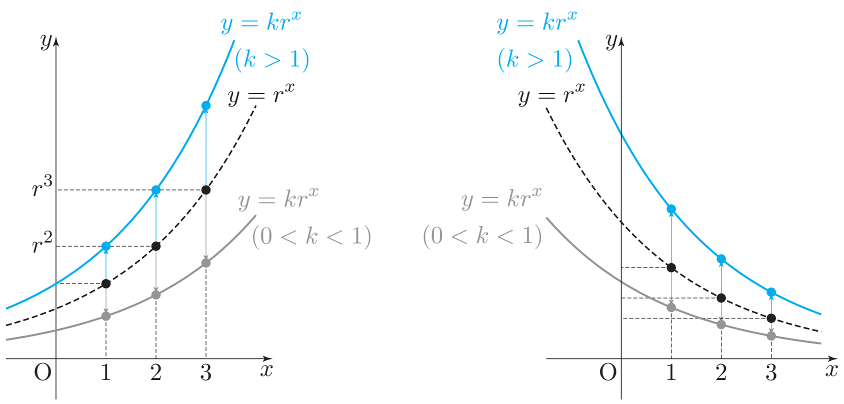
(1) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=+1$이면 $f(\theta)=+\sin\theta$이다.

(2) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$이면 $f(\theta)=-\sin\theta$이다.

이렇게 해석할 수 있는 이유는 $\sin$과 $\cos$의 그래프의 특징 때문입니다. 두 그래프는 서로 x축 방향으로 적당히 평행이동하거나, x축 또는 y축에 대하여 대칭이동하였을 때 모양을 겹치게 할 수 있습니다. 그런데 각변환 이전의 함수식은 속함수가 '기울기가 ±1인 일차함수'인 상황이므로, 그래프의 신축은 일어나지 않고, 평행이동 또는 y축에 대한 대칭이동만 일어납니다. 따라서 평행이동된 결과가 $\pm\sin x$ 또는 $\pm\cos x$ 중 하나일 수밖에 없는 것입니다.

다시 $f(\theta)=\cos(3\pi-\theta)$을 생각해봅시다. $f(0)=-1$이므로 새로운 관점에 의해 $f(\theta)=-\cos\theta$입니다.

등비수열 2-2 : $y=kr^x$ 의 꼴로 표현할 수 있다.



등비수열의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$ 이므로 $\frac{a}{r} = k$ 라 하면 $a_n = kr^n$ 입니다.[154] 이때 그래프의 신축에 의해 k 의 값에 따라 $k > 1$ 이면 분홍색으로, $0 < k < 1$ 이면 회색으로 변형됩니다.

154) 전제에서 모든 항이 양수인 수열이었으므로, $k>0$ 입니다.

등비수열 2-3 : $y=r^{x+p}$ 꼴로 표현할 수 있다.

$a_n = kr^n$ 에서 로그의 정의에 의해 $k = r^{\log_r k}$ 이므로 $\log_r k = p$ 이라 하면 $kr^x = r^{x+p}$ 입니다. 이는 지수함수의 그래프를 x 축 방향으로 $-p$ 만큼 평행이동한 함수라 해석할 수도 있고, 일차함수 $x+p$ 에 지수함수 r^x 를 취한 것이라 생각할 수도 있습니다.

등비수열 2-4 : 모든 항이 양수인 등비수열에 로그를 취하면 등차수열이 된다.

kr^x 나 r^{x+p} 에 밑이 r 인 로그를 취하면 각각 $x+\log_r k$ 와 $x+p$ 입니다. 따라서 일차함수가 나오므로 등비수열에 로그를 취하면 등차수열이 나옴을 알 수 있습니다. 밑이 r 이 아닌 다른 로그를 취해도 등차수열이 됩니다.

모든 항이 양수인 등비수열에 로그를 취하면 등차수열이 되는 근본적 이유

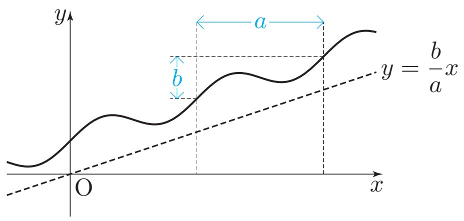
앞서 말했듯 등비수열은 일차함수 $x+p$ 에 지수함수 r^x 를 취한 것이라 생각할 수도 있습니다. 일차함수를 f, 지수함수를 g 라 하면 모든 등비수열은 $g(f(n))$ 의 꼴로 표현됩니다. 이때 g 의 역함수를 h 라 하면 h 는 밑이 r 인 로그함수이고, 여기에 h 를 취하면 $h(g(f(n))) = f(n)$ 이고, 앞서 배웠듯 $f(n)$ 은 일차함수이므로 등차수열입니다. 밑이 r 인 로그함수가 아닌 다른 로그를 취하면 등차수열이 되는 이유도 동일한 방법으로 설명할 수 있습니다.

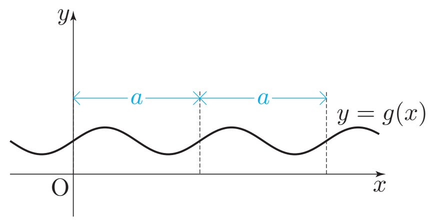
준주기함수와 빼기함수를 이용하여 주기함수 만들기

준주기함수보다는 주기함수가 다루기 쉽습니다. 준주기함수 f가 주어졌을 때 빼기함수를 이용하여 주기함수 g를 만들어봅시다.

$f(x+a)=f(x)+b$가 성립할 때, $g(x)=f(x)-\dfrac{b}{a}x$라 하면 다음이 성립하므로 $g(x)$는 주기함수입니다.

$$g(x+a)=f(x+a)-\frac{b}{a}(x+a)=f(x)+b-\frac{b}{a}x-b=g(x)$$



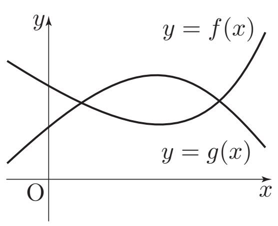


이는 그림을 통해 직관적으로도 이해할 수 있습니다. 그림과 같이 준주기함수 f는 x가 a만큼 커질때마다 y가 b만큼 커지는 성질을 갖고 있습니다. 이러한 성질을 제거하기 위해서 x가 a만큼 커질때마다 y가 b만큼 커지는 성질을 갖고 있는 함수인 일차함수 $y=\dfrac{b}{a}x$를 빼어 상쇄하는 것입니다.

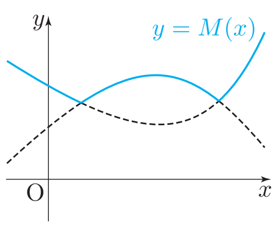
대소비교함수

$f(x)$와 $g(x)$ 중에서 작지 않은 값을 $M(x)$, 크지 않은 값을 $m(x)$라 하면, M과 m은 f와 g의 함숫값을 대소비교하여 적당한 값을 취하는 함수입니다. 이를 대소비교함수라 부르기로 합시다.

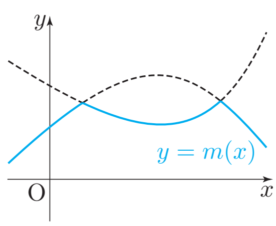
대소비교 함수의 그래프



(a)



(b)

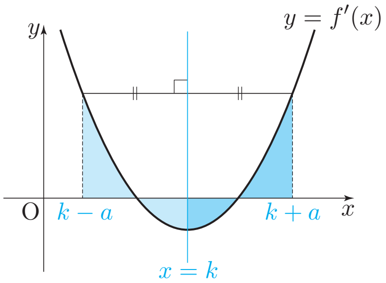


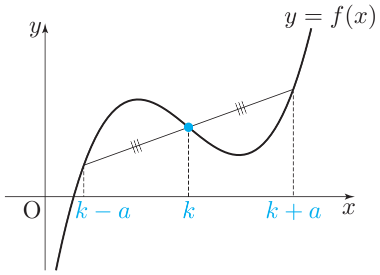
(c)

$y=f(x)$와 $y=g(x)$가 (a)와 같을 때, $y=M(x)$는 (b)와 같고, $y=m(x)$는 (c)와 같습니다.

함수의 성질과 미적분의 관계 다시보기

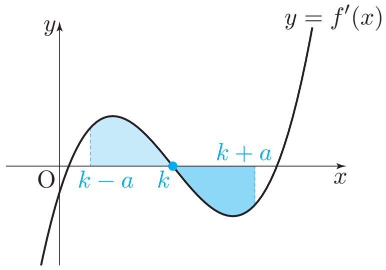
도함수가 선대칭함수일 때

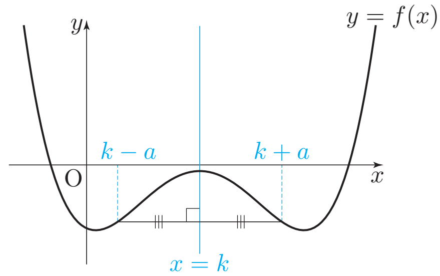




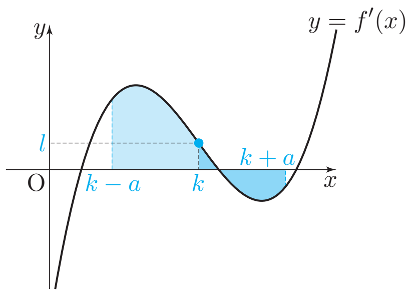
도함수 $f'(x)$가 대칭축이 $x=k$인 선대칭함수일 때, $\int_{k}^{k-a} f'(x)\,dx$와 $\int_{k}^{k+a} f'(x)\,dx$가 항상 부호는 다르고 절댓값은 같습니다. 이는 $x = k$를 기준으로 왼쪽에서 어느 양만큼 함숫값이 증가(감소)하면 오른쪽에서 동일한 양만큼 함숫값이 감소(증가)함을 의미합니다. 이것이 선대칭함수를 부정적분해 얻은 원시함수가 점대칭함수인 이유입니다.

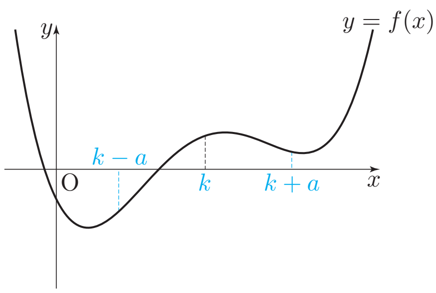
도함수가 점대칭함수일 때





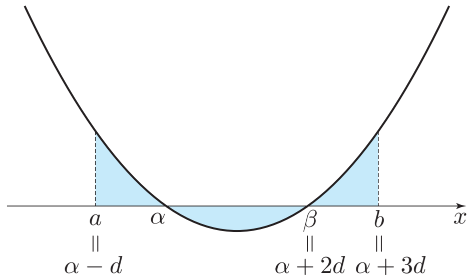
도함수 $f'(x)$가 중심이 $(k,\ l)$인 점대칭함수일 때, $l=0$이면, 즉 중심이 x축 위에 있으면 도함수의 값이 부호만 달리하며 대칭적으로 나타나므로 $\int_{k}^{k-a} f'(x)\,dx$와 $\int_{k}^{k+a} f'(x)\,dx$가 항상 같습니다. 이는 $x=k$를 기준으로 왼쪽에서 어느 양만큼 함숫값이 증가(감소)하면 오른쪽에서 동일한 양만큼 함숫값이 증가(감소)함을 의미합니다.





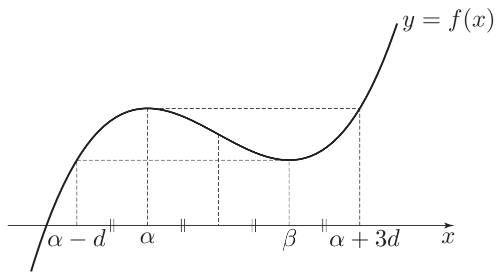
그러나 $l \neq 0$이면, 즉 중심이 x축 위에 있지 않으면 그렇지 않으므로, $f(x)$ 증감의 양상에서 대칭성을 잃게 됩니다. 이것이 바로 점대칭함수를 부정적분해서 얻은 원시함수가 오직 도함수의 중심이 x축 위에 있을 때에만 선대칭함수인 이유입니다.

삼차함수 (1) : 삼차함수에서 극점과 변곡점으로 등차수열 찾기



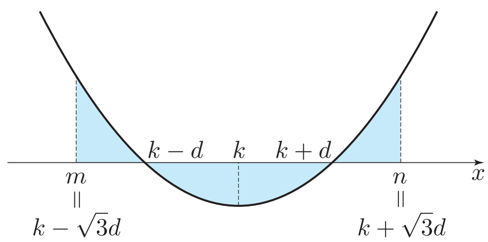
두 실근 α, β $(\alpha < \beta)$를 갖는 임의의 이차함수에 대하여 α, '대칭축의 x좌표', β가 이 순서대로 등차수열을 이룬다는 점에 착안하여 $\beta = \alpha + 2d$라 두면 대칭축의 x좌표는 $\alpha + d$입니다. 이때 그림과 같이 $x = a$, $x = b$를 생각하여 넓이가 같은 세 영역을 생각할 수 있을 것입니다. 정적분을 이용하여 구하면 (계산 생략)[177] $a = \alpha - d$, $b = \alpha + 3d$입니다.

177) 이차함수 식을 세우고 바로 계산 또는 치환적분으로 계산합니다.



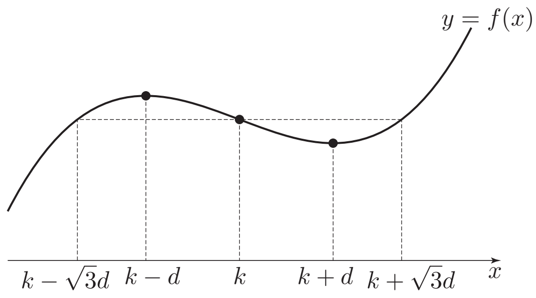
이를 도함수의 정적분으로 이해하면, 이 이차함수의 원시함수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 두 극점과 변곡점을 이용해 등차수열을 만들고, 이 등차수열을 좌우로 한 칸씩 확장하여 얻은 두 점이 각각 극점과 함숫값이 같은 점임을 알 수 있습니다.

삼차함수 (2) : 변곡점과 함숫값이 같은 점 찾기



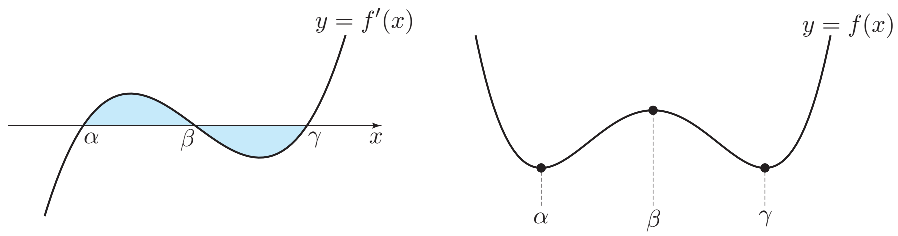
이번에는 이차함수의 대칭축을 k라 두고 두 근을 $k - d$, $k + d$로 잡고, 그림과 같이 $x = m$, $x = n$을 생각하여 넓이가 같은 네 영역을 생각해봅시다. 정적분을 이용하여 구하면 (계산 생략)[178] $m = k - \sqrt{3}d$, $n = k + \sqrt{3}d$입니다.

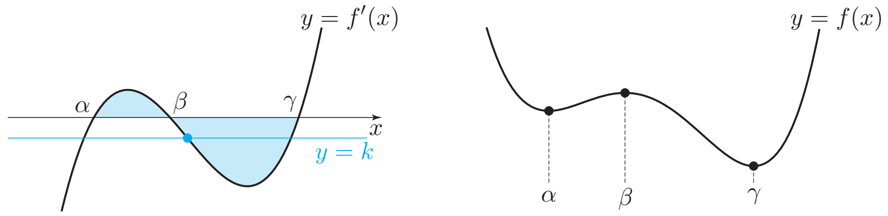
178) 이차함수 식을 세우고 바로 계산 또는 치환적분으로 계산합니다.



이를 도함수의 정적분으로 이해하면, 이 이차함수의 원시함수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 두 극점과 변곡점을 이용해 등차수열을 만들고, 이 등차수열을 좌우로 한칸씩 확장한 것보다는 약간 못 미쳤을 때 얻는 두 점이 각각 변곡점과 함숫값이 같은 점임을 알 수 있습니다. 이 1과 $\sqrt{3}$의 비율 때문에 삼차함수 문제에서 $\sqrt{3}$이 자주 등장할 수밖에 없는 것입니다.

사차함수





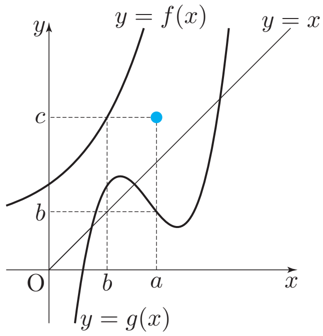
사차함수의 세 극점의 x좌표가 α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$일 때, 두 극솟값이 같으면 $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$인 이유를 알아봅시다. $f'(x)$의 세 근이 α, β, γ인데, 세 값이 등차수열을 이루지 않으면 $y = f'(x)$의 변곡점을 지나는 직선 $y = k$를 생각했을 때, 점대칭에 의해 $y = f'(x)$와 직선 $y = k$로 둘러싸인 두 영역의 넓이가 같으므로, 색칠된 두 영역의 넓이가 달라집니다. 그러면 두 극솟값이 같지 않으므로 조건에 위배됩니다. 세 값이 등차수열을 이루면 점대칭에 의해 두 영역의 넓이가 같으므로 두 극솟값이 같습니다.

02 합성함수 이야기 (2) : $h(x)=f(g(x))$의 해석

두 함수 f, g에 대하여 $g(x)$의 치역이 $f(x)$의 정의역의 부분집합이며, $f(x)$와 $g(x)$가 미분가능할 때, 함수 $h(x)=f(g(x))$를 해석해봅시다.

전통적인 방법과 그 한계

세 그래프 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=x$의 위치 관계를 알 때 $y=h(x)$를 그리는 전통적인 방법을 배워봅시다.

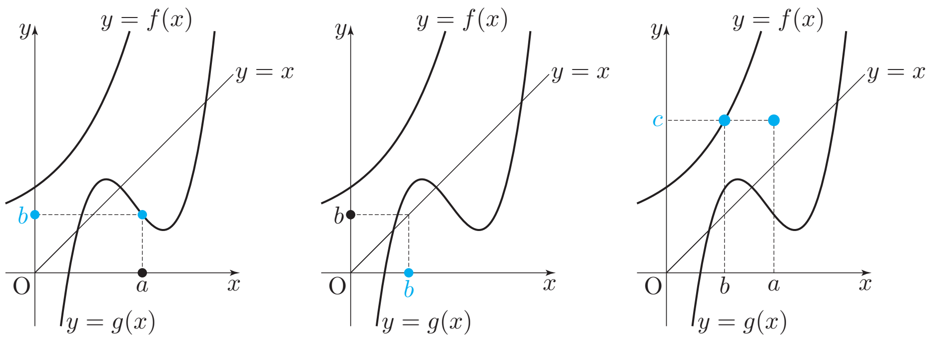


$g(a)=b$, $f(b)=c$, $h(a)=c$일 때, $y=g(x)$ 위의 한 점 $(a,\ b)$와 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(b,\ c)$를 찾으면 $y=h(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ c)$를 잡을 수 있습니다. 이를 그리기 위해 전통적으로 사용되는 방법은 다음과 같습니다.

① x축 위의 점 $(a,\ 0)$을 이용해 $(a,\ b)$를 잡고, y축 위의 점 $(0,\ b)$를 잡는다.

② y축 위의 점 $(0,\ b)$와 $y=x$를 이용해 x축 위의 점 $(b,\ 0)$을 잡는다.

③ x축 위의 점 $(b,\ 0)$을 이용해 $(b,\ c)$를 잡고, $(a,\ c)$를 잡는다.



이는 자연스러운 발상이기는 하지만, 전체의 그래프를 그리는 것이 아니라 한 점을 찾는 방법에 그칠 뿐이고, 그마저도 a와 c의 관계가 시각적으로 명확히 드러나지 않는다는 단점이 있습니다. 따라서 이 방법은 잠시 접어두고, 다른 방법을 알아봅시다.

합성함수를 분석하는 새로운 방법 : 극점만 찾아서 그리자

미분가능한 함수의 그래프는 극점의 x좌표를 찾고, 각각의 극점에 대하여 극값(극점의 y좌표)를 찾고 나면, 나머지 구간에서는 증감성이 확정되어 쉽게 그릴 수 있습니다. 그런데 우리는 합성함수의 극점을 찾는 방법을 배운 적이 없습니다. 정확히는 〈미적분〉 선택자만 배우고, 미선택자는 배우지 않습니다. 그래서 이 단원에서는 〈미적분〉을 선택하지 않고도, 합성함수의 극점을 찾아 그 그래프를 그리는 새로운 방법을 배워볼 것입니다.

정리

함수 $h(x) = f(g(x))$가 $x = a$에서 극값을 가지면 ① 또는 ②가 성립한다.

① 함수 g가 $x = a$에서 극값을 갖는다.

② 함수 f가 $x = g(a)$에서 극값을 갖는다.

역으로 ① 또는 ②가 성립하면 h가 $x = a$에서 극값을 갖는다.

이 정리를 이용하면 다음과 같은 방법으로 합성함수 $h(x) = f(g(x))$의 극점의 x좌표를 찾을 수 있습니다.

보기

① $g(x)$의 극점의 x좌표를 찾는다.

② $f(t)$의 극점의 t좌표 t를 찾고, $t = g(x)$인 x를 찾는다.

③ ①과 ②에서 찾은 x가 h의 모든 극점의 x좌표이다.

이렇게 극점의 x좌표 α_1, α_2, $\cdots$, α_n을 찾고 나면, $h(\alpha_n) = f(g(\alpha_n))$이므로 직접 대입하여 그 값을 찾거나, 전통적인 방법에서 배운 바와 같이 y좌표를 찾을 수 있을 것입니다.

앞으로는 위 정리와 방법이 어떻게 도출되었는지 그 과정을 배워봅시다. 다만, 논의의 편의를 위하여 f와 g는 정의역 일부 구간에서 '상수함수'도, <u>그 함수</u>도 아님을 전제로 합니다.[195)]

앞으로 펼쳐질 논리의 흐름은 대략적으로 다음과 같습니다. 이 흐름을 숙지한 상태에서 글을 읽어나가며 사고하시기 바랍니다.

① 특정 구간에서 f와 g의 증감성이 어떠한지를 살펴보고, 각각의 경우 h의 증감성을 확인한다.

(1) f와 g의 증감성이 같으면 h가 증가한다.

(2) f와 g의 증감성이 다르면 h가 감소한다.

(3) 그러니 h를 분석할 때에는 증가구간들과 감소구간들로 쪼개자.

② $f' = 0$ 또는 $g' = 0$인 지점이 구간에 포함된다면, 그 지점을 기준으로 구간을 쪼갠 후, 각각의 구간에서 f, g, h의 증감성을 확인한다.

③ 모든 경우를 확인해본 결과, 위의 정리와 결론을 얻는다.

195) f 또는 g가 상수함수이면 h도 해당 구간에서 상수함수이니 의미가 없습니다. 한편 <u>그 함수</u>조차 아직 단독으로도 수능에 출제되지 않은 상황이므로, 출제된 이후에 <u>그 함수를 다른 함수와 합성한 상황</u>을 공부해도 늦지 않습니다.

00 찾아보기