1등급 두뇌 장착,
스스로의 힘으로!

수학 4 Grade
'23 Since
Alize

김주헌 (단국대학교 의예과)

수학에서 '건물의 기반이 되는 격'인 개념 학습의 중요성은 제가 굳이 강조하지 않아도 잘 아시리라 생각됩니다. 〈맑은개념〉은 이러한 개념학습을 이끄는 최고의 독학서입니다.

전대원 (미적분 백분위 100)

저는 일격필살팀의 인투더 중학도형/ 인투더 수학1&2/ 인투더 미적분/ 트윈기출(2022수능대비) 수1, 수2, 미적분/ 일격필살 N제 시즌1 수1&수2, 미적/ 일격필살 N제 시즌2 수1&수2&미적/ 일격필살 파이널 모의고사를 모두 풀었습니다. 일격필살팀의 콘텐츠들을 읽고 풀어 나가며 어떤 새로운 문제가 나오더라도 풀어낼 수 있는 힘을 기를 수 있었던 것 같습니다.

윤찬민 (대구한의대학교 한의예과 재학, 문과 → 이과 첫 해 기하 96점)

〈맑은개념〉은 개념에 친숙해지는 데에 있어서 큰 도움이 되는 교재입니다. 〈맑은개념〉은 개념공부를 속도 있게 할 수 있도록 돕습니다. 경제적인 설명이 되어 있으며, 깊은 이해가 필요한 부분에 추가설명과 증명을 수록하여 이를 활용하면 개념공부를 빠르지만 놓치는 부분 없이 할 수 있습니다.

윤준서 (나형 5등급 / 가형 6등급 → 미적 2등급 성적향상)

〈맑은개념〉은 책 제목에 걸맞게 불필요한 내용을 다루지 않습니다.
논리적인 책의 구성을 따라가면 자연스럽게 수학을 어떻게 공부해야 할지 감을 잡을 수 있으며 가독성도 매우 훌륭하기에 회독도 쉽습니다.
성적이 낮았을 때부터 〈맑은개념〉에서 제시하는 방향대로 공부했고 끈질기게 공부한 결과 유의미하게 성적을 올릴 수 있었습니다.
책을 회독할수록 수학 실력 향상에 초점을 맞춘 책의 구성이 공감되었고 문장 하나하나 저자의 정성과 고민의 깊이를 엿볼 수 있었습니다.

본 교재의 정오표 및 첨부 파일은 atom.ac의 본 교재 페이지에서 다운로드 하실 수 있습니다.

값 15,800원
54410
9 791167 026538
ISBN 979-11-6702-653-8
ISBN 979-11-6702-649-1 (시리즈)

미적분

맑은 개념

INTO THE MATH

Collector's Edition

송지은 편저

smart is sexy

Orbi.kr

orbibooks

04 원리 : 지수로그삼각함수의 극한

지수로그삼각함수 극한의 대전제

지수함수, 로그함수, 삼각함수는 정의역에서 연속함수임을 증명 없이 받아들이기로 합시다. 삼각함수, 지수함수, 로그함수에 대한 세 가지 기본극한인 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$을 숙지해야 합니다.[7)]

7) 기본극한이라고 해서 모두 증명 없이 받아들이는 것은 아닙니다. 유리함수의 극한인 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$은 증명 없이 받아들이지만, 삼각함수는 도형과 대칭성으로, 지수함수와 로그함수는 수식으로 증명합니다.

기본극한의 증명

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$: 도형을 이용하여 증명

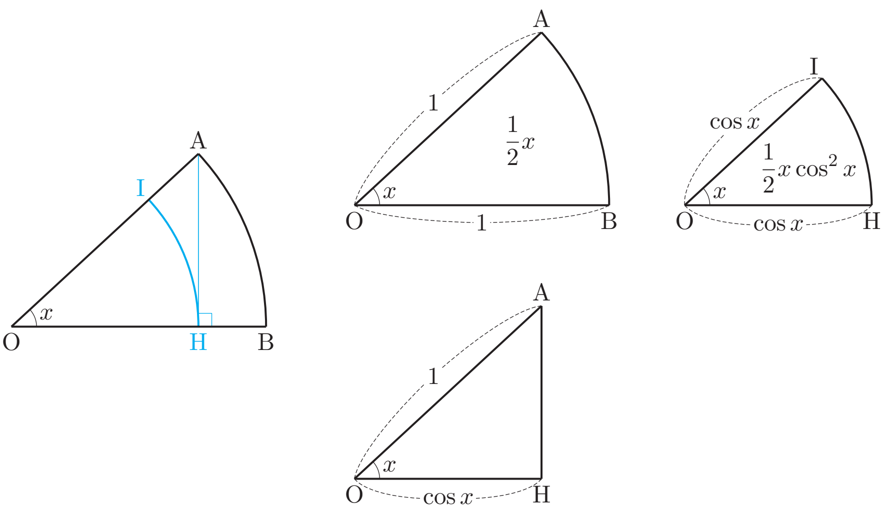
삼각함수는 도형에서 비롯된 함수이므로, 삼각함수의 기본 극한을 증명할 때 도형을 이용하는 것은 자연스럽습니다. 도형을 이용하여 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$를 증명해봅시다.

우선 $\dfrac{\sin x}{x}$가 짝함수이므로 y축에 대하여 대칭입니다. 따라서 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{\sin x}{x}$가 성립하므로,[8)] $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$만 증명하면 됩니다.

8) 수식으로는 다음과 같이 $-x=t$로 치환한 후 $x\to0-$이면 $t\to0+$임을 이용하여 보일 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{x}&=\lim_{t\to0+}\frac{\sin(-t)}{-t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{-\sin t}{-t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}\end{aligned}$$

이때 마지막 등호는 치환이 아닌, 〈맑은개념 수학 I & 수학 II〉의 Basic 2)에서 배웠던 '변수 교체'임을 주의합시다.



위 그림과 같이 반지름이 1이고 중심각이 x(라디안)인 부채꼴 AOB를 생각합시다. A에서 $\overline{\mathrm{OB}}$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 반지름이 $\overline{\mathrm{OH}}=\cos x$이고 중심각이 x인 부채꼴 IOH를 잡을 수 있습니다. 그러면 부채꼴 AOB의 넓이가 삼각형 AOH의 넓이보다 크고, 삼각형 AOH의 넓이가 부채꼴 IOH의 넓이보다 크므로 다음과 같은 부등식을 얻습니다.

$$\frac{1}{2}(\cos x)^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\cos x\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot x$$

이때 $x>0$, $\cos x\neq0$이므로 각 변에 $\dfrac{2}{x\cos x}$를 곱하면 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<\dfrac{1}{\cos x}$이고, 함수의 극한의 대소관계에 의해 $1\le\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sin x}{x}\le1$이므로 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sin x}{x}=1$입니다.

07 이해 : 역함수 이야기 (4) 역함수 미분법

역함수 미분법 다시보기

대거역함수로 증명하는 역함수 미분법

이제 역함수 미분법을 증명해봅시다. 미분가능한 함수 f에 대하여 $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$를 Δy와 Δx로 나타내면 다음과 같습니다.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

g가 f의 역함수일 때, 대거역함수 표현에 의하면 $x = g(y)$입니다. 이 식의 양변을 y에 대하여 미분하여 얻은 $g'(y) = \dfrac{dx}{dy}$를 Δy와 Δx로 나타내면 다음과 같습니다.

$$g'(y) = \frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

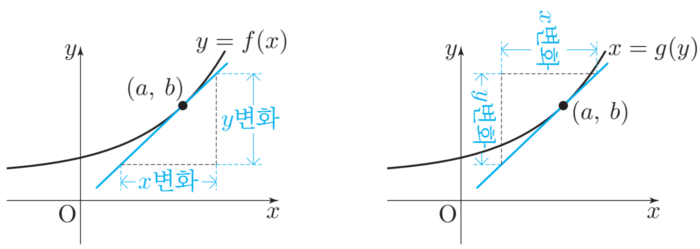
이때 $\Delta x \to 0$이면 $\Delta y \to 0$이므로 다음을 얻습니다.

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} \quad \left(\text{단, } \frac{dy}{dx} \neq 0\text{일 때}\right)$$

따라서 다음의 관계를 얻습니다.

$$g'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} \quad \left(\text{단, } \frac{dy}{dx} \neq 0\text{일 때}(f'(x) \neq 0\text{일 때})\right)$$

$$f(a) = b\text{이면 } g'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad (\text{단, } f'(a) \neq 0\text{일 때})$$

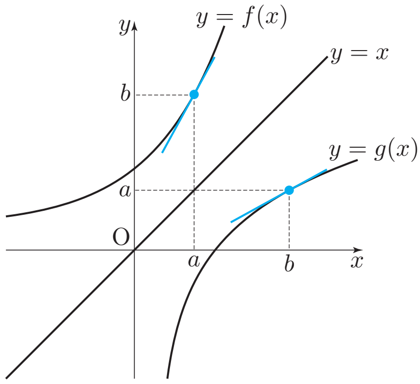


이때 앞서 배웠듯이 $y = f(x)$와 $x = g(y)$의 그래프는 일치합니다. 단지 한 점 (a, b)에서의 미분계수를 바라볼 때, $\dfrac{dy}{dx}$는 x의 변화를 기준으로 y의 변화가 얼마나 되는지를 $\dfrac{y\text{변화}}{x\text{변화}}$로 구하는 것이고, $\dfrac{dx}{dy}$는 y의 변화를 기준으로 x의 변화가 얼마나 되는지를 $\dfrac{x\text{변화}}{y\text{변화}}$로 구할 뿐입니다. 서로의 값이 역수라는 사실도 두 상황에서 분모와 분자만 바뀐 것으로 자연스럽게 이해할 수 있을 것입니다.

이처럼 역함수 미분법을 증명할 때 대거역함수를 이용하면 x와 y의 관계가 그대로 유지되므로 변수의 역할이 바뀌지 않고, 대입되는 값인 $x = a$, $y = b$가 바뀌지 않아 증명 과정을 전개하기 간편합니다.

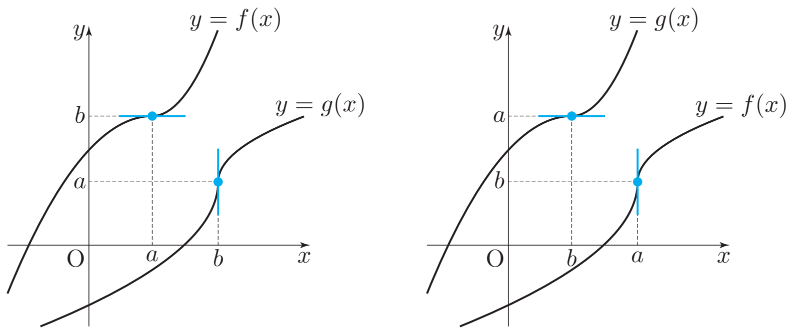
새함역함수의 그래프를 이용하여 대칭이동된 그래프 위의 점과 기울기를 이해한다.

대거역함수를 이용하여 f와 g가 역함수 관계일 때 f'와 g'의 관계를 깨달았으니, 이를 이용하여 새함역함수의 그래프를 그리는 것도 가능합니다.



$y = f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서 $f'(a) = c$이면, $(b,\ a)$는 $y = g(x)$ 위의 점이고, 역함수 미분법에 의하여 $g'(b) = \dfrac{1}{c}$ 입니다.

미분계수가 0인 점과 역함수



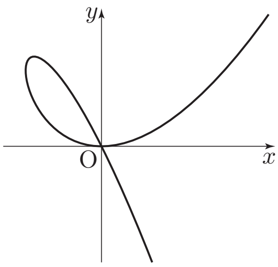
(a)

(b)

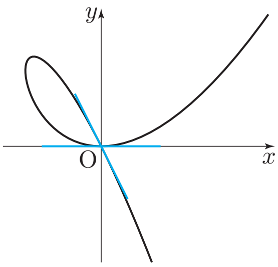
(a)와 같이 $y = f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서 $f'(a) = 0$이면 $g'(b)$가 정의되지 않습니다. 반대로 (b)와 같이 $y = g(x)$ 위의 점 $(b,\ a)$에서 $g'(b) = 0$이면 $f'(a)$가 정의되지 않습니다.

이 사실이 시사하는 바는 두 가지입니다. 하나는 '미분가능한 함수의 역함수'라고 해서 반드시 미분가능한 건 아니라는 것입니다. 나머지 하나는 '미분가능하지 않은 함수의 역함수'라고 하더라도 미분가능한 함수일 수 있다는 것입니다.

한 점에서 여러 개의 접선이 존재할 수 있고, 출제될 수도 있다.



(a)



(b)

매나곡의 접선은 한 점에서 두 개 이상일 수 있습니다. 예를 들어 매나곡

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = (t-1)^2(t+1) \end{cases}$$

의 그래프는 (a)와 같은데, 식을 통해 $t = -1$일 때에도 원점을 지나고 $t = 1$일 때에도 원점을 지남을 알 수 있습니다. 이때 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(3t+1)(t-1)}{2t}$이므로 $t = -1$일 때 $\dfrac{dy}{dx} = -2$이고, $t = 1$일 때 $\dfrac{dy}{dx} = 0$임을 쉽게 구할 수 있습니다. 따라서 (b)와 같이 원점에서 서로 다른 접선이 두 개 존재합니다.

이를 더 확장하여 '한 점에 대응되는 실수 t는 여러 개이지만 일부의 접선이 서로 동일한 상황'까지도 출제가 가능할 것입니다. 예를 들어 원점에 대응되는 실수 t가 0, 1, 2로 세 개 존재하고, $t = 0$과 $t = 2$일 때의 접선의 기울기가 동일하고, $t = 1$일 때는 다른 값을 갖는 식입니다. 만약 이러한 문항이 출제된다면 난이도는 매우 높아질 것입니다.

이처럼 교육과정의 한계상 '한 점에서 그을 수 있는 여러 개의 접선'을 다룰 수 없었던 음함수에서와 달리, 매나곡에서는 출제 가능성을 배제할 수 없으며, 더욱 확장하여 응용된 상황까지 출제가 가능하므로 꼭 숙지하도록 합시다.

매나함의 그래프와 접선

모양을 알아낼 필요가 있고, 그려지는 순서를 고려해야 할 수도 있다

매나곡 중에서 주어진 식의 t를 소거해서 y와 x의 관계식 $y = h(x)$로 나타낼 수 있는 경우가 매나함입니다. 매나함은 근본적으로 함수이므로 미분법으로 모양을 알아낼 수 있습니다. 만약 '경로 겹침'의 상황을 다룬다면 그래프가 그려지는 순서 또한 고려해야 합니다. $y = h(x)$로 나타내어지는 매나함 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ 에 대하여 주의할 점을 알아봅시다.

개량된 부분적분 공식 외우는 방법

개량된 부분적분 공식을 외우기 위한 방법을 알아봅시다. 먼저 다음과 같은 식의 틀을 정확히 숙지합시다.

$$\int ①dx = ② - \int ③dx$$

이제 u에만 주목하여 ①, ②, ③의 순서대로 관찰해봅시다. ①에는 u, ②에는 u, ③에는 u'이 등장합니다. 따라서 ①의 u는 ②에서 u 그대로 등장하고, ③에서는 ①의 u가 미분된 u'으로 등장합니다.

마찬가지로 v에만 주목하여 ①, ②, ③의 순서대로 관찰해봅시다. ①에는 v, ②에는 V, ③에는 V가 등장합니다. 따라서 ①에 있는 v는 ②에서 한 번 적분되어 V로 등장하고, ③에서는 ②에서 있는 모습 그대로 V로 등장합니다.

지금까지 살펴본 바를 바탕으로, 개량된 부분적분 공식을 다음과 같이 외울 수 있습니다. 이때 ②는 ①을 보며 계산하고, ③은 ②를 보며 계산하면 됩니다.

$$\int u(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,V(x) - \int u'(x)\,V(x)\,dx$$

$$\int u(x)\,v(x)\,dx = (\text{그대로})(\text{적분}) - \int (\text{미분})(\text{그대로})dx$$

기본적인 부분적분의 주의사항

부분적분은 공식을 외운다고 끝이 아니고, 주의해야 할 점이 많습니다.

합리적인 u, v 설정 : 각 함수의 미분적분 용이성 분석

외운 식의 구조를 보면 알 수 있듯이, 좌변의 피적분함수를 구성하고 있는 두 함수 u, v 중 한 함수 u는 미분되고, 나머지 함수 v는 적분됩니다. 따라서 두 함수의 미분 용이성, 적분 용이성을 각각 조사하여 가장 합리적인 방향으로 u, v를 설정해야 합니다.

여러 가지 참고서에서 언급하는 로다삼지[36]는 이러한 맥락에서 제안된 것입니다. 다만 고난도 부분적분 문제에서는 로다삼지 뿐만 아니라 특정한 조건을 만족하는 함수에 대하여 묻는 경우가 대부분이므로, 로다삼지에만 의존하지 말고 주어진 상황에서 각 함수의 미적분 용이성을 따지는 연습을 하길 권장합니다.

u와 v를 설정한 후에는 좌변을 작성하되, 피적분함수식에서 미분될 함수를 왼쪽(u 자리)에, 적분될 함수를 오른쪽(v 자리)에 적습니다. 우변에는 공식의 틀을 적어나가면서 '(그대로)(적분)'과 '(미분)(그대로)'를 기계적으로 계산하여 식을 작성합니다.

앞서 말했듯 적분의 본질은 계산입니다. 적분을 잘하기 위해서는 적분 계산에 막힘이 없도록 꾸준하게 훈련하는 것이 중요합니다.

36) 로그함수, 다항함수, 삼각함수, 지수함수를 나열한 것입니다. 모두 미분할 수 있다는 점에서는 동일하지만, 앞으로 갈수록 적분된 꼴을 다루기 어렵고, 뒤로 갈수록 적분된 꼴을 다루기 쉬워집니다.

적분 계산 훈련

수능문제에서 '이 문제는 치환적분을 써서 풀어라', '이 문제는 식을 이렇게 변형해서 풀어라'는 식의 힌트를 주지는 않으므로 본인이 직접 판단하여 풀이를 진행해야 합니다. 지금까지 각각의 테크닉별로 예제를 조금씩만 제시한 이유는, 여기에 수많은 적분문제들을 섞어놓고 어떤 테크닉을 쓸지 연습할 기회를 드리기 위해서입니다. 어떤 적분 테크닉을 써야할지 모르는 상태에서 스스로 판단하는 능력을 키워봅시다.

예제 1. 다음의 232개의 부정적분을 구하시오.

1. $\displaystyle\int \frac{3\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}dx$

2. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

3. $\displaystyle\int \sqrt{3x+1}dx$

4. $\displaystyle\int e^{3x}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{3x+6}{x^2+4x+4}dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x-1)}dx$

7. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x}dx$

8. $\displaystyle\int (x+2)e^x dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x}dx$

10. $\displaystyle\int \left(x^2-2\right)e^x dx$

11. $\displaystyle\int e^{x-1}dx$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}dx$

13. $\displaystyle\int \left(3^x+2^x\right)^2 dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{x}}dx$

15. $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{x}\right)dx$

16. $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{\sqrt{x}}dx$

17. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx$

18. $\displaystyle\int \left\{\frac{(\ln x)^3}{x}+2\right\}dx$

19. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx$

20. $\displaystyle\int \sqrt{2x+3}dx$

21. $\displaystyle\int \sin x\cos x dx$

22. $\displaystyle\int x\sin x dx$

23. $\displaystyle\int (\tan x+\cot x)^2 dx$

24. $\displaystyle\int (2x+1)\ln x dx$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$

27. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

28. $\displaystyle\int \frac{2}{x}dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-2}{x^2}dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x-1}{\tan x}dx$

이를 통해 두 기호 $\dfrac{dy}{dx}$, dx에 대하여 $\dfrac{dy}{dx} \times dx = dy$와 같은 연산을 정의한 적은 없으나,[41] 정적분 내에서는 (결과론적으로) 연산 결과가 분수 계산과 동일함을 알 수 있습니다. 한편 변수 사이의 관계만 잊지 않는다면, 피적분함수와 적분변수 부분만 치환하고, 적분구간은 치환하지 않아도 문제가 없다는 사실 또한 알 수 있습니다.

지금까지 살펴본 내용을 정리하면 다음과 같습니다.

① dy, dx, $\dfrac{dy}{dx}$ 사이의 연산 : $\dfrac{dy}{dx}dx = dy$, $f'(x)\,dx = dy$

$\dfrac{dy}{dx}$는 x의 순간변화에 따라 발생하는 y의 순간변화를 비율로 나타내는 값이므로, $\dfrac{dy}{dx}$에 dx를 곱하면 dy를 얻는다. $f'(x)$ 또한 마찬가지로 생각할 수 있다.

② 적분변수와 구간의 치환 : $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} \frac{dy}{dx}dx = \int_{x=a}^{x=b} dy = \int_{y=f(a)}^{y=f(b)} dy$

y의 순간변화량 dy가 $x=a$부터 $x=b$까지 누적된 값은 $y=f(a)$부터 $y=f(b)$까지 누적된 값인 $f(b)-f(a)$와 같다.

41) 호기심이 있는 학생은 미분형식(differential Form)에 대한 다음의 글을 읽어보시면 됩니다.

역치환적분

기본적인 치환적분에서는 $\displaystyle\int f(g(t))\,g'(t)dt$의 형태의 식이 주어졌을 때 $g(t) = x$라 치환함으로써 다음과 같은 꼴을 얻었습니다.

$$\int f(x)\,dx$$

반대로, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$의 형태의 식이 주어졌을 때[42] 역함수가 존재하는 함수 g에 대하여 $x = g(t)$라 치환하면 다음과 같은 꼴을 얻습니다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\,g'(t)dt$$

이때 $c = g^{-1}(a)$, $d = g^{-1}(b)$입니다. 이러한 방식의 치환을 역치환이라 부르기로 하고, 역치환을 이용한 치환적분을 역치환적분이라고 부르기로 합시다.

42) 왜 여기서 부정적분이 아닌 정적분인지는 곧 설명할 것입니다.

역치환적분에서 주의할 점

이름에 걸맞게 g의 역함수가 존재해야만 사용할 수 있습니다. $x = g(t)$라 치환하는 것은, x와 t가 g라는 함수에 의해 연관지어졌음을 의미합니다. 이는 치환된 정적분에서의 아래끝과 위끝인 c, d를 구할 때 더 명백히 드러납니다. $g(c) = a$, $g(d) = b$이므로 c, d를 각각 a, b로 표현하기 위해서는 역함수 g^{-1}가 존재해야만 비로소 $c = g^{-1}(a)$, $d = g^{-1}(b)$라 말할 수 있기 때문입니다.

한편 g의 역함수가 존재하지 않는 경우, 여러 구간으로 쪼개 각각의 구간에서는 역함수가 존재하도록[43] 하여 각 구간에서 역치환적분을 수행할 수 있습니다. 이때 출제자 입장에서 생각해보면, 치환할 함수 g의 역함수 존재 여부를 따지도록 유도하고, 존재하지 않는다면 g 구간을 어떻게 쪼갤지를 생각하도록 하기 위해서는 '적분 구간'을 주어야만 합니다.

43) 이를 조각역함수라고 부를 수 있습니다.

역치환적분을 부정적분으로 다루는 경우가 드물고, 정적분으로 다루는 경우가 많은 것은 이때문입니다.

역치환적분의 사례 (1) : 삼각치환

$\int_p^q \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$, $\int_p^q \frac{1}{a^2+x^2}dx$ 꼴이 대표적입니다. 전자의 경우 $x = a\sin\theta$로, 후자의 경우 $x = a\tan\theta$로 역치환적분을 시도[44]하면 삼각함수 사이의 관계에 의하여 식이 θ에 대하여 깔끔하게 정리되어 적분을 계산할 수 있게 됩니다.

[44] $[p,\ q]$에서 $x = a\sin\theta$, $x = a\tan\theta$의 역함수가 존재할 때

역치환적분의 사례 (2) : 역함수 표현이 주어졌을 때

$t = (2x-1)e^{2x}$라는 관계식이 주어졌을 때, $\int_{e^2}^{3e^4} x dt$를 구해봅시다.

우선 주어진 함수에서 $t = (2x-1)e^{2x}$로 역치환할 수 있는지, 즉 함수 $g(x) = (2x-1)e^{2x}$의 역함수가 존재하는지를 확인해야 합니다. $g(x)$는 $\left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$에서 증가[45]하고, $x = \frac{1}{2}$일 때 $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$이므로 정의역을 $\left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$, 치역을 $[0,\ \infty)$로 잡으면 역함수가 존재함을 알 수 있습니다. 따라서 역치환적분을 수행할 수 있습니다.

[45] 미분하면 $[0,\ \infty)$에서 증가함을 알 수 있습니다.

$t = (2x-1)e^{2x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{dt}{dx} = 4xe^{2x}$이므로 $dt = 4xe^{2x}dx$를 얻습니다. 이를 이용해 주어진 정적분을 역치환한 후, 부분적분을 통해 계산하면 다음과 같습니다.[46]

$$\begin{aligned}
\int_{t=e^2}^{t=3e^4} x dt &= \int_{t=e^2}^{t=3e^4} \left\{x \times \left(4xe^{2x}\right)\right\} dx \\
&= \int_{x=1}^{x=2} 4x^2e^{2x}dx \\
&= \left[\left(4x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(8x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\right)dx \\
&= \left(8e^4 - 2e^2\right) - \left(\left[8x \cdot \frac{1}{4}e^{2x}\right]_1^2 - \int_1^2 \left\{8 \cdot \left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)\right\}dx\right) \\
&= 8e^4 - 2e^2 - \left(4e^4 - 2e^2\right) + \left(e^4 - e^2\right) = 5e^4 - e^2
\end{aligned}$$

[46] 사실 옆의 정적분의 계산에서 아래끝과 위끝을 구할 때 $e^2 = (2x-1)e^{2x}$에서 $x = 1$을 끌어내는 과정, $3e^4 = (2x-1)e^{2x}$에서 $x = 2$를 끌어내는 과정을 명쾌하게 설명하기는 어렵습니다. 그러나 지금 본문의 요지는 이러한 방정식의 해결이 아니므로 이 부분은 넘어갑시다.

이처럼 역치환적분을 이용하면 변수 사이의 관계가 복잡해보이는 적분도 무리 없이 처리할 수 있습니다.

어려운 부분적분

앞서 배운 어려운 적분들은 출제 가능한 상황을 미리 대비하거나 새로운 테크닉을 배운 것이었습니다. 그런데 어려운 부분적분은 성격이 전혀 다릅니다. 어려운 부분적분은 단순 암기[47]만으로는 해결되지 않으며, 미분과 적분의 모든 논리를 총동원해야 가까스로 해결할 수 있을 만큼 어렵게 출제될 수 있습니다. 어떠한 경우가 있는지 알아봅시다.

47) 로다삼지, 지삼다로 등으로 무엇을 미분하고 무엇을 적분할지 순서를 외우는 것을 말합니다.

식변형을 요구하는 경우

부분적분에서 피적분함수식을 그대로 이용하지 않고 약간 변형해야 하는 경우가 있습니다. 이러한 경우, 문제의 조건을 이용하기 위해 식을 변형하는 과정을 거치고 나면, 변형된 식에서 미분하기 쉬운 u와 적분하기 용이한 v가 등장하게 됩니다.

예를 들어 문제에 주어진 도함수 조건을 이용하기 위해 식을 변형하여 u를 얻으면, 식의 나머지 부분은 v가 됩니다. 마찬가지로 문제에 주어진 원시함수 조건을 이용하기 위해 식을 변형하여 v를 얻으면, 식의 나머지 부분은 u가 됩니다.

v를 적분하는 과정에서 치환적분이 쓰이는 경우

부분적분에서 v를 적분할 때 치환적분이 쓰일 수도 있음에 주의합시다. 이는 단순히 주어진 식에서 치환적분꼴을 발견하는 것에 그치지 않고, '치환적분꼴이 등장하도록 식변형을 하는 경우'도 존재할 수 있음을 암시합니다. 즉 주어진 피적분함수에서 합성함수꼴이 등장했다면, 합성함수의 속함수의 도함수를 곱하고 나누는 행위를 통해 비로소 v에 해당하는 '적분이 용이한 함수'를 치환적분꼴로 만들어낼 수도 있다는 것입니다. 이러한 경우, 부분적분을 해야 하는 문제가 맞다는 전제 하에, 피적분함수의 나머지 부분은 u가 되어 미분이 용이한 형태로 맞추어질 수밖에 없습니다.

예시를 통해 이해하기

다음의 예제를 풀어봅시다. 어려운 부분적분을 연습해보기 좋은 문제입니다.

01 [2017학년도 9월 평가원 수학 가형 21번]

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2e^{-x^2}$

(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2}f(t)dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은?

① $\dfrac{16}{3e^4}$ ② $\dfrac{6}{e^4}$ ③ $\dfrac{20}{3e^4}$ ④ $\dfrac{22}{3e^4}$ ⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

(가) 조건에서는 $\dfrac{f(x)}{x}$ 의 도함수가 $x^2e^{-x^2}$ 임을 알려주고 있습니다. (나) 조건에서는 $g(x)$가 정적분으로 정의되어 있으므로, $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}f(t)\,dt$를 계산해볼 필요가 있습니다. 그런데 피적분함수에서 치환적분꼴은 보이지 않으며, $f(t)$를 직접 구하여 계산하기는 쉽지 않아보입니다. 피적분함수가 두 함수의 곱으로 이루어져 있으니 부분적분꼴임을 추정할 수 있지만, e^{t^2} 과 $f(t)$의 곱으로 보기엔 $f(t)$의 원시함수와 도함수를 모두 모르고, e^{t^2} 은 도함수만 알고 있으므로 '써야 할 테크닉이 부분적분인 것을 파악했음에도 불구하고, 정작 부분적분을 어떻게 할지 감을 잡을 수 없는' 상황을 맞이하게 됩니다.

그런데 (가) 조건에서 $\dfrac{f(x)}{x}$의 도함수를 알려주었고, $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}f(t)\,dt$의 피적분함수에 $f(t)$가 있는데, (가) 조건을 이용하기 위해 $\displaystyle\int_1^x te^{t^2}\frac{f(t)}{t}dt$로 변형했을 때 부분적분꼴이 나타난다면, 즉 te^{t^2} 의 원시함수를 알 수 있다면 $u=\dfrac{f(t)}{t}$, $v=te^{t^2}$ 으로 두는 부분적분을 시도해볼 만합니다. 이때 te^{t^2} 은 치환적분꼴이므로 $\displaystyle\int te^{t^2}dt=\frac{1}{2}e^{t^2}+C$와 같이 원시함수를 구할 수 있습니다.

그 다음으로 $\displaystyle\int u'V\,dt$를 해결해야 합니다. $u'=t^2e^{-t^2}$, $V=\dfrac{1}{2}e^{t^2}$ 이므로 $u'V=\dfrac{t^2}{2}$ 이 되어 $\displaystyle\int u'V\,dt$가 계산 가능함을 확인할 수 있습니다.

지금까지 살펴본 바에 따라 $u=\dfrac{f(t)}{t}$, $v=te^{t}$ 로 두고 부분적분을 수행하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{f(t)}{t}te^{t^2}dt &= \left[\frac{f(t)}{t}\times\frac{1}{2}e^{t^2}\right]_1^x-\int_1^x\left(\frac{f(t)}{t}\right)'\times\frac{1}{2}e^{t^2}dt\\ &=\frac{e^{x^2}f(x)}{2x}-\frac{1}{2}-\int_1^x\frac{t^2}{2}dt\\ &=\frac{e^{x^2}f(x)}{2x}-\frac{1}{3}-\frac{x^3}{6}\end{aligned}$$

한편 $g(x)=\dfrac{4}{e^4}\left\{\dfrac{e^{x^2}f(x)}{2x}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{x^3}{6}\right\}$이므로, $f(2)$와 $g(2)$에 관한 정보를 얻기 위해 $x=2$를 대입하면 다음과 같습니다.

$$g(2)=\frac{4}{e^4}\left\{\frac{e^4}{4}f(2)-\frac{5}{3}\right\}=f(2)-\frac{20}{3e^4}$$

$$\therefore f(2)-g(2)=\frac{20}{3e^4}$$

■

10 찾아보기