01 05-06 주요 문항

01 [2005학년도 6월 평가원 수리 가형 6번]

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 $x=a$와 $x=b$에서 만나고, $a<c<b$인 $x=c$에서 두 함숫값의 차가 최대가 된다. 다음 중 항상 옳은 것은?

① $f'(c)=-g'(c)$ ② $f'(c)=g'(c)$
③ $f'(a)=g'(b)$ ④ $f'(b)=g'(b)$
⑤ $f'(a)=g'(a)$

맑은로직

$h(x)=|f(x)-g(x)|$라 하면 다음을 알 수 있습니다.

1. 모든 실수 x에 대하여 $h(x)\geq 0$
2. $h(a)=h(b)=0$
3. 함수 $h(x)$는 $x=c$에서 최댓값 M을 갖는다.

$M=0$인 경우와 $M>0$인 경우로 분류하겠습니다.

(1) $M=0$
모든 실수 x에 대하여 $h(x)=0$이므로 $h(x)$는 상수함수입니다. 따라서 $h'(c)=0$입니다.

(2) $M>0$
$x=c$에서 $h(x)=f(x)-g(x)\cdots$①이거나 $h(x)=g(x)-f(x)\cdots$②입니다. ①과 ② 모두 $h(x)$가 $x=c$에서 미분가능합니다.
이때 함수 $h(x)$가 $x=c$에서 최대이므로 극대이고, 극점의 미분계수는 0이므로 $h'(c)=0$입니다. ①, ②인 경우 모두 $h'(c)=0$이면 $f'(c)=g'(c)$을 얻습니다.

(1)과 (2)를 종합하면 $f'(c)=g'(c)$가 항상 성립함을 알 수 있습니다.

정답 : ②

풀이에 대한 FAQ

1) 절댓값 : 왜 시작부터 절댓값을 취한 함수가 나오는 건가요?

풀이를 보면 $h(x) = |f(x) - g(x)|$라는 함수를 설정하는 것부터 시작됩니다. 이는 문제에 주어진 조건인 '$x = c$에서 함숫값의 차가 최대이다'를 수식으로 설명할 함수를 만들기 위함입니다.

'차'는 두 항목의 차이가 얼마나 나는지를 나타내는 수치입니다. 이는 '수직선 위의 두 수 사이의 거리'라 해석할 수도 있습니다. 어느 쪽으로 해석하더라도, 차는 항상 0 이상의 값을 가집니다.

2와 3의 차를 구한다면, 큰 값인 3에서 작은 값인 2를 빼서 $3-2=1$이라 구하면 됩니다. 작은 값인 2에서 큰 값인 3을 빼면 $2-3=-1$이 되므로, 절댓값을 취해서 $|-1|=1$라 해야 올바른 값을 구할 수 있습니다.

두 항목의 차를 구해야 하는데 둘 사이의 대소관계를 알지 못하는 경우, 절댓값이 유용합니다. 예를 들어 x와 y의 대소관계를 알지 못하는 상황에서 x와 y의 차를 구하려면 $|x-y|$라 답해도 되고, $|y-x|$라 답해도 됩니다. 이처럼 절댓값은 차를 표현하기 위해 유용하게 쓰일 수 있습니다.

문제에서는 f와 g의 차를 구하는 상황이고, f와 g의 대소관계에 대한 정보가 주어져 있지 않으므로, $|f-g|$를 설정하고 시작하는 것입니다.

2) 왜 두 경우 $M=0$와 $M>0$로 나누어서 문제를 해결하는 건가요?

$M=0$이면 주어진 조건을 만족하면서 가장 간단한 상황이 되기 때문입니다. '주어진 조건을 만족하는 상황 중 가장 간단한 상황'을 찾아 먼저 해결하는 것은 〈맑은개념 수학 I & 수학 II〉의 Basic 1.1)에서 롤의 정리를 증명하며 얻었던 교훈입니다.

그렇다면 왜 $M=0$이면 간단한 상황임을 떠올릴 수 있었을까요? M은 h의 최댓값이므로 h의 치역에 포함된 원소입니다. 그런데 $h \geq 0$이므로 h의 최솟값이 m이 0임이 확정된 상황입니다. 이때 $M=0$이라면 최댓값과 최솟값이 0으로 같은, 그래서 치역의 원소가 0뿐인 '간단한 상황'이 만들어지게 됩니다. 이는 치역의 원소는 0뿐임을 의미하고, 동시에 h가 상수함수임을 의미하게 됩니다.

따라서 $M=0$일 때의 상황을 해결하고 나서 $M>0$일 때의 상황을 해결하러 떠나면 됩니다.

3) 왜 $h(x)$가 $x=c$에서 미분가능한가요?

미분법에 의해 알 수 있습니다. 미분법에 따르면 $(f-g)' = f' - g'$입니다. 따라서 $f'(c)$, $g'(c)$가 존재하므로 $h'(c) = f'(c) - g'(c)$도 존재합니다. 이에 대한 자세한 내용을 뒤에서 더 배워봅시다.

20) 왼쪽 기울기는
$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$,
오른쪽 기울기는
$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$를
말합니다.

21) 물론 둘 중 하나가 존재하지 않거나 둘 모두 존재하지 않아서 $x = a$에서 미분가능하지 않은 경우도 있습니다. 그러나 그런 경우에서는 $x = a$에서 미분가능한 함수를 만들 수 없습니다. 따라서 여기서는 그런 경우를 다루지 않습니다.

깊은로직 1 : 미분가능성 판정하기

〈맑은개념 수학 I & 수학 II〉의 Calculus 3.1)과 이어지는 이야기입니다. Calculus 3.1)에서, '$x = a$에서 미분가능'은 '$x = a$에서 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 서로 같다'와 동일한 말임을 배웠습니다.[20] 이를 이용해서 '여러 함수의 연산으로 정의된 새로운 함수'의 미분가능성을 판정해보고, 절댓값을 취한 함수의 미분가능성을 판정해봅시다.

$x = a$에서 미분가능한 함수 f_1, f_2와 $x = a$에서 미분가능하지 않은 함수 g, h를 생각해봅시다. 이때 f_1, f_2는 미분가능하므로 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 같고, g, h는 미분가능하지 않으므로 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 다릅니다.[21]

한편, 미분법은 본래 미분계수가 존재하는 함수, 즉 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 같은 함수에서만 쓸 수 있습니다. 그런데 사실 미분법의 증명 과정에서 등장하는 $\lim_{x \to a}$를 모두 $\lim_{x \to a-}$로 바꾸면 '왼쪽 기울기가 존재하는 함수'끼리 왼쪽 기울기를 구하는 방법으로 쓸 수 있습니다. 마찬가지로 $\lim_{x \to a+}$로 바꾸면 '오른쪽 기울기가 존재하는 함수'끼리 오른쪽 기울기를 구하는 방법으로 쓸 수 있습니다.

우리는 이를 이용하여 '여러 함수의 사칙연산으로 정의된 새로운 함수의 미분가능성'을 살펴볼 것입니다.

f_1과 f_2의 사칙연산으로 정의된 새로운 함수

분모가 0이 되는 경우를 제외하고는 항상 미분가능합니다. $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$ 모두 미분법에 의해 미분계수가 잘 정의되기 때문입니다.

f_1과 g의 사칙연산으로 정의된 새로운 함수

미분가능한 함수 f_1과 미분가능하지 않은 함수 g의 사칙연산으로 정의된 새로운 함수의 미분가능성을 살펴봅시다. 편의상 아랫첨자를 생략하고, $f'(a) = k$라 하고, g의 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기를 각각 m, n $(m \neq n)$이라 하겠습니다.

(1) $f + g$, $f - g$

왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 다르므로 $x = a$에서 항상 미분가능하지 않습니다. $f + g$에 대해서만 간단히 설명하자면, 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 각각 $k + m$, $k + n$이고 $m \neq n$이므로 둘은 항상 다릅니다.

(2) fg

일반적으로는 미분가능하지 않지만, 특정한 경우 절묘하게 미분가능할 수 있습니다. 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기를 구하면 다음과 같습니다.

$$(\text{왼쪽 기울기}) = k \cdot g(a) + f(a) \cdot m$$

$$(\text{오른쪽 기울기}) = k \cdot g(a) + f(a) \cdot n$$

이때 $f(a) = 0$이면 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 모두 $kg(a)$로 같습니다. 따라서 $f(a) = 0$이면 미분가능할 수 있습니다.

(3) $\dfrac{f}{g}$

fg에서와 마찬가지로 일반적으로는 미분가능하지 않지만, $g(a) \neq 0$이고 $f(a) = 0$이면 $x = a$에서 미분가능합니다.

(4) $\dfrac{g}{f}$

왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 절대로 같을 수 없으므로 $x = a$에서 미분가능하지 않습니다.

따라서 f만 $x = a$에서 미분가능하고 g는 $x = a$ 미분가능하지 않음에도 불구하고

$$fg,\ \frac{f}{g}\text{는 } x = a\text{에서 미분가능할 수도 있다}$$

는 사실에 유의합시다.

g와 h의 사칙연산으로 정의된 새로운 함수

함수 g, h의 사칙연산으로 정의된 새로운 함수의 미분가능성을 살펴봅시다. g의 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기를 각각 m, n $(m \neq n)$라 하고, h의 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기를 각각 p, q $(p \neq q)$라 하겠습니다.

(1) $g + h$, $g - h$

일반적으로는 미분가능하지 않지만, 특정한 경우 절묘하게 미분가능할 수 있습니다. $g + h$의 경우 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기가 각각 $m + p$, $n + q$이므로 각각의 값이 서로 같을 수도 있기 때문입니다. $g - h$의 경우도 마찬가지입니다.

(2) gh

일반적으로는 미분가능하지 않지만, 특정한 경우 절묘하게 미분가능할 수 있습니다. 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기를 구하면 다음과 같습니다.

$$(\text{왼쪽 기울기}) = m \cdot h(a) + g(a) \cdot p$$

$$(\text{오른쪽 기울기}) = n \cdot h(a) + g(a) \cdot q$$

이때 둘은 일반적으로는 다르겠지만, 둘이 같도록 하는 경우는 매우 다양하게 존재할 것입니다.

(3) $\dfrac{g}{h}$ 또는 $\dfrac{h}{g}$

곱과 마찬가지로 일반적으로는 미분가능하지 않지만, 특정한 경우 절묘하게 미분가능할 수 있습니다.

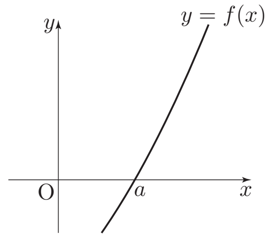
따라서 g와 h가 모두 미분가능하지 않음에도 불구하고,

$$g\text{와 } h\text{의 사칙연산으로 정의된 함수는 미분가능할 수도 있다}$$

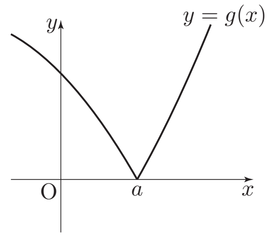
는 사실에 유의합시다.

깊은로직 2 : 절댓값을 취한 함수

절댓값을 취한 함수의 미분가능성

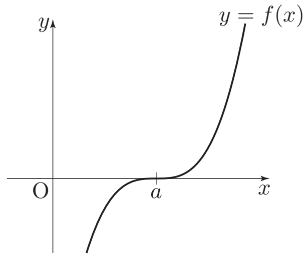


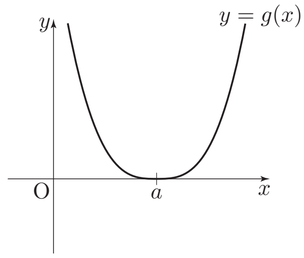
(a)



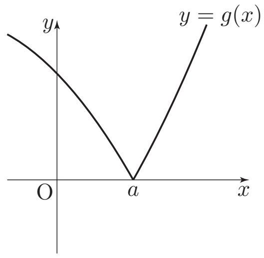
(b)

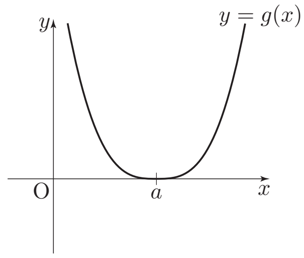
$g(x) = |f(x)|$라 하겠습니다. 만약 $f(a) = 0$인 함수 $y = f(x)$의 그래프가 (a)와 같다면, $y = g(x)$의 그래프는 (b)와 같습니다. 이때 $x = a$에서 $f'(a) \neq 0$이면 g의 왼쪽 기울기와 오른쪽 기울기 중에서 하나는 $+f'(a)$이고, 나머지 하나는 $-f'(a)$입니다. 따라서 $f(a) = 0$, $f'(a) \neq 0$이면 함수 $|f(x)|$는 $x = a$에서 미분가능하지 않습니다.





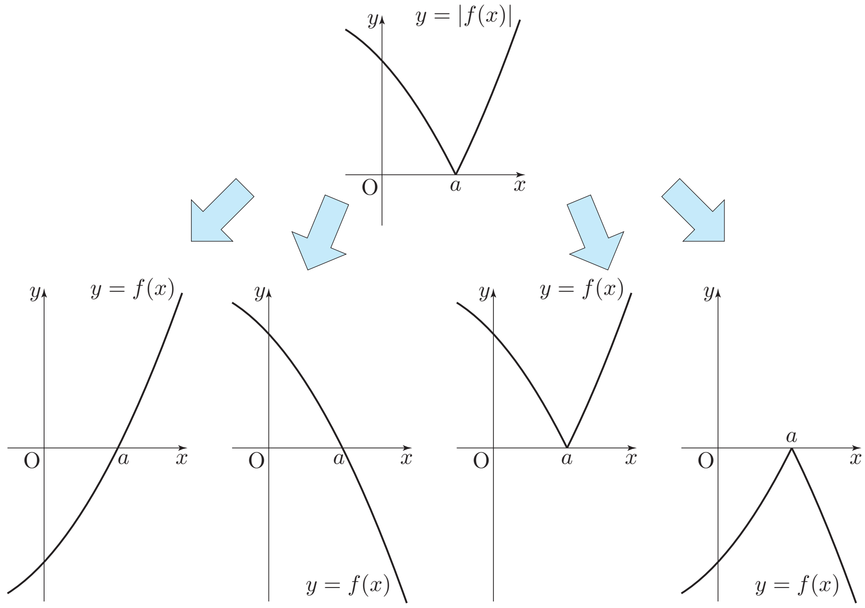
만약 $f'(a) = 0$이면 왼쪽 기울기도 0이고 오른쪽 기울기도 0이므로 함수 $|f(x)|$는 $x = a$에서 미분가능합니다.





이는 사실 원래 함수 $f(x)$의 상태에 대한 언급 없이, 절댓값의 특성과 극소에 대해 배운 내용만으로도 끌어낼 수 있습니다. $g(x) = |f(x)| \geq 0$이고 $g(a) = 0$이므로 함수 $g(x)$는 $x = a$에서 최솟값을 갖습니다. 최솟값은 극솟값입니다. 만약 $x = a$에서 미분가능하다는 조건이 없다면 $g'(a)$의 존재 여부를 알 수 없으므로, $x = a$에서 미분가능하지 않을 수도 있습니다. 만약 $x = a$에서 미분가능하다면 극점의 미분계수는 0이므로 $g'(a) = 0$입니다.

$y = |f(x)|$가 주어졌을 때 $y = f(x)$의 그래프 추정하기



연속함수 $y = f(x)$의 그래프는 모르지만 $y = |f(x)|$의 그래프를 알 때, 함수 $y = f(x)$의 그래프를 추정할 수 있습니다. 예를 들어 그림과 같이 $y = |f(x)|$의 그래프가 주어졌을 때, $y = f(x)$의 그래프는 위의 네 가지 그래프 중 하나입니다. 이는 원래 함수인 $f(x)$의 부호 양상에 따라 얻을 수 있는 결과입니다.

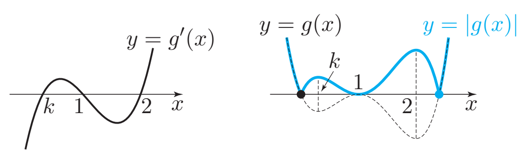
03 [2010학년도 6월 평가원 수리 가형 24번]

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오.

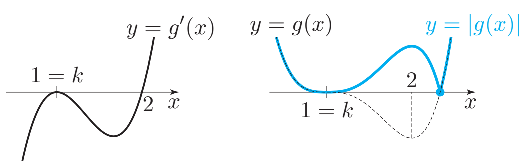
> (가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
> (나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

맑은로직

(가)에서 $f'(2)=0$, (나)에서 $|f(x)-f(1)|$이 $x=1$에서 미분가능하므로 $f'(1)=0$이므로[60] $f'(x)=b(x-1)(x-2)(x-k)$가 성립합니다. 이때 $f(x)-f(1)=g(x)$라 두면 $g(1)=0$, $g'(1)=0$이고 $g'(x)=f'(x)$입니다. k의 값에 따라 g'의 부호 변화의 양상이 바뀌므로 $y=g(x)$의 그래프가 달라지고, 그에 따라 $y=|g(x)|$의 그래프가 달라지므로, k의 값을 조정해가며 g와 $|g|$를 관찰해봅시다. g의 그래프를 검은색 점선으로, $|g|$의 그래프를 굵은 색선으로 나타내었습니다.



$k<1$이면 검은색 점[61]으로 인해 문제의 조건을 만족시키지 않습니다.



$k=1$이면 문제의 조건을 만족시킵니다. 따라서 $g'(x)=f'(x)=b(x-1)^2(x-2)$이고,

$\dfrac{f'(5)}{f'(3)}=\dfrac{b\cdot 4^2\cdot 3}{b\cdot 2^2\cdot 1}=12$입니다.

정답 : 12

깊은로직 1 : 사고과정 파헤치기

'오직 $x=a$에서만 미분가능하지 않다'

(나)의 해석이 중요한데, $f(x)-f(1)=g(x)$라 하면 $g(1)=0$인데, 2보다 큰 a에 대하여 $|g|$가 오직 $x=a$에서만 미분가능하지 않습니다. 여기서 $x=a$에서 미분가능하지 않다는 정보는 캐치하기 쉽지만, $x\neq a$에서 미분가능하다는 정보는 간접적으로 주어져 있으므로 캐치하기가 어려웠을 것입니다. 캐치했더라도, 이를 $x=1$에서는 미분가능하다고 연결짓기도 어려웠을 것입니다.

60) 왜 이런 해석이 나오는지는 깊은로직에서 다룹니다.

61) 앞으로 나오는 이 문제 풀이의 모든 그림에서, 검은색 점은 x좌표가 2보다 작으면서 미분가능하지 않은 점이고, 푸른색 점은 x좌표가 2보다 크면서 미분가능하지 않은 점입니다. 우리가 원하는 상황은 검은색 점은 없고 푸른색 점이 오직 단 하나 존재하는 상황입니다.

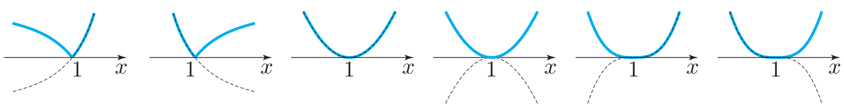
그치만 어려우니까 킬러지, 쉬우면 킬러겠어요? 원래 어려운거니까 어쩔 수 없습니다. 조건에 대해 직접 고민하고 해석 방법을 떠올리는 것은 여러분입니다. 이 책은 그걸 도와드릴 수만 있을 뿐, 떠올리게 해드릴 수는 없습니다. 이런 조건들을 해석하는 방법을 알려드리고자, 지금까지 기출문제에 주어진 문장이나 수식에서 실낱 같은 단서가 있을 때 어떻게든 그 단서를 해석하는 방법을 깊은로직에서 보여드렸던 것입니다. 그럼에도 불구하고 해석법과 해석을 떠올리게 된 배경은 설명해드릴 수 있지만, 여러분이 직접 해석하게 해드릴 수는 없습니다. 머리 터져라 고민해보고 궁리하면서 직접 깨달으셔야 합니다. 깨달음의 시점은 반드시 올 것입니다.

다만 평가원은 제발 자신의 의도를 파악해달라고 호소하고 있는데요, 사실 (나)의 문장에서 ‘오직’을 빼도 의미가 달라지지 않습니다. 사족이나 다름없는 ‘오직’을 넣었다는 것은,

$x=a$만 미분가능하지 않다는 말에서 <u>다른 점들에서는 미분가능하다</u>를 제발 떠올려줘···!

라는, 평가원과 출제자의 간절한 의도를 읽을 수 있는 부분이죠.

절댓값을 씌운 함수의 미분가능성



$x=1$에서 곡선 $y=g(x)$이 점선과 같을 때, 곡선 $y=|g(x)|$는 색선과 같습니다. 왼쪽 두 경우와 같이 g가 $x=1$에서 한 근을 가지면 $|g|$는 $x=1$에서 미분가능하지 않고, 가운데 두 경우와 같이 g가 $x=1$에서 짝수중근을 가지는 경우 또는 오른쪽 두 경우와 같이 g가 $x=1$에서 홀수중근을 가지는 경우에는 $|g|$가 $x=1$에서 미분가능합니다. 다시 말하면 g가 $(x-1)^2$을 인수로 가지면 $|g|$가 $x=1$에서 미분가능합니다.

사실 이 내용은 수능기출편에서 가장 처음에 풀고 분석했던 내용입니다. 2005학년도 6월 가형 6번 문제에서 다루었거든요. 너무 오랜 기간 잊고 있었나요?

분석한 내용을 적극적으로 이용하여 풀이하기

$g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$이므로 $a\neq c$인 실수 a, c에 대하여 $g(x)=b(x-1)^2(x-a)(x-c)$라 둘 수 있습니다. 이때 $c\neq 1$이면 문제의 조건을 만족시키지 않으므로 $c=1$입니다. 따라서 $g(x)=b(x-1)^3(x-a)$이고, $g'(2)=0$을 이용하여 a를 구하면 됩니다.

$g'(x)=3b(x-1)^2(x-a)+b(x-1)^3$에서 $3b(2-a)+b=0$이므로 $b(7-3a)=0$이고, $b\neq 0$이므로 $a=\frac{7}{3}$입니다.[62)]

다만 이 경우 a를 구하기 위해 계산이 더 필요한데, 맑은로직에서와 같이 도함수의 부호변화를 이용하고 k의 변화에 따라 분석하면 그러한 계산이 불필요했던 점, 문제가 묻는 값이 두 미분계수의 비율이었던 점을 고려해본다면, <u>맑은로직이 출제자의 의도에 더 가깝다</u>고 조심스럽게 추정해볼 수 있습니다.

62) 주어진 상황에서 사차함수 g에 나타나는 $1:3$의 비율관계를 이용하면, g'을 구하지 않고도 $a=\frac{7}{3}$임을 바로 알 수 있습니다.

사전지식에 대한 마인드, 그리고 기출편의 목적

앞서 보았듯 절댓값 함수의 미분가능성이 문제의 소재로 출제되었을 때, $f'(a)=0$이면 미분가능하고, $f'(a)\neq 0$이면 미분가능하지 않다는 사실을 미리 접하여 알고 있으면 문제풀이에서 증명과정을 생략해도 되므로, 이를 몰랐던 학생들보다 훨씬 유리합니다.[63)]

이렇게 특정 소재를 미리 다루어봤다면 남들보다 고난도 문제를 적은 부담으로 풀이할 수 있습니다. 이에 착안하면, 수능에 나올 만한 모든 소재를 미리 접해보면 될 거라 생각할 수 있습니다. 실제로 최상위권 학생의 경우 풀이하지 못하는 문제가 희박해지기 시작한다면, 출제될 만한 소재를 모두 사전지식으로 외워버리고[64)] 이를 이용해 비약적으로 빠른 풀이를 행하는 것이 가능합니다. 이런 학생들은 계산과 암산 실력도 뛰어나고, 수식의 작성 자체도 그다지 많지 않고, 작성한 수식조차 굉장히 간결하여 실수의 여지를 더더욱 최소화하기도 합니다.

그러나 일반적인 학생들의 상황에서는 문제 해결력 강화를 위해 문제도 풀어야 하고, 계산 실수 최소화를 위해 계산 연습도 해야 하기 때문에, 현실적으로 수능에 나올 만한 모든 소재를 빠짐없이 대비할 시간도 없고 그렇게 한다고 하더라도 성적에 좋은 영향을 주기가 어렵습니다. 그렇다면 가장 합리적인 선택은 무엇일까요?

바로 지금까지 공부해온 방식대로 매학년도의 내용을 누적하는 것입니다. 〈맑은기출 고대편〉은 다음과 같이 구성되어 있습니다.

① 교과서개념과 맑은개념에 근거하여 시험장에서 무조건 맞힐 수 있는 가장 합리적인 풀이를 모색한다. (맑은로직)

② 문제에서 주어진 사소한 단서들을 빠짐없이 분석하여 좀 더 정교한 풀이를 찾는다. (깊은로직)

③ 여러 방법의 풀이가 가능하다면, 각 풀이마다 발상과 사고과정의 명확한 근거를 들어 정당화하고, 풀이들의 장단점을 비교한다. (깊은로직)

④ 이 외에도 문제에서 주어진 상황을 통해 새롭게 생각할 만한 요소를 탐구한다. (깊은로직을 통한 이론의 확장)

⑤ 앞연도에서 분석한 내용을 뒷연도에서 맑은로직으로 삼는다. (깊은로직의 활용과 확장된 이론의 적용을 통한 기출의 흐름/변형/발전 파악)

〈맑은기출 고대편〉에서는 주어진 기출문제 그 자체를 '일단 풀어내는 것'을 넘어 '더 잘 풀어내는 것'에 대해 고민하면서, 앞연도 문제에서 다룬 소재를 통해 뒷연도 문제를 대비하는 방식을 취하고 있습니다. 21학년도까지 이를 누적하여 새로운 문제를 만나는 상황에 익숙해지고 배울 수 있는 내용들을 모두 익힌다면, 〈맑은기출 현대편〉에서 22학년도 이후의 최신 기출문제를 스스로 풀이할 수 있는 사고력을 기를 수 있을 것입니다.

63) '절댓값 미분가능성은 모든 수험생이 알 것 같다' 고 생각할 수도 있지만, 이는 굉장히 위험한 생각입니다. 이 시험 당시에도 절댓값 씌우면 그래프가 뒤집혀 올라가는 걸 모르는 학생은 없었지만, 그걸 미분가능성과 연결지어 생각한 경우는 적었습니다. 이는 콜럼버스의 달걀 같은 것입니다. 다 접해보고 시간이 흐르고 나니까 쉬운 거지, 처음 접했을 때 쉬운게 아니라는 겁니다.

64) 사실 외우려고 하지 않아도 너무 많이 접해서 자연스럽게 외워진 경우가 더 많습니다.

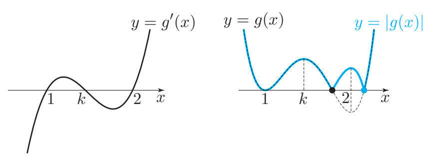
깊은로직 2 : 이걸 g 개형을 외워서 푼다고?

사차함수의 개형을 모두 외우고 문제의 조건에 맞는 사차함수를 끼워 맞추는 풀이가 있습니다. 그러나 이 풀이는 권하지 않습니다. 아무리 생각해도 풀리지 않을 때 어떻게든 답을 내기 위해 시도하는 것이라면 가능하겠지만, 개형암기 풀이가 이 문제 풀이법의 전부가 되어서는 안 됩니다.

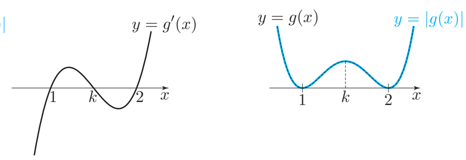
또한 킬러문제를 풀이하기 위해 쉬운 문제들의 풀이에서는 해본 적이 없던 부자연스러운 방법을 사용하면, 이 문제를 공부하는데도 큰 도움이 되지 않고, 앞으로 나올 새로운 킬러 문제를 풀이하는 힘을 기를 수도 없습니다.

깊은로직 3 : $k>1$인 나머지 경우도 알려주세요.

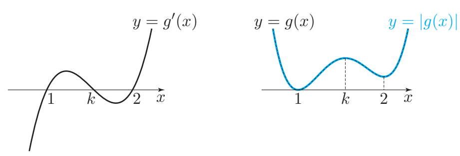
문제의 정답 상황을 찾았기 때문에 굳이 $k>1$인 모든 경우를 검증하지 않아도 됩니다. 이는 주관식 단답형의 특성상 문제 조건을 만족하는 다른 경우가 존재하더라도, 우리가 찾은 상황에서의 정답과 답이 같아야만 하기 때문입니다. 그러나 풀이의 완결을 위해서라면 아래와 같이 k의 범위에 따른 모든 경우를 살펴보아야 합니다. 다만 예상했던대로, 문제의 조건을 만족하는 다른 경우는 존재하지 않습니다.



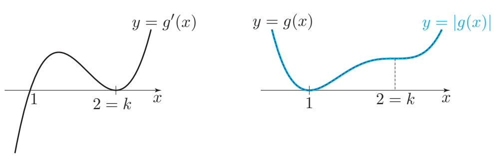
(a)



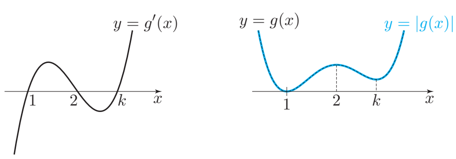
(b)



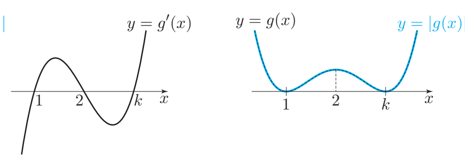
(c)



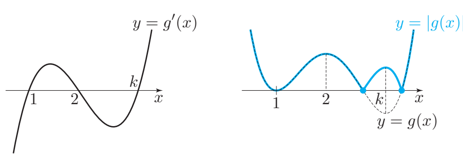
(d)



(e)



(f)



(g)

05 [2010학년도 9월 평가원 수리 가형 24번]

다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 항상 지나는 점들의 y좌표의 합을 구하시오.

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ f(2))$에서 직선 $y=2$에 접한다.
(다) $f'(0)=0$

맑은로직

(나) 조건에 의해 다항식 $f(x)-2$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖습니다. 이를 (가) 조건과 함께 이용하면 $f(x)$의 식을 나타낼 수 있습니다. $f(x)-2=(x-2)^2\left(x^2+ax+b\right)$라 하면 $f(x)=(x-2)^2(x^2+ax+b)+2$입니다.

(다) 조건을 이용하기 위해 미분하면 $f'(x)=2(x-2)(x^2+ax+b)+(x-2)^2(2x+a)$이고 $f'(0)=-4b+4a=0$이므로 $a=b$입니다. 따라서 $f(x)=(x-2)^2(x^2+ax+a)+2$입니다.

이제 다항식 $f(x)$가 a의 값에 관계없이 일정한 값을 갖는 x를 찾아야 합니다. $f(x)$의 식에서 (x^2+ax+a)는 $(x-2)^2$과 곱해졌으므로 $x=2$일 때 a의 값에 관계없이 $f(2)=2$입니다. 한편 $x^2+ax+a=(x+1)a+x^2$이므로 $x=-1$일 때도 a의 값에 관계없이 일정한 함숫값을 갖습니다. 즉 a의 값에 관계없이 $f(-1)=11$입니다.[66)]

66) 좀 더 자세히 설명하자면, $f(x)$를 다음과 같이 a에 관한 일차식으로 해석하는 것입니다.
$f(x)=\{g(x)\times a\}+h(x)$
이때 $g(t)=0$일 때는 임의의 실수 a에 대하여 $g(t)\times a=0$임을 이용하면, 이러한 t에 대해서는 a가 어떤 값을 갖던지 관계없이 $f(t)=h(t)$임을 알 수 있습니다. f의 식을 정리하여 g와 h를 구하면 각각 다음과 같습니다.
$g(x)=(x-2)^2(x+1)$
$h(x)=x^2(x-2)^2+2$
따라서 $x=2$일 때와 $x=-1$일 때 $f(x)=h(x)$이고 $f(2)=2,\ f(-1)=11$입니다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(2,\ 2)$, $(-1,\ 11)$을 항상 지나므로, 이 그래프가 항상 지나는 점들의 y좌표의 합은 $2+11=13$입니다.

정답 : 13

깊은로직 1 : 다항식 다루기는 아는만큼 보인다

깊은로직 1-1 : 아무것도 몰라도 풀 수는 있다

이 문제를 보자마자 (가) 조건에 의해 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 둔 후, (나) 조건에서 $f(2)=2,\ f'(2)=0$를 끌어내고, (다) 조건의 $f'(0)=0$을 이용하면 $f(x)$를 네 계수를 한 문자로 통일하여 표현할 수 있습니다. $f'(0)=c=0,\ f'(2)=32+12a+4b=0,$ $f(2)=16+8a+4b+d=2$에서 (계산 생략) $b=-3a-8,\ d=4a+18$이므로 $f(x)=a\left(x^3-3x^2+4\right)+x^4-8x^2+18$입니다. 이후의 풀이는 '일반적 풀이'와 같습니다. 이런 풀이를 구사할 경우 주어진 조건을 해석하지 않고도 계산만으로 풀이할 수 있으므로, 상황에 따라 시험장에서 더 유리할 수도 있습니다.

깊은로직 1-2 : 인수정리를 이용하면 미지수로 두는 계수의 개수가 줄어든다

'일반적 풀이'의 풀이와 같이 $(x-2)^2$을 인수로 가짐을 이용하면 미지수로 두는 계수의 개수가 4에서 2로 줄어들어 계산이 간결해집니다.

깊은로직 1-3 : 인수정리를 응용하면 우아한 계산이 가능하다

$f(x) = (x-2)^2(x^2+ax+b)+2$에서 $x^2+ax+b = (x-2)^2+p(x-2)+q$라 둘 수 있습니다.[67] 그러면 $f(x) = (x-2)^4+p(x-2)^3+q(x-2)^2+2$이고, $f'(0) = 4(-8)+3p(4)+2q(-2) = 0$이므로 $3p-8 = q$입니다. 이를 이용하여 $f(x)$를 정리하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^4+p(x-2)^3+(3p-8)(x-2)^2+2 \\ &= (x-2)^2\left\{(x-2)^2+p(x-2)+3p-8\right\}+2 \\ &= (x-2)^2\left\{(x+1)p+(x-2)^2-8\right\}+2 \end{aligned}$$

이제 '일반적 풀이'에서와 같은 논리로 $x=-1$, $x=2$일 때 p의 값에 관계없이 함숫값이 항상 일정함을 알 수 있습니다.

67) 실제로 p와 q를 구해보면 $q = 4+2a+b$, $p = 4+a$임을 알 수 있습니다.

깊은로직 2 : 미적분스럽게 도함수로 해석하기 (모범적 풀이)

앞서 다룬 세 가지 풀이는 모두 뭔가 이상한 부분이 있습니다. 분명히 출제 의도는 '다항함수의 미적분' 문제였을 텐데, 우리가 앞서 다룬 풀이에서 쓰이는 주된 개념은 미적분보다는 고등학교 1학년 수학의 '다항식'에 가깝기 때문입니다. '$x=2$에서 접한다'는 상황이 다항식에서 어떻게 반영되는지와, '미분법으로 사차함수의 도함수를 계산할 수 있는지' 외에는 미적분의 개념이 전혀 쓰이지 않고 있기 때문입니다.

비교적 미적분스럽게 풀어봅시다. 주어진 조건을 다음과 같이 해석할 수 있습니다.

$$f'(x) = 4x(x-2)(x-k), \qquad f(x) = 2+\int_2^x f'(t)\,dt$$

이때 $f'(x) = 4x^2(x-2)-4k\{x(x-2)\}$이므로 다음이 성립합니다.

$$f(x) = 2+\int_2^x 4t^2(t-2)\,dt - k\int_2^x 4t(t-2)\,dt$$

이때 $\int_2^x 4t^2(t-2)\,dt$는 k의 값과 무관하게 오직 x의 값에 따라 정적분의 값이 결정되지만, $k\int_2^x 4t(t-2)\,dt$는 $\int_2^x 4t(t-2)\,dt$에서 x의 값에 따라 정적분의 값이 결정된 후에 k가 곱해지므로 k의 값이 변함에 따라 f의 함숫값이 변하게 됩니다.

k의 값에 관계없이 항상 함숫값이 일정한 지점을 찾으려면, $\int_2^x 4t(t-2)\,dt = 0$이도록 하는 x를 찾으면 됩니다. 이는 $x=2$, $x=-1$임을 쉽게 알 수 있고,[68] $f(2)=2$, $f(-1) = 2+\int_2^{-1}(4t^3-8t^2)\,dt = \left[t^4-\frac{8}{3}t^3\right]_2^{-1} = 2+(1-16)-\frac{8}{3}(-1-8) = 11$이므로 $2+11=13$입니다.

이와 같이 도함수를 적극 활용했더니 계산이 훨씬 간결할 뿐만 아니라, 도함수의 정적분은 원함수의 함숫값 변화량이라는 의미를 잘 살렸으므로 수학적으로 의미가 깊습니다.

68) 삼차함수의 1 : 2 비율관계를 만드는 이차함수의 1 : 2 비율관계를 기억하고 계시겠지요? 삼차함수 비율관계는 기억하지만 이차함수의 비율관계를 기억하지 못하는 건, 단순히 암기만 하고 있을 뿐 본질적인 상황을 기억하지 못한다는 이야기입니다. 만약 그렇다면 〈맑은개념 수학 I & 수학 II〉의 Calculus 1.3)을 다시 공부하시기 바랍니다.

06 [2010학년도 수능 수리 가형 8번]

실수 a에 대하여 집합

$$\{x \mid ax^2 + 2(a-2)x - (a-2) = 0, x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim\limits_{a\to 0} f(a) = f(0)$

ㄴ. $\lim\limits_{a\to c+} f(a) \neq \lim\limits_{a\to c-} f(a)$인 실수 c는 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

맑은로직

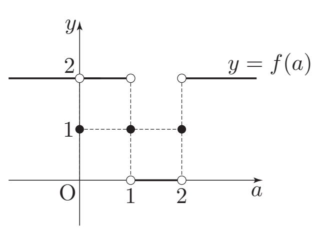
주어진 집합은 방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 실근을 원소로 갖습니다. 따라서 $f(a)$는 x에 대한 방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 서로 다른 실근의 개수입니다.

ㄱ. $a=0$이면 주어진 방정식은 $-4x+2=0$이 됩니다. 이 방정식은 일차방정식이므로 $f(0)=1$입니다.

$a\neq 0$이면 주어진 방정식은 이차방정식입니다. 따라서 이차방정식의 판별식 D의 부호를 이용하여 실근의 개수를 판단할 수 있습니다. $\frac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2a^2-6a+4=2(a-1)(a-2)$이므로 $a=0$ 근방에서 $D>0$입니다. 그러므로 $\lim\limits_{a\to 0} f(a)=2$입니다.

따라서 $\lim\limits_{a\to 0} f(a)\neq f(0)$입니다. (거짓)

ㄴ. $a\neq 0$일 때, $D>0$이면 $f(a)=2$이고 $D=0$이면 $f(a)=1$, $D<0$이면 $f(a)=0$입니다. 또한 $f(0)=1$이므로 함수 $y=f(a)$의 그래프를 그리면 다음과 같습니다.



따라서 $f(a)$의 좌극한과 우극한이 같지 않은 점은 2개입니다. (참)

ㄷ. 위 그림으로부터 함수 $f(a)$의 불연속점은 $a=0$, 1, 2로, 총 3개입니다. (참)

정답 : ④

12 [2011학년도 수능 수리 가형 24번]

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t| \text{가 } x=a \text{에서 } \underline{\text{미분가능하지 않다}}.\}$$

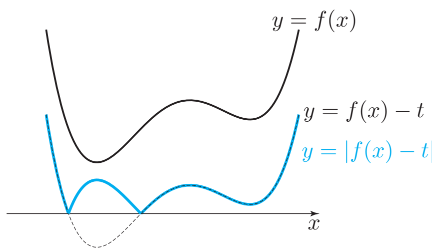
라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

맑은로직

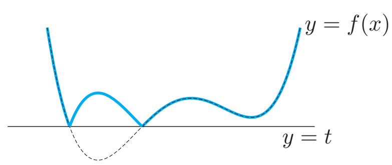
문제에는 $g(t)$의 불연속인 점이 $t=3$과 $t=19$뿐이라 주어져 있는데, $g(t)$는 S의 원소의 개수로 정의되어 있고, S의 원소의 개수는 $y=|f(x)-t|$에서 t의 값에 따라 오직 하나의 값으로 결정됩니다.71) 따라서 문제의 조건을 해석하기 위해서는 함수 $y=|f(x)-t|$를 먼저 분석해야 합니다.

71) 바로 그 유일한 값이 $g(t)$인 것입니다.

$y=|f(x)-t|$ 이해하기

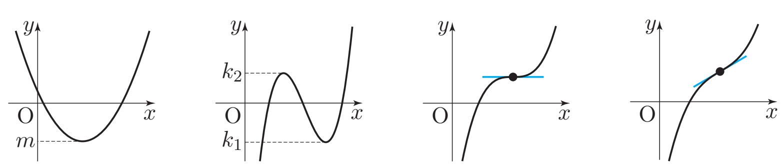


$y=|f(x)-t|$를 그리기 위해서는 $y=f(x)$를 y축 방향으로 $-t$만큼 평행이동한 후, x축 아래쪽의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시키면 됩니다.



$y=f(x)$는 그대로 두고 $y=t$를 그린 후, $y=t$를 마치 x축인 양 생각하고 $y=t$ 밑부분의 그래프를 $y=t$에 대하여 대칭이동시켜도 동일한 결과를 얻습니다.

$g(t)$ 분석하기



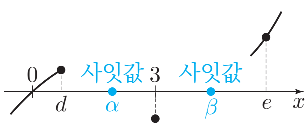
(a) (b) (c) (d)

f를 간단한 다항함수로 두었을 때의 g를 분석해보며 g의 특성을 파악해봅시다. (a)와 같이 f가 최솟값이 m인 이차함수이면 $g(t)$는 $t = m$에서만 불연속입니다. (b)와 같이 f가 극값 k_1, k_2를 갖는 삼차함수이면 $g(t)$는 $t = k_1$, $t = k_2$에서만 불연속입니다. (c)와 같이 f가 극값을 갖지 않고 변곡점에서의 미분계수가 0인 삼차함수이면 $g(t)$는 $t =$ (변곡점의 y좌표)에서만 불연속입니다. (d)와 같이 f가 극값을 갖지 않고 변곡점에서의 미분계수가 양수인 삼차함수이면 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속입니다.

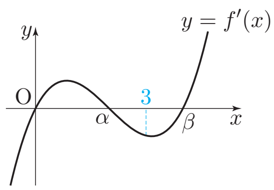
이상으로 얻은 정보에 의하면, $g(t)$는 $y = f(x)$에서 미분계수가 0인 점의 함숫값이 t일 때 불연속입니다. 또한 g가 불연속인 점 중에서 가장 작은 값은 f에서 극소점의 함숫값(극솟값)입니다.

조건 해석하여 f 찾기

$g(t)$가 $t = 3$, $t = 19$에서만 불연속이므로 다른 t에서는 연속이고, 3은 f의 극솟값입니다. 그런데 $f(0) = 3$이므로 함수 f는 $x = 0$에서 극솟값을 갖고, 미분가능한 함수가 극솟값을 가질 때 미분계수가 0이므로 $f'(0) = 0$입니다. 문제의 조건에 따르면 $f'(3) < 0$



(a)

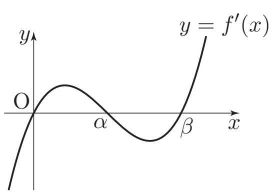


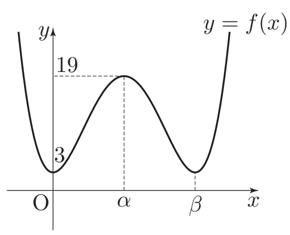
(b)

이고, 방금 $f'(0) = 0$임을 얻었으므로 이를 $y = f'(x)$에 표시하면 (a)와 같습니다.

이때 $x = 0$에서 f'의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀌므로 0보다 큰 어떤 실수 d에 대하여 $f'(d) > 0$인데, $f'(3) < 0$이므로 사잇값 정리에 의해 구간 $(d, 3)$에 $f'(\alpha) = 0$인 실수 α가 적어도 하나 존재합니다. 한편 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$이므로 충분히 큰 실수 e에 대하여 $f'(e) > 0$인데, $f'(3) < 0$이므로 사잇값 정리에 구간 $(3, e)$에 $f'(\beta) = 0$인 실수 β가 적어도 하나 존재합니다.

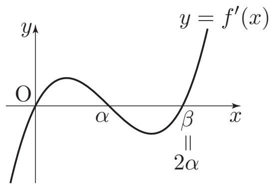
따라서 $f'(0) = f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$이므로 (b)와 같이 $y = f'(x) = 4x(x-\alpha)(x-\beta)$이고 $0 < \alpha < 3 < \beta$가 성립합니다.

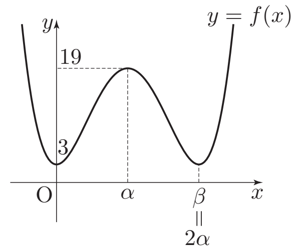




이때 f'의 정적분값만큼 f의 함숫값이 변화합니다. $\int_0^{\alpha} f'(x)\,dx = f(\alpha) - f(0) > 0$이므로 $f(\alpha) > f(0) = 3$이 성립합니다. $f(\alpha) \neq 19$이면 g의 불연속점이 $t = 3$과 $t = 19$뿐이라는 조건을 만족시키지 않으므로 $f(\alpha) = 19$임을 알 수 있습니다. 마찬가지로

$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx < 0$이므로 $f(\beta) < f(\alpha)$가 됩니다. g의 불연속점이 $t=3$과 $t=19$뿐이라는 조건을 만족시키기 위해서는 $f(\beta) = f(0) = 3$여야 함을 알 수 있습니다.





그러면 그림과 같이 $\int_{0}^{\beta} f'(x)\,dx = 0$이므로 $\beta = 2\alpha$이고, $f(x) = x^2(x-2\alpha)^2 + 3$에서 $f(\alpha) = \alpha^4 + 3 = 19$에서 $\alpha = \pm 2$이므로 $\alpha = 2$입니다. 따라서 $f(x) = x^2(x-4)^2 + 3$이고, $f(-2) = (-2)^2(-6)^2 + 3 = 147$입니다.

정답 : 147

여담 1 : 개형추론 풀이(라는 이름의 개형 끼워맞추기)가 권장되지 않는 이유

$y=3$과 $y=19$를 그려놓고 '이 직선 위에만 $f'=0$인 점이 있어야 한다'고 한 뒤, 외워둔 사차함수의 개형을 끼워맞추어 푸는 풀이가 널리 알려져 있습니다. 그럼 사차함수 개형은 누군가 미리 외워두라고 했으니 외워뒀고, 몇가지 그려보니 조건을 만족하는 사차함수를 찾았고 답이 나옵니다. 킬러를 이렇게 쉽게 풀다니! 역시 사차함수 그래프는 외워둬야 딱이고, 이 문제에 대한 모든 분석을 한 것일까요?

전혀 아닙니다. 이런 끼워맞추기 풀이는 극소수의 문제만 해결할 수 있습니다. 미분의 목적이 도함수의 부호 변화를 통해 원함수의 그래프를 파악하는 것이었다는 점을 고려하면, 모범적 풀이에서와 같이 $f'(0) = 0$, $f'(x)$의 $x=0$ 근방에서의 부호 변화 양상,[72] $f'(3) < 0$, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$를 이용하여 사잇값 정리로 $f'(x)$의 실근의 개수와 세 실근의 대소관계를 파악하여 명쾌하게 풀이가 가능합니다.

만약 정확한 풀이를 구사하지 못하는 상태에서 개형으로만 문제를 풀었다면, 반드시 정확한 풀이를 익히시기 바랍니다.

72) 이는 $x=0$에서 극소이므로 $f''(0) > 0$임을 이용하는 것과 같습니다.

여담 2 : 111124를 기출문제의 합으로 보는 관점

[2010학년도 6월 평가원 수리 가형 24번]

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

[2010학년도 수능 수리 가형 8번]

실수 a에 대하여 집합

$$\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $\lim\limits_{a \to 0} f(a) = f(0)$
ㄴ. $\lim\limits_{a \to c+} f(a) \neq \lim\limits_{a \to c-} f(a)$인 실수 c는 2개이다.
ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2011수능 가형 24번은 위 두 문제를 절묘하게 융합한 문제임을 알 수 있습니다. $|f(x)-f(1)|$에서 $f(1)$을 t로 고치고, t에 따라 미분가능하지 않은 점의 개수가 바뀌도록 하여 집합의 원소의 개수를 t에 대한 함수로 설정한 것이죠. 재료로 쓰인 두 문항도 꽤나 까다로웠던 문제였는데, 둘을 하나로 만들었으니 합쳐진 문제가 어려운 것은 어찌보면 당연한 결과였습니다.

이렇게 킬러문항은 과거의 기출문제들이 하나로 합쳐진 형태로 출제되는 경우가 많습니다. 그래서 앞으로도 '기출문제의 합으로 보는 관점'이라는 여담을 종종 만날 수 있을 것입니다.

02 [2012학년도 수능 수리 가형 19번]

실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은?

① -3 ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $\dfrac{15}{4}$ ⑤ 6

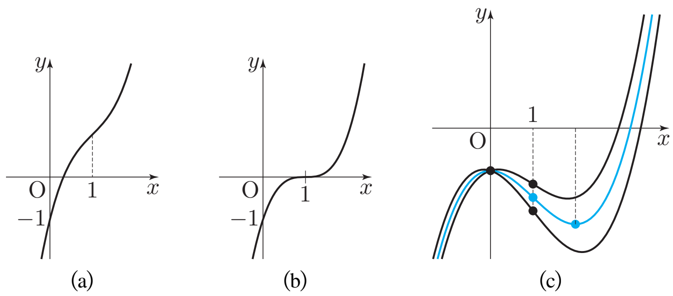
맑은로직

점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선을 l이라 할 때, l의 방정식은 $y=mx+2$입니다. l과 곡선 $y=x^3-3x^2+1$의 교점의 개수가 $f(m)$이므로, 방정식 $mx+2=x^3-3x^2+1$의 서로 다른 실근의 개수가 곧 $f(m)$입니다.

좌변의 $mx+2$를 이항하면 $x^3-3x^2+1-(mx+2)=0$이므로 $x^3-3x^2-mx-1=0$을 풀이해야 합니다.

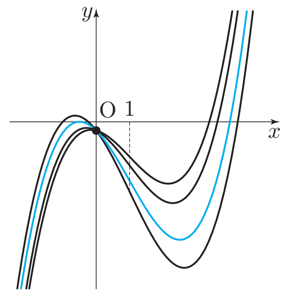
풀이 1 : 주어진 다항함수로 풀이하기

좌변의 삼차식을 $g(x)$라 두면 $g(x)=0$이라는 방정식의 서로 다른 실근의 개수에 대한 문제가 됩니다. 이때 g의 y절편이 -1로 항상 일정하기는 하지만, g의 함수식에서 미지수 m이 일차항의 계수이므로, g의 그래프를 그리기 위해서 g를 미분할 필요성이 있습니다.



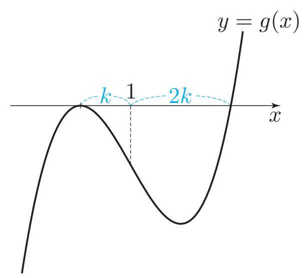
g를 미분하면 $g'(x)=3x^2-6x-m=0$입니다. 이 이차함수는 m의 값에 관계없이 $x=1$에 대하여 대칭이지만,[82] 부호 변화 양상은 판별식의 부호에 따라 다릅니다. (a)와 같이 $D<0$이면 항상 $g'>0$이므로 g는 증가함수이고, 그러면 $f(m)=1$입니다. (b)와 같이 $D=0$이면 항상 $g'\geq 0$이므로 g는 증가함수이고, 그러면 $f(m)=1$입니다. (c)와 같이 $D>0$이면 g가 극댓값과 극솟값을 가지므로, g'의 부호 변화를 살펴볼 필요가 있습니다.

82) 즉 $x=1$에서 g가 변곡하지만



$D>0$이므로 $\frac{D}{4}=9+3m>0$에서 $m>-3$입니다. m이 증가함에 따라 $g(1)=-3-m$은 감소하므로 $f(m)$은 한동안 1입니다. 그러다가 g의 극댓값이 0이 되는 순간 $f(m)=2$이고, 극댓값이 0보다 커지게 되면 $f(m)=3$입니다. 따라서 g의 극댓값이 0이 되는 순간이 우리가 원하는 상황입니다.

$g'(x)=0$에서 $x=\frac{3\pm\sqrt{9+3m}}{3}$입니다. 이때 $g'(x)$는 $x=\frac{3-\sqrt{9+3m}}{3}$에서 극대이므로 $g\left(\frac{3-\sqrt{9+3m}}{3}\right)=0$이 되는 m의 값을 구해야 합니다.



식이 다루기 불편하므로 $\frac{\sqrt{9+3m}}{3}=k$라 하면 $y=g(x)$의 그래프는 위 그림과 같습니다. 따라서 $g(x)=\{x-(1-k)\}^2\{x-(1+2k)\}$라 할 수 있습니다.

$g(1)=-2k^3=-3-m$이고 $k=\frac{\sqrt{9+3m}}{3}$이므로 두 식을 연립하면 $m=\frac{15}{4}$를 얻습니다.

풀이 2 : x로 나누기

$x^3-3x^2-mx-1=0$에서 $x=0$을 대입하면 $-1=0$이므로 거짓입니다. 이는 $x=0$이 해가 아님을 의미합니다. 따라서 양변을 x로 나누어 풀이하겠습니다.[83)]

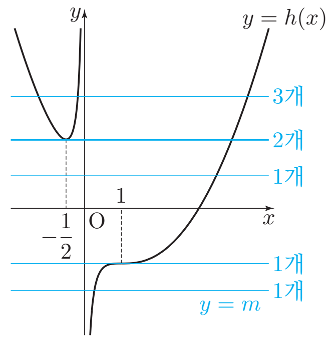
0이 아닌 실수 x에 대한 방정식 $x^2-3x-m-\frac{1}{x}=0$을 풀이하는 것은 $x^2-3x-\frac{1}{x}=m$을 풀이하는 것과 같습니다. 이를 풀기 위해 좌변을 $h(x)$라 두면 방정식 $h(x)=m$의 서로 다른 실근의 개수를 구하는 문제가 됩니다. h'을 구하면 다음과 같습니다.

$$h'(x)=2x-3+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2}$$

따라서 h'의 부호는 $x=-\frac{1}{2}$에서만 $-$에서 $+$로 바뀜을 알 수 있습니다.

83) 2012수능 가형 18번 깊은로직에서 같은 논리가 쓰였습니다.

한편 $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0-} h(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0+} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$이므로 $h(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같습니다.



따라서 $h(x) = m$의 서로 다른 실근의 개수는 $m < h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}$일 때 1이고, $m = \frac{15}{4}$일 때 2이고, $m > \frac{15}{4}$일 때 3입니다. 따라서 a의 최댓값은 $\frac{15}{4}$입니다.

깊은로직 1 : 풀이 2에서 x로 나누는 아이디어는 어떻게 떠올리나요?

x가 0이 아니므로 x로 나눌 수 있다는 것까지는 동의하더라도, 이런 생소한 아이디어를 어떻게 떠올릴 수 있는지 의아할 수 있습니다. 이를 여러가지로 정당화해봅시다.

정당화 1 : 지금까지 풀던 문제처럼, 상수함수 $y = m$이 되면 좋겠다.

우리가 지금까지 만났던 문제들에서는 '상수 m이 바뀌어가며 $y = m$과 $y = f(x)$의 교점의 개수'가 바뀌는 문제였습니다. 그런데 우리가 지금 풀이하는 문제의 상황에서는 m이 1차항의 계수여서 불편합니다.[84] 따라서 우리에게 익숙한 문제로 바꾸기 위해서는 m을 상수로 만들 필요가 있고, 그래서 m을 일차항으로부터 분리시키기 위하여 x로 나누는 것입니다.[85]

84) 이러한 불편함은 풀이 1에서 단적으로 드러납니다. 풀이 1의 과정은 자연스럽지만, 풀이는 꽤나 불편합니다.

85) 물론 x로 나누기 위해서는 $x \neq 0$이라는 점이 보장되어야 합니다.

정당화 2 : x로 묶어서 해석한다.

양변을 x로 나누지 않고, 대신 양변에서 각각 x를 묶어 다음과 같이 생각하는 것입니다.

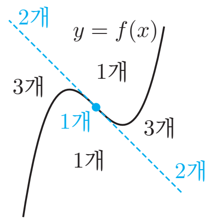
$$x^3 - 3x^2 - mx - 1 = x\left(x^2 - 3x - m - \frac{1}{x}\right) = 0$$

묶는 과정에서 $1 = x \cdot \frac{1}{x}$이 쓰이므로 $x \neq 0$이 자연스럽게 주어진다고 생각할 수도 있고, 묶기 전 $x = 0$을 대입했을 때 등식이 성립하지 않으므로 $x \neq 0$이 전제된 상태라고 생각할 수도 있습니다.

정당화 3 : 기출에서 겪어본 상황이다.

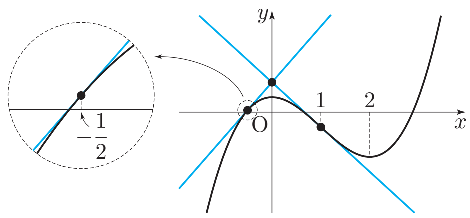
2006학년도 6월 가형 10번에서 주어진 함수식 $x(x^2 - a^2)$에서 착안하여, 방정식의 양변을 x로 나누어 풀이했던 경험이 있습니다. 이는 이미 기출에서 얻은 깊은로직이므로, 이 문제에서도 적용할 수 있습니다.

깊은로직 2 : 접할선과 볼록성을 이용하여 풀이하기



atom.ac의 맑은개념 페이지에서 부교재로 제공하고 있는 '접할선과 볼록성'에서, 위 그림과 같이 어떤 영역 위의 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수를 살펴보았습니다. 이를 이용하여 이 문제를 풀이해봅시다.[86)]

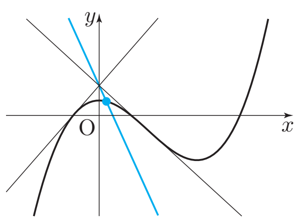
86) 아래부터 나올 그래프는 그림의 비율을 맞추기 위하여 y의 절댓값이 원래 비율보다 더 작게 표현되고 있음을 감안하시기 바랍니다.



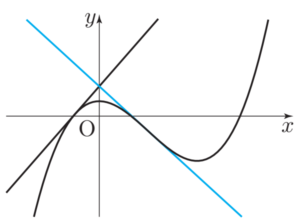
우선 $(0,\ 2)$를 지나는 접선을 구해봅시다. 우리가 찾으려는 접선은 y절편이 2인 접선이므로, $p(x) = x^3 - 3x^2 + 1$이라 할 때 $p(t) - tp'(t) = 2$를 풀이하면 됩니다.[87)] 계산하면 $-(t-1)^2\left(t+\dfrac{1}{2}\right) = 0$이므로 $t = 1$에서의 접선과 $t = -\dfrac{1}{2}$에서의 접선이 $(0,\ 2)$를 지납니다.[88)] 이때 $(1,\ -1)$은 삼차함수의 변곡점이고, $p'(1) = -3$, $p'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{15}{4}$입니다.

87) 접선의 y절편 기억나시죠? 이쯤 되면 외워둘 때도 되었습니다.

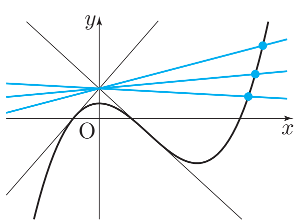
88) 여기서 $t = 1$이 중근이 무엇을 의미하는지는 깊은로직 3에서 다룹니다.



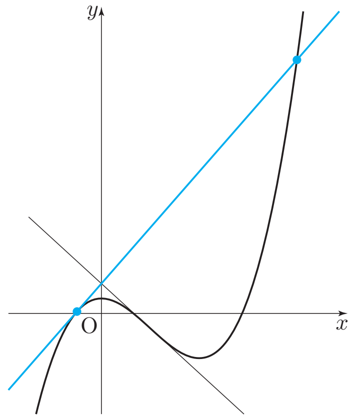
그림과 같이 $m < -3$이면 $f(m) = 1$입니다.



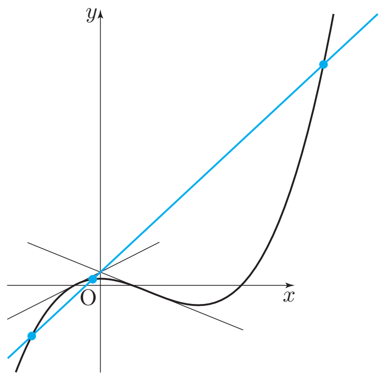
그림과 같이 $m = -3$이면 $f(m) = 1$입니다.



그림과 같이 $-3 < m < \dfrac{15}{4}$이면 m의 부호와 관계없이 $f(m) = 1$입니다.



그림과 같이 $m = \dfrac{15}{4}$이면 $f(m) = 2$입니다.



그림과 같이 $m > \dfrac{15}{4}$이면 $f(m) = 3$입니다.

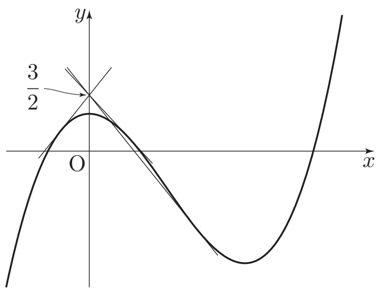
정리하면 $f(m) = \begin{cases} 1 & \left(m < \dfrac{15}{4}\right) \\ 2 & \left(m = \dfrac{15}{4}\right) \\ 3 & \left(m > \dfrac{15}{4}\right) \end{cases}$ 입니다. 따라서 a의 최댓값은 $\dfrac{15}{4}$ 입니다.

접할 때 교점 개수 바뀐다고? 무슨 근거로?

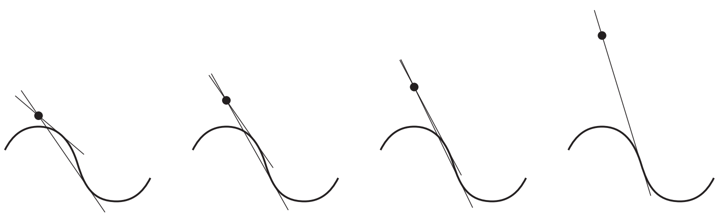
이 문제가 출제된 당시, 많은 학생들이 변곡점에서의 미분계수를 오답으로 골랐습니다. 이는 문제를 풀이하다가 변곡점에서의 접선을 만나자 당연히 변곡점이라는 특수한 상황에서 접할 때가 정답이다라고 찍은 셈인 거죠. 변곡점이 특수한 상황은 맞지만, 특수하기 때문에 접선의 개수가 바뀌지 않습니다. 아무리 특수한 상황을 마주쳤더라도, 꼭 정답 상황이 맞는지를 검증하는 과정을 거치기 바랍니다.

깊은로직 3 : 그림과 식의 연결 ($t=1$ 중근은 기하학적으로 무슨 의미일까?)

깊은로직 2에서 $p(t)-tp'(t)=2$를 만족하는 t를 구하면 $t=1,\ t=-\dfrac{1}{2}$이었습니다. 그런데 $t=1$는 중근이고 $t=-\dfrac{1}{2}$는 한 근이므로 분명히 어떤 차이가 있을 것입니다. 실제로 맑은로직과 깊은로직에서 여러 방면으로 살펴보면서 확인했듯이, $t=1$인 상황($m=-3$)에서는 $f(m)$이 바뀌지 않았고, $t=-\dfrac{1}{2}$인 상황$\left(m=\dfrac{15}{4}\right)$에서 $f(m)$이 바뀌었죠. 무슨 차이가 있는 것일까요?



이를 알아보기 위해서 $p(t)-tp'(t)=\dfrac{3}{2}$을 생각해봅시다. 이 삼차방정식은 서로 다른 세 실근을 갖습니다. 이는 그림과 같이 y절편이 $\dfrac{3}{2}$인 서로 다른 접선이 세 개 존재함을 의미합니다.



그런데 문제의 상황에서는 $t=1$이 중근입니다. 이는 그림과 같이 두 접점의 x좌표가 가까워지다가, 변곡점에 이르러서 두 접점의 x좌표가 같아지게 되는 것이라 생각할 수 있습니다. 이때 서로 다른 두 접선이 겹쳐지면서 서로 같은 두 접선이 되는 것입니다.

또한 그 공통접점이 곡선의 변곡점이 됩니다. 이는 왼쪽의 접선은 '위로 볼록한 구간에서의 접선'이고, 오른쪽의 접선은 '아래로 볼록한 구간에서의 접선'이었는데, 두 접선이 겹쳐지면서 '위로 볼록한 구간에서의 접선인 동시에 아래로 볼록한 구간에서의 접선'의 역할을 하게 되기 때문입니다. 이러한 점은 오직 변곡점뿐입니다.

11 [2013학년도 수능 수리 나형 28번]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고,

$$\int_0^{2013} f(x)dx = \int_3^{2013} f(x)dx$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $30S$의 값을 구하시오.

맑은로직

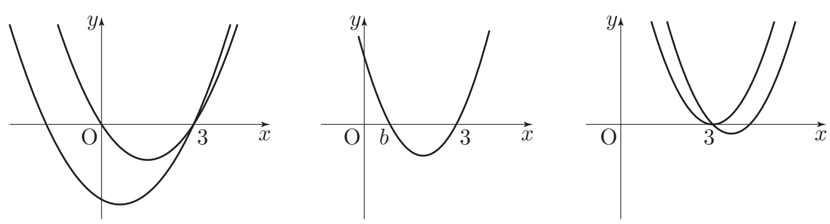
좌변에서 정적분의 성질에 의해 $\int_0^{2013} f(x)\,dx = \int_0^{3} f(x)\,dx + \int_3^{2013} f(x)\,dx$ 입니다. 이 값이 우변과 같으므로 $\int_0^{3} f(x)\,dx = 0$을 얻습니다.

문제의 조건에서 $f(3)=0$이므로 $f(x)=(x-3)(x-a)$라 둘 수 있습니다. $\int_0^{3} f(x)\,dx = 0$임을 이용하여 계산하면 (계산 생략) $a=1$을 얻고, $S=\frac{1}{6}\times 2^3=\frac{4}{3}$입니다. 따라서 $30S=40$입니다.

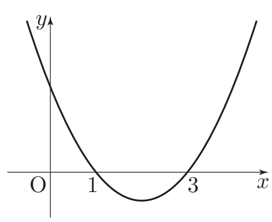
정답 : 40

깊은로직 : 진짜 출제 의도는 무엇일까

단순히 계산문제라고 치부할 수 있는 문제이지만, 한번 더 탐구해봅시다. a의 값에 따라 f가 문제의 조건을 만족시킬 수 있는지를 살펴보는 것입니다.



$a<0$, $a=0$이면 닫힌구간 $[0,\,3]$에서 항상 $f(x)\le 0$이므로 문제의 조건을 만족시킬 수 없고, $0<a<3$이면 $f\ge 0$인 구간 $[0,\,b]$와 $f\le 0$인 구간 $[b,\,3]$이 생기므로 $\int_0^{b} f(x)\,dx = S$, $\int_b^{3} f(x)\,dx = -S$가 되면 문제의 조건을 만족시킬 수 있습니다. $a=3$, $a>3$이면 $[0,\,3]$에서 항상 $f(x)\ge 0$이므로 문제의 조건을 만족시킬 수 없습니다. 따라서 오직 $0<a<3$일 때만 문제의 조건을 만족시킬 수 있습니다.



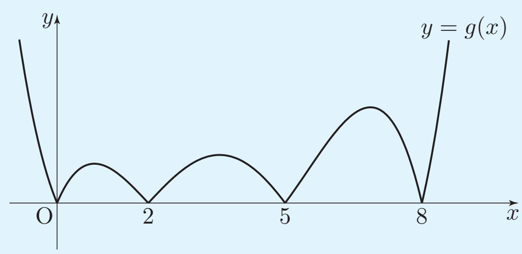
이때 a가 어떤 값이어야 $\int_0^3 f(x)\,dx = 0$일까요? 우리가 〈맑은개념 수학 I & 수학 II〉에서 배운 내용에 따르면 $a = 1$입니다. 즉 이 문제는 겉으로 단순 계산문제인 척하고 있지만, 사실은 이차함수의 성질을 알려주는 문제였던 셈입니다.

12 [2013학년도 수능 수리 가형 19번]

삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)dt\right|$$

라 할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0)<0$

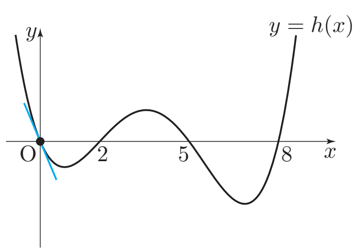
ㄷ. $\displaystyle\int_m^{m+2} f(x)dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

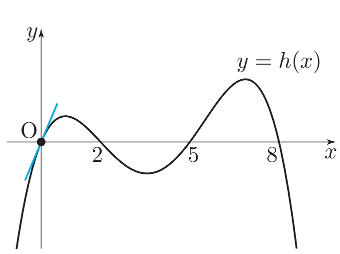
① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

맑은로직

$h(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$라 하면 $h'(x)=f(x)$입니다. $h(x)$는 사차함수이고 $h(0)=h(2)=h(5)=h(8)=0$이므로 $h(x)=kx(x-2)(x-5)(x-8)$라 둘 수 있습니다.

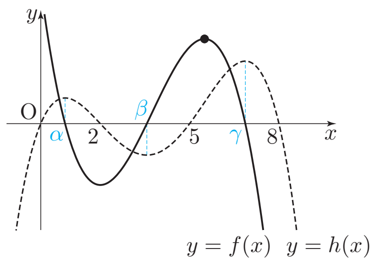




그림과 같이 $k>0$이면 $h'(0)<0$이고 $k<0$이면 $h'(0)>0$입니다. 이때 문제의 조건인 $f(0)>0$을 이용하기 위해 $h'(x)=f(x)$에 $x=0$을 대입하면 $h'(0)=f(0)>0$임을 알 수 있습니다. 따라서 $k<0$입니다.

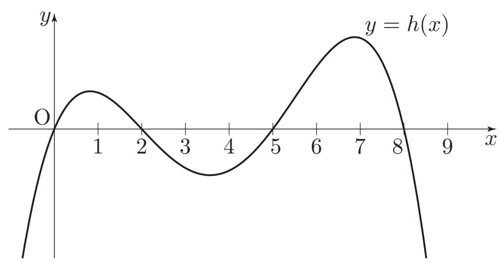
ㄱ. $f(x)=h'(x)$이고 $h'(x)=0$인 서로 다른 x의 개수는 3입니다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3입니다. (참)

ㄴ. $h(x)$의 극점의 x좌표를 각각 α, β, γ라 하면 $0 < \alpha < 2 < \beta < 5 < \gamma < 8$이고, $f'(x) = 4k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$입니다.



$y = f(x)$의 그래프는 그림과 같습니다. 따라서 $f'(0) < 0$입니다. (참)

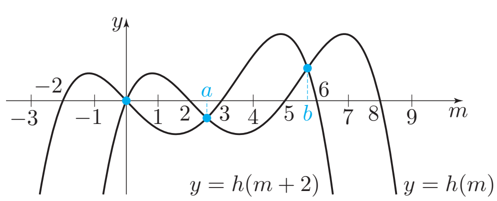
ㄷ. $\displaystyle\int_m^{m+2} f(x)dx = h(m+2) - h(m)$입니다. 따라서 $h(m+2) > h(m)$인 자연수 m을 찾아야 하므로, $y = h(x)$의 그래프를 관찰해봅시다.



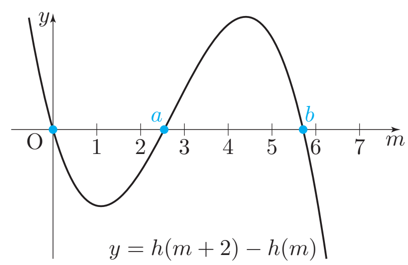
$m = 1$이면 $h(3) < h(1)$이므로 조건을 만족시키지 않습니다. $m = 2$이면 $h(4) < h(2)$이므로 조건을 만족시키지 않습니다. $m = 3$이면 $h(5) > h(3)$이므로 조건에 부합합니다. $m = 4$이면 $h(6) > h(4)$이므로 조건에 부합합니다. $m = 5$이면 $h(7) > h(5)$이므로 조건에 부합합니다. $m \geq 6$이면 $h(m+2) < h(m)$이므로 조건을 만족시키지 않습니다. 따라서 $\displaystyle\int_m^{m+2} f(x)\,dx > 0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3개입니다. (참)

정답 : ⑤

깊은로직 : $h(m+2) - h(m)$의 그래프로 해석하기



ㄷ을 풀 때 $h(m+2) - h(m)$의 그래프를 그려서 풀이할 수도 있습니다. my평면에 두 함수 $y = h(m+2)$, $y = h(m)$의 그래프를 그리면 위 그림과 같습니다. 이를 이용하여 $h(m+2) - h(m)$의 그래프를 그리는 것입니다. 이때 두 그래프의 교점의 x좌표가 0, a, b (단, $2 < a < 3$, $5 < b < 6$)임을 알 수 있습니다.



91) 이때 두 사차함수 $h(m+2)$와 $h(m)$의 최고차항의 계수가 같으므로, 두 함수를 빼면 사차항은 지워지고 삼차 이하의 다항함수가 됩니다. 그래프를 보면 삼차함수임을 쉽게 알 수 있습니다.

이를 이용하여 그래프를 그리면 위 그림과 같습니다.91) 따라서 조건을 만족시키는 자연수 m이 $3,\ 4,\ 5$임을 맑은로직보다 빠르게 확인할 수 있습니다.

14 [2016학년도 수능 수학 B형 30번]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)

(나) 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\, dt\text{이다.}$$

$\int_0^6 f(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

맑은로직

(가) 조건에서 얻을 정보가 마땅치 않으므로 (나)를 먼저 해석해보겠습니다. 우선 양변에 0을 대입하면 $f(0) = 0 \cdots$①을 얻습니다. 한편 모든 실수 x에 대하여 좌변의 $f(x)$가 정의되려면 우변의 $\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}dt$가 모든 실수 x에 대하여 정의되어야 하고, 그러려면 모든 실수 t에 대하여 $\sqrt{4-2f(t)}$가 정의되어야 합니다. 이는 모든 실수 t에 대하여 $4-2f(t) \ge 0$가 성립함을, 즉 $f(t) \le 2 \cdots$②임을 의미합니다.

(나) 조건에 우변은 정적분으로 정의된 함수이므로 미분가능하고, 우변이 미분가능하므로 좌변 $f(x)$도 미분가능합니다.[97] 미분하면 $f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$입니다. 이때 우변의 치역이 0 이상의 모든 실수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0 \cdots$③입니다. 따라서 f는 단조증가함수입니다.

97) 문제의 조건만으로는 f가 연속인 것만 알 수 있을 뿐이고, 미분가능성은 알 수 없습니다.

이제 조건을 이용하여 함수식을 구해봅시다. (가)와 (나)를 엮으면 $x < b$에서[98] $2a(x-b) = \sqrt{4-2a(x-b)^2-2c}$입니다. 이때 좌변은 일차식이므로 우변이 일차식이 되기 위해서는 근호 안이 완전제곱꼴이어야 합니다. 따라서 $c = 2$입니다. 그러면 $2a(x-b) = \sqrt{-2a(x-b)^2}$이고, 양변을 제곱하면 $4a^2 = -2a$에서 $a = -\frac{1}{2}$을 얻습니다. 따라서 $x < b$일 때 $f(x) = -\frac{1}{2}(x-b)^2 + 2$입니다.

98) 등호가 빠진 것은 미분했기 때문입니다. 빠진 등호를 다시 채우는 것은 나중에 다른 방법으로 해결할 수 있습니다.

이때 ①과 ③을 이용하면 $0 = f(0) < f(b) = 2$이므로 $0 < b$이고, 이에 따라 주어진 함수식에 $x = 0$을 대입하면 $b = 2$를 얻습니다. 따라서 $x < 2$일 때 $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$입니다.

한편 f는 연속이므로 $\lim_{x \to 2-} f(x) = f(2)$입니다. 따라서 $f(2) = 2$입니다. 또한 ②에서 $f \le 2$이라 하였고, ③에서 f가 단조증가함수라 하였는데, $f(b) = 2$이므로 $x \ge b$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = 2$입니다.

지금까지 구한 내용에 의하면 f의 함수식은 다음과 같습니다.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 & (x \le 2) \\ 2 & (x > 2) \end{cases}$$

이에 따라 $\int_0^6 f(x)\,dx$를 계산하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x)dx &= \int_0^2 \left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2\right\} dx + \int_2^6 2dx \\ &= \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

따라서 $p + q = 35$입니다.

정답 : 35

여담 : 함수의 정의역과 치역을 적극적으로 물어본 문제

무리함수의 정의역과 치역이 음이 아닌 실수임을 이용하여 f와 f'의 치역을 알아내는 것이 핵심이었습니다. 그런데 (가) 조건에 주어진 함수식에만 몰두하면 이렇게 해석하기가 쉽지 않았을 것입니다. 수식으로 접근하기 전에, 문제풀이의 큰 그림을 먼저 그려놓고 접근방법을 결정하는 신중한 자세가 필요합니다.

깊은로직 1 : 밑줄처럼 완전제곱꼴 아이디어가 없으면 a, c를 못 구할까요?

그렇지는 않습니다. 이 식의 양변을 제곱하면 $4a^2(x^2-2bx+b^2) = 4-2a(x-b)^2-2c$입니다. 이 식은 항등식이므로 계수비교법에 의해 다음이 성립합니다.

$$4a^2 = -2a,\ -8a^2b = 4ab,\ 4a^2b^2 = 4-2ab^2-2c$$

정리하면 $a = -\frac{1}{2}$, $c = 2$를 얻습니다. 따라서 루트가 벗겨지려면 완전제곱꼴이어야 한다는 생각이 떠오르지 않았더라도 a와 c의 값을 구할 수 있습니다.

05 [2019학년도 9월 평가원 수학 나형 30번]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

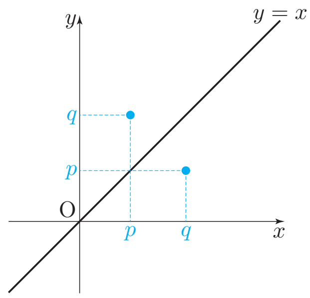
의 모든 실근이 $0,\ 1,\ a,\ 2,\ b$이다.

$$f'(1) < 0, \quad f'(2) < 0, \quad f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$)

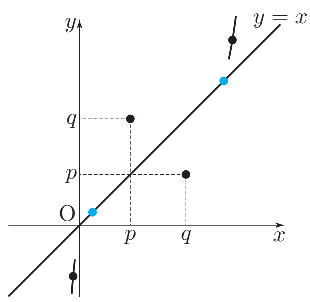
맑은로직

방정식 $f(f(x)) = x$의 실근 중 가장 간단한 경우는 $f(x) = x$인 x입니다. 그런데 $f(x) = x$는 삼차방정식이므로 최소 1개, 최대 3개의 실근을 갖습니다. 그러면 방정식 $f(f(x)) = x$의 서로 다른 실근의 개수가 5이므로 이 방정식의 실근 중 $f(x) \neq x$인 것은 최소한 2개 있음을 알 수 있습니다.

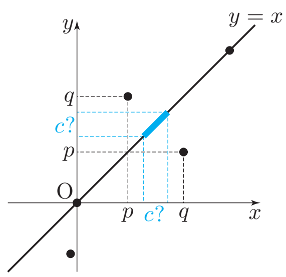


방정식 $f(f(x)) = x$의 실근 중 $f(x) \neq x$인 것을 $x = p$라 하고, $f(p) = q$라 하면, $p \neq q$입니다. 이때 $f(f(p)) = f(q) = p$가 성립하는데, $f(q) = p$를 이용하기 위해 주어진 방정식에 $x = q$를 대입해보면 $f(f(q)) = f(p) = q$가 성립합니다. 따라서 $x = q$ 또한 방정식 $f(f(x)) = x$의 실근이고, 두 점 $(p,\ q)$와 $(q,\ p)$는 서로 $y = x$에 대하여 대칭입니다.[105)]

105) 그림에서는 $p < q$인 경우로 표현되어 있지만, $p < q$인 경우는 어차피 p와 q의 입장만 서로 바뀌었을 뿐 결과적으로 동일한 상황이 됩니다.

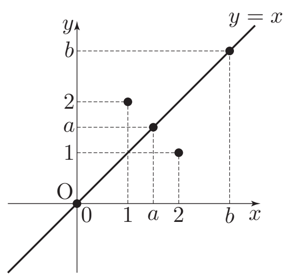


또한 그림과 같이 $\lim\limits_{x \to \infty} \{f(x) - x\} = \infty,\ \lim\limits_{x \to -\infty} \{f(x) - x\} = -\infty$이므로 사잇값 정리에 의해 두 구간 $(-\infty,\ p),\ (q,\ \infty)$에 각각 $f(x) - x = 0$인 x가 적어도 하나 존재합니다. 이는 $y = f(x)$와 $y = x$의 교점이 적어도 하나 존재함을 의미합니다.



한편 좌표평면에서 두 점 $(p,\ q)$, $(q,\ p)$를 보면 $y=f(x)$와 $y=x$가 열린구간 $(p,\ q)$에서 교점을 적어도 하나 가질 것을 예상할 수 있습니다.[106] 이 교점의 x 좌표를 c라 하면 $(c,\ c)$가 $y=x$ 위의 점이므로, 이 또한 방정식 $f(f(x))=x$의 근이 됩니다.

이제 지금까지 알아낸 정보를 문제의 상황과 엮어봅시다. $f(f(x))=x$인 x의 개수는 5이고, $f(f(x))=x$의 근은 $f(x)=x$인 근과 $f(x)\neq x$인 근으로 나뉩니다. 이때 후자인 $f(x)\neq x$인 x는 쌍으로 존재합니다. $f(x)\neq x$인 x를 각각 $x=p$, $x=q$라 하면, $y=f(x)$는 두 점 $(p,\ q)$와 $(q,\ p)$를 지납니다.



한편 다섯 개의 근의 대소관계를 살펴보면, p보다 작은 근 하나, p와 q 사이의 근 하나, q보다 큰 근 하나는 모두 $f(x)=x$인 근이 됩니다. 문제에서 $0<1<a<2<b$이므로 $p=1$, $q=2$이고, $y=f(x)$는 $(1,\ 2)$와 $(2,\ 1)$을 지나며, $f(0)=0$, $f(a)=a$, $f(b)=b$입니다.[107]

이제 식을 작성해 답을 구해봅시다. $f(0)=0$이므로 $f(x)=kx^3+lx^2+mx$라 할 수 있습니다. $f(1)=2$, $f(2)=1$이므로 $k+l+m=2$이고 $8k+4l+2m=1$입니다. 또한 $f'(0)-f'(1)=-3k-2l=6$입니다. 세 식을 연립하면 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{11}{2}x$를 얻습니다. 따라서 $f(5)=40$입니다.

정답 : 40

106) 논리적으로 설명하려면, 함수 $g(x)=f(x)-x$를 생각하여 $g(p)>0$, $g(q)<0$임과 사잇값 정리를 이용하면 됩니다.

107) 그림에는 $(a,\ a)$가 마치 $(1,\ 2)$와 $(2,\ 1)$의 중점처럼 그려져 있습니다. 이는 결과적으로 맞기는 한데, 문제에서 주어진 정보만으로 즉각 알 수 있는 것은 아님을 주의합시다.