KIMJISUK

- 서울대학교 수학교육과 졸업 (영문학 부전공)
- 초등학교 수학 30점을 넘어본 적이 없는 수포자
- 꾸준한 성적 향상으로 서울대 수학교육과 졸업, EBS-i 강사

- 현) EBS-i 강사
- 현) 오르비 강사
- 전) 공신닷컴(gongsin.com) 대표멘토
- 전) 미국 Lehi High School 교사인턴

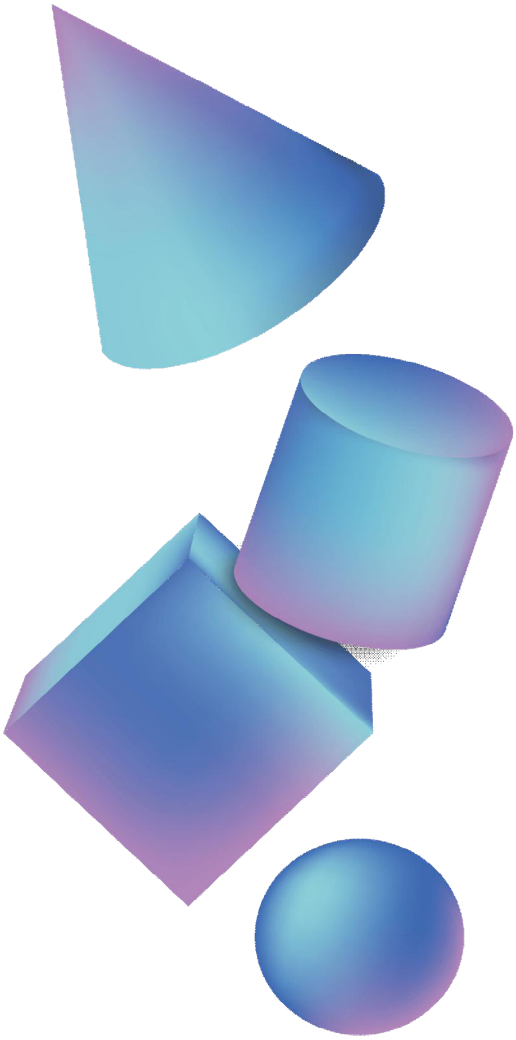
『대박타점 공부법』 저자

- MBC 〈오늘의 아침〉 출연
- 여성중앙 〈공신 멘토링〉 멘토
- 동아일보 〈신나는 공부〉 코너 인터뷰
- 조인스TV 〈열려라 공부〉 출연
- 메가TV 〈수능공부법〉 수리영역 공부법 강의
- 한겨레 신문 보도
- 중앙일보 〈공부 개조 프로젝트〉 자문 멘토
- tvN 〈80일만에 서울대 가기〉 출연
- KBS 〈세상의 아침〉 출연
- KBS 〈생방송 오늘〉 출연
- 신동아 〈'1등 코드'를 찾아서〉 출연
- MBC 〈경제 매거진〉 출연
- KBS 〈취재파일4321〉 출연
- MBC 〈베란다쇼〉 출연

도형의 필연성

Contents

김지석t



■도형의 필연성이란?

많은 사람들이 도형문제는 학습자에 '감'에 의존하여 풀게 하죠. 논리적인 학문이 수학인데 왜 수학도형을 '감'으로 풀라고 하나요? 그건 교육자의 눈높이와 학습자의 눈높이가 달라서 그렇답니다. 학습자의 눈높이에 편안하게 맞춘 도형의 필연성으로 논리적으로 도형문제를 풀어보세요.

PART 01.

도형의 필연성

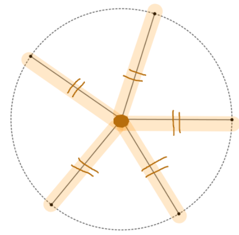
01 도형의 필연성

필연성 01

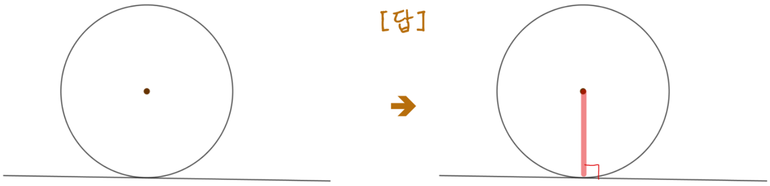
원 나오면 → 중심과 특별점 잇기

✓ 접점 → 접선과 수직

문제를 풀 때 원이 나오면 중심과 특별한 점을 이어줘야 한다.
'원'이라는 도형의 정의 자체가 '한 정점으로부터 같은 거리(=반지름)에 있는 점들의 집합'이기 때문이다. 원이 곡선이긴 해도 정작 문제 풀 때는 그 곡선을 활용하기보다 이은 선분(반지름)의 길이가 같다는 걸 활용하는 것이다. 도형에서 '곡선' 문제는 '직선' 문제로 변환되어야 풀린다는 걸 명심하자.

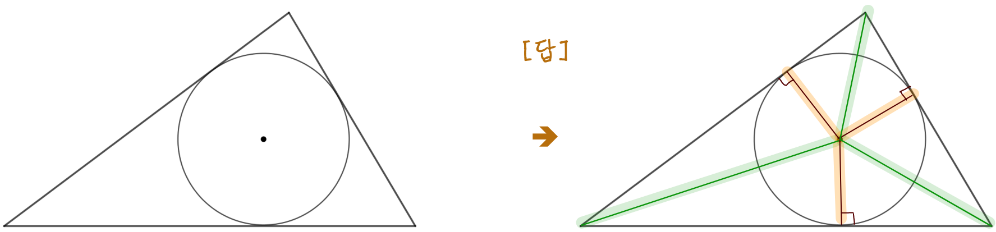


■ EX - 문제에 아래와 같은 도형이 나온다고 가정했을 때, 알맞은 보조선을 그으시오.



문제를 풀 때 접점은 언제나 특별한 점이다. 특히 접점과 중심을 이은 선분은 접선과 수직하다는 걸 문제 풀 때 꼭 활용할 생각을 해야 한다.

■ EX - 문제에 아래와 같은 도형이 나온다고 가정했을 때, 알맞은 보조선을 그으시오.



접점은 물론 삼각형의 꼭짓점도 특별한 점이다.

필연성 02

수직 선분 → 높이 → 삼각형 넓이 활용

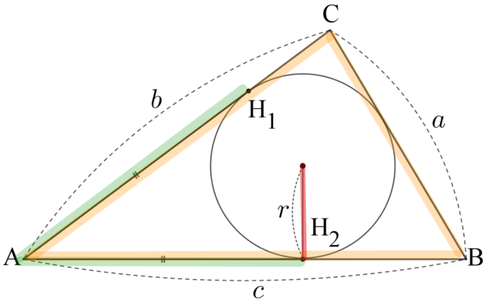
문제에서 변과 수직인 선분이 나오면 그 선분이 삼각형의 높이의 역할을 할 수 있고, 이를 이용해 삼각형의 넓이를 활용할 수 있다는 생각을 해낼 수 있어야 한다.

필연성 03

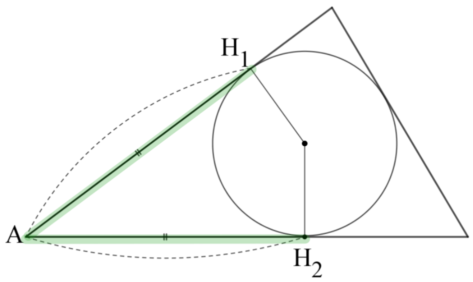
삼각형에 내접하는 원

✓ $\overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{AH_2}}$

✓ $S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

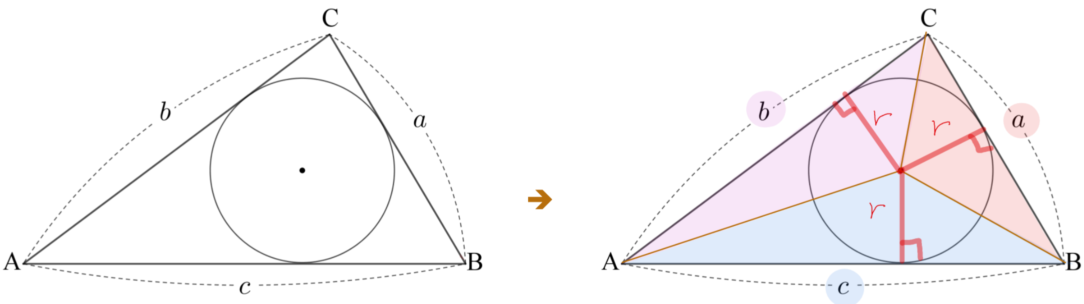


삼각형에 내접하는 원이 나올 때는 멀뚱멀뚱 쳐다만 보지말고 위의 두 가지를 사용할 생각을 해야 한다.



[중학도형 개념] 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{AH_2}}$



$S=\dfrac{1}{2}ar+\dfrac{1}{2}br+\dfrac{1}{2}cr$

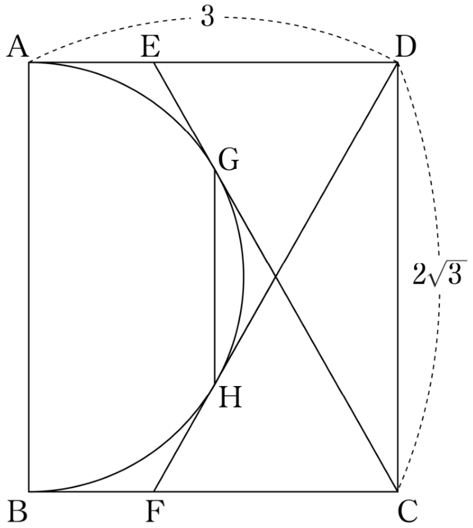
$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

위의 식은 삼각형 넓이로 규정된 것이지만 실전에서 삼각형 넓이 구하는데 사용되기 보다는 주로 삼각형의 넓이를 활용해 내접원의 반지름의 길이를 구하는 데 사용된다. $\left(r=\dfrac{2S}{a+b+c}\right)$

Question

3. [2017년 3월 17번]

그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DC}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD 가 있다. 선분 AD 위의 점 E, 선분 BC 위의 점 F 에 대하여 두 선분 EC, DF 가 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위의 두 점 G, H 에서 각각 접한다. 선분 GH 의 길이는? [4점]



■ Mission 1.

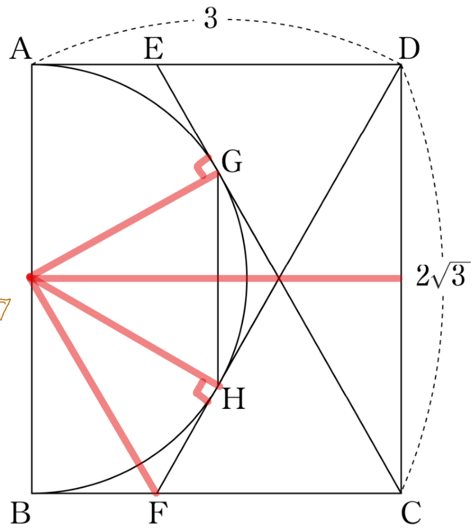
이 문제에 사용될 도형의 필연성을 3개를 쓰고 문제를 풀어 보세요.

02 도형의 필연성 실전적용

Answer

[2017년 3월 17번]

그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DC}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 AD 위의 점 E, 선분 BC 위의 점 F에 대하여 두 선분 EC, DF가 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 두 점 G, H에서 각각 접한다. 선분 GH의 길이는? [4점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

필연성 01

원 나오면 ➡ 중심과 특별점 잇기

✓ 접점 → 접선과 수직

필연성 05

대칭 도형 ➡ 반띵

✓ 이등변삼각형 → 직각 삼각형

필연성 06

문제에서 30°, 60°, 정삼각형이 나오면

⇄ 특수각 삼각비 $1:2:\sqrt{3}$

✓ 정삼각형은 30°, 60°에 대한 단서

✓ 도형 문제에서 $\sqrt{3}$이라는 숫자가 등장하는 것만으로도 각도 30°, 60°가 나올 가능성이 크다는 걸 예상하고 있어야 한다.

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

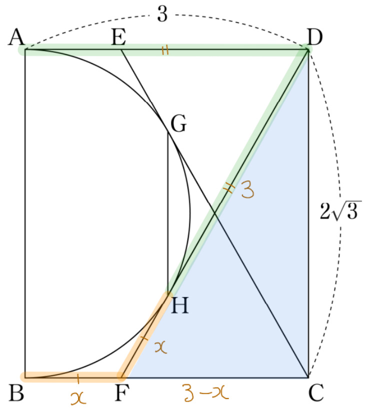
풀이1

구하는 것 ‣ $\overline{GH}$

■ 원 나오면 → 중심과 특별점 잇기

■ 대칭형 도형 → 반띵

(step1) 원 나오면 → 중심과 특별점 잇기
대칭 도형 → 반띵



원 외부의 점과 두 접점까지의 거리는 같다.

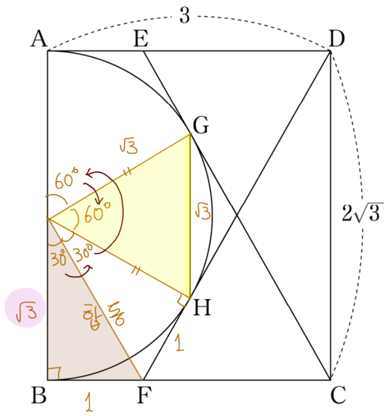
$\therefore$ $\overline{AD}=\overline{DH}=3$, $\overline{BF}=\overline{FH}=x$

$\triangle$DFC에서 피타고라스 정리에 의해

$(3+x)^2=(3-x)^2+(2\sqrt{3})^2$

$\therefore$ $x=1$

(step2) 문제에서 30°, 60°, 정삼각형
⇄ 특수각 삼각비 1:2:√3



$\overline{OB}:\overline{BF}=\sqrt{3}:1$

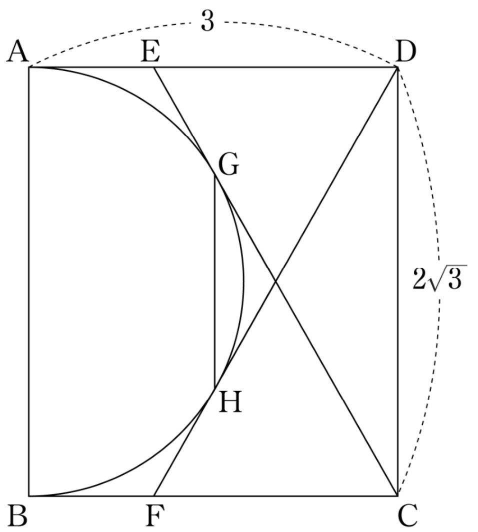
$\therefore$ $\angle OBF=\angle OFH=30^\circ$

$\triangle$OGH는 정삼각형

$\therefore$ $\overline{GH}=\sqrt{3}$

[2017년 3월 17번]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}=3$, $\overline{\mathrm{DC}}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD 가 있다. 선분 AD 위의 점 E, 선분 BC 위의 점 F 에 대하여 두 선분 EC, DF 가 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위의 두 점 G, H 에서 각각 접한다. 선분 GH 의 길이는? [4점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

필연성 07

직각삼각형을 수직수직으로 자르면
→ 닮음 삼각형

Skill 내 키를 → 서장훈 키로 바꾸기

(아는 길이) → (모르는 길이)

✓ 내키 × $\frac{\text{서장훈키}}{\text{내키}}$ = 서장훈키

비율

필연성 11

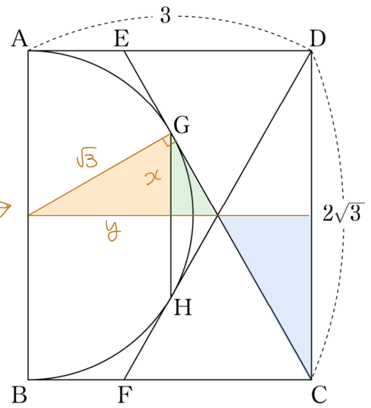
도형의 한 부분의 길이(각도)를 구할 때
→ "부분의 합 = 전체" 식 세우기

✓ '나머지 부분'을 빨리 파악하는 것이 핵심

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

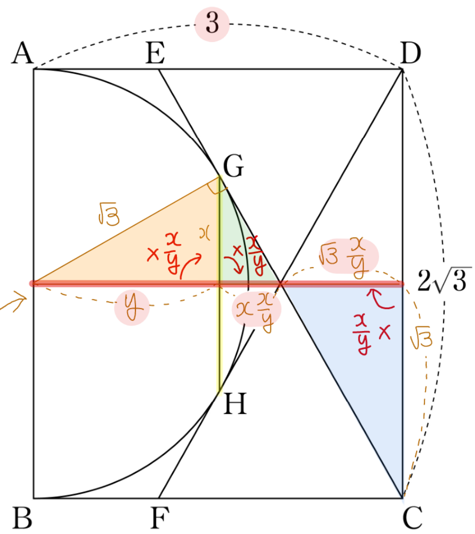
풀이2

(step2) 직각삼각형을 수직수직으로 자르면
→ 닮음 삼각형



$x^2+y^2=3$

(step3) 도형의 한 부분의 길이(각도)를 구할 때
→ "부분의 합 = 전체" 식 세우기



$y+x\cdot\frac{x}{y}+\sqrt{3}\cdot\frac{x}{y}=3$

⇔ $y^2+x^2+\sqrt{3}x=3y$

⇔ $3+\sqrt{3}x=3y$

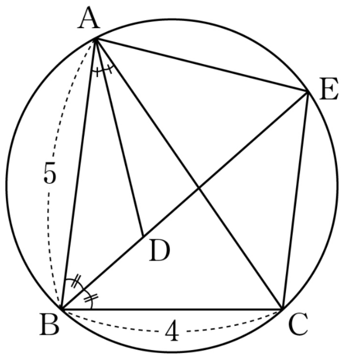
$x^2+y^2=3$와 연립한다.

$\therefore\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{GH}}=\sqrt{3}$

Question

26. [2021년 3월 (공통) 15번]
그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다.
$\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



< 보 기 >

ㄱ. $\overline{AC}=6$
ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$
ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

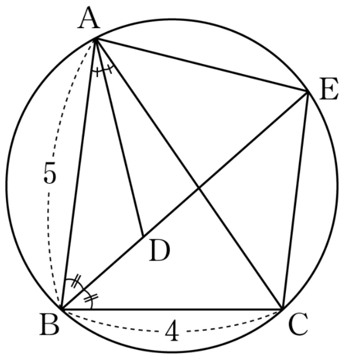
Answer

[2021년 3월 (공통) 15번]

그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$,

$\cos(\underset{2\alpha}{\angle ABC})=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다.

$\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



< 보 기 >

O ㄱ. $\overline{AC}=6$

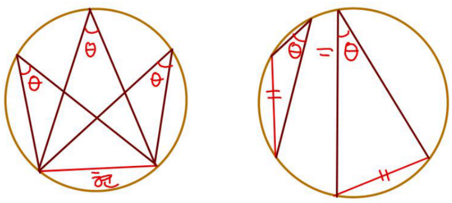
O ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

X ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[중학도형] 원주각 동일
⇔ 현의 길이 동일



Skill **Double코사인법칙 (1) 통각**

✓ 원에 내접하는 사각형에서
쪼개지지 않은 각이 제시됐을 때
→ 대각의 합 = 180° 활용
→ 코사인법칙 2번 쓰기

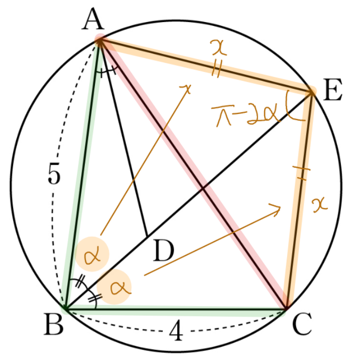
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

ㄱ, ㄴ. (참)

[중학도형] 원주각 동일 ⇔ 현의 길이 동일

$\angle EBA=\angle EBC=\alpha$라 하자.

$\overline{EA}=\overline{EC}=x$ ⋯ ㄴ(참)



Double코사인법칙 (1) 통각

$\overline{AC}^2=5^2+4^2-2\cdot5\cdot4\cdot\cos2\alpha$

$=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cos(\pi-2\alpha)$

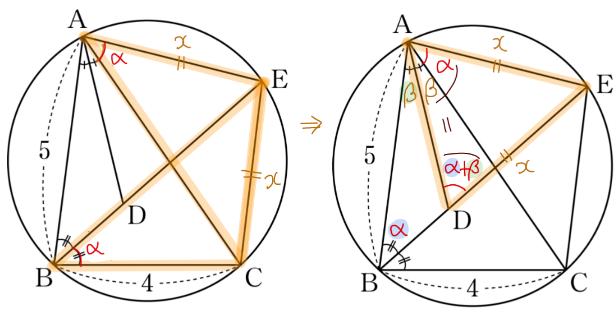
$\Leftrightarrow \overline{AC}^2=25+16-40\cdot\frac{1}{8}=2x^2-2x^2\left(-\frac{1}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2=6^2=2x^2+\frac{1}{4}x^2$

$\therefore \overline{AC}=6,\ x=4$ ⋯ ㄱ(참)

ㄷ. (거짓)

[중학도형] 원주각 동일 ⇔ 현의 길이 동일



$\therefore \overline{ED}=x=4$

04 15개정 도형기출

■ **연습문항까지 풀면 모든 15개정 삼각함수 기출 문제를 다 풀어보게 됩니다.**

■ 15개정 기출 해설 p. 138 ~
■ 15개정 기출 빠른 정답 p. 166

Question

33. [2020년 3월 (가)형 23번]
중심각의 크기가 1 라디안이고 둘레의 길이가 24 인 부채꼴의 넓이를 구하시오. [3점]

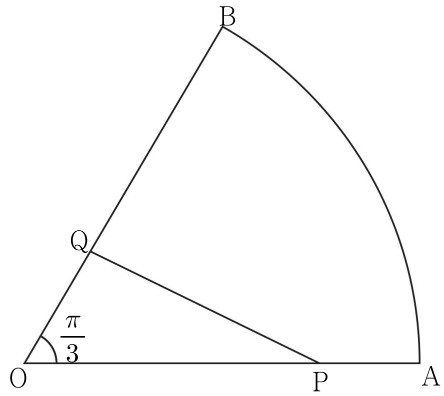
Question

34. [2020년 7월 (가)형 7번]
$\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\sqrt{7}$ 인 예각삼각형 ABC 의 넓이가 $\sqrt{6}$ 이다. $\angle A=\theta$ 일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

Question

35. [2020년 4월 (가)형 10번]
그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB에서 선분 OA를 $3:1$로 내분하는 점을 P, 선분 OB를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$일 때, 호 AB의 길이는? [3점]



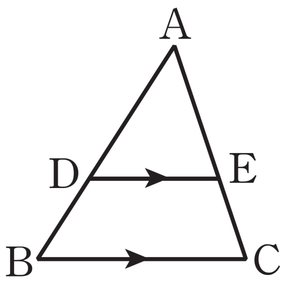
① $\frac{5}{3}\pi$ ② 2π ③ $\frac{7}{3}\pi$ ④ $\frac{8}{3}\pi$ ⑤ 3π

중학도형 6

삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비

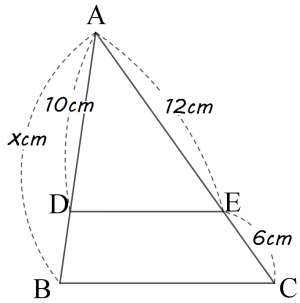
$\triangle ABC$에서 $\overline{DE} // \overline{BC}$ 일 때

$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{BC}$



Question

59. 다음 그림에서 $\overline{BC} \mathbin{/\!/} \overline{DE}$ 일 때, x의 값을 구하시오. ■ 빠른 정답 p. 166

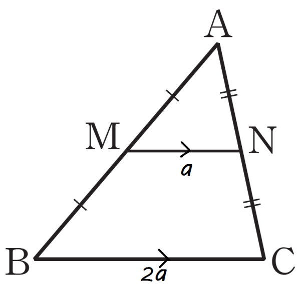


중학도형 7

삼각형의 중점 연결정리

①삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분은 나머지 변과 평행하고 그 길이는 나머지 변의 길이의 반과 같다.

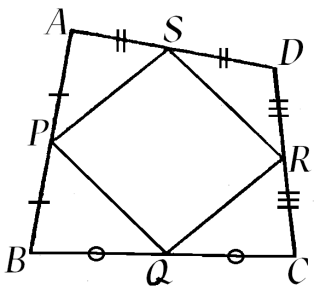
②삼각형의 한 변의 중점을 지나고 다른 한 변에 평행한 직선은 나머지 변의 중점을 지난다.



Question

60. □ABCD에서 대각선의 길이가 $\overline{AC} = 10cm$, $\overline{BD} = 8cm$이고 각 변의 중점을 P, Q, R, S라 할 때 □PQRS의 둘레의 길이를 구하여라.

■ 빠른 정답 p. 166



50. [2022년 9월 (공통) 13번]
그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$\overline{\mathrm{CE}}=4,\ \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\ \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [4점]

① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

필연성 09

코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

[단서] → [답]
✓ 2변 1각 → 1변
✓ 3변 → 각

필연성 01

원 나오면 → 중심과 특별점 잇기

✓ 접점 → 접선과 수직

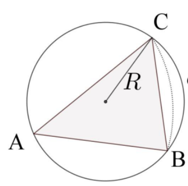
필연성 08

사인법칙 활용법 (각이 많을 때)

[단서] → [답]
✓ 2변 1각 → 1각
✓ 1변 2각 → 1변
✓ 외접원 등장

Skill 사인법칙 실전용 (2)

✓ 외접원 있을 때



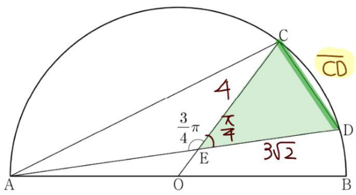
$a=2R\sin A$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

풀이1

구하는 답 · $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$
■ $\overline{\mathrm{CD}}$ → [단서]2변 1각→[답]1변 → 코사인법칙
■ $\overline{\mathrm{AC}}$ → 외접원 등장 → 사인법칙
→ $\overline{\mathrm{AC}}=2r\sin\mathrm{D}$
→ 반지름 r → 원 나오면→중심과 특별점 잇기

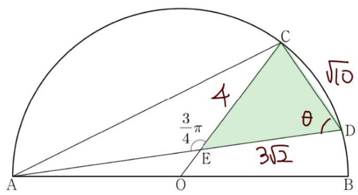
(step1) 코사인법칙 활용 → $\overline{\mathrm{CD}}$ 구하기



$$\overline{\mathrm{CD}}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\cdot4\cdot3\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$

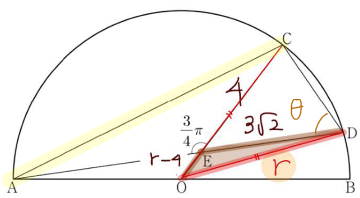
(step2) 코사인법칙 활용 → $\angle\mathrm{D}=\theta$ 구하기



$$\cos\theta=\frac{(3\sqrt{2})^2+\sqrt{10}^2-4^2}{2\cdot3\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

(step3) 코사인법칙 활용 → 반지름 r 구하기



$$r^2=(r-4)^2+(3\sqrt{2})^2-2(r-4)3\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}$$

$\therefore\ r=5$

(step4) 사인법칙 실전용 (2) → $\overline{\mathrm{AC}}$ 구하기

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=2r\sin\theta=2\times5\times\frac{2}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

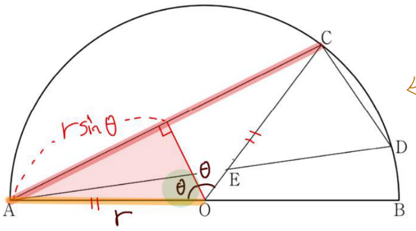
$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

풀이2

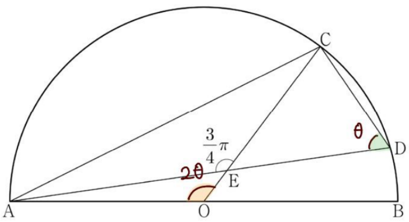
구하는 답 · $\overline{AC}\times\overline{CD}$

- $\overline{CD}$ → [단서]2변 1각→[답]1변 → 코사인법칙
- $\overline{AC}$ → 이등변삼각형 → 반띵



→ $\overline{AC}=2r\sin\theta$

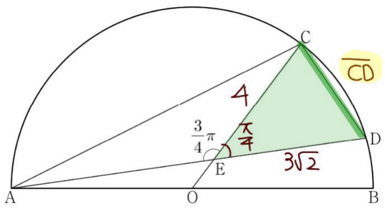
→ [중학도형] 중심각=원주각×2



→ $\angle O=2\angle D$ → $\angle D=\theta$

- 원 나오면→중심과 특별점 잇기

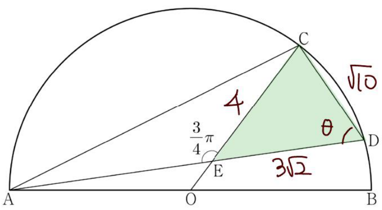
(step1) 코사인법칙 활용 → $\overline{CD}$ 구하기



$$\overline{CD}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\cdot4\cdot3\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$

$\therefore\ \overline{CD}=\sqrt{10}$

(step2) 코사인법칙 활용 → $\angle D=\theta$ 구하기



$$\cos\theta=\frac{(3\sqrt{2})^2+\sqrt{10}^2-4^2}{2\cdot3\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

필연성 05

대칭 도형 → 반띵

✓ 이등변삼각형 → 직각 삼각형

필연성 09

코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

[단서] → [답]

✓ 2변 1각 → 1변

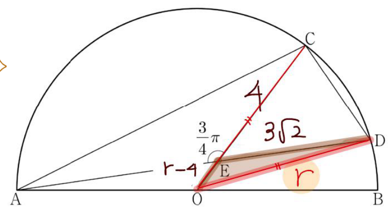
✓ 3변 → 각

필연성 01

원 나오면 → 중심과 특별점 잇기

✓ 접점 → 접선과 수직

(step3) 코사인법칙 활용 → 반지름 r 구하기



$$r^2=(r-4)^2+(3\sqrt{2})^2-2(r-4)3\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}$$

$\therefore\ r=5$

(step4) 이등변삼각형 → 반띵 → $\overline{AC}$ 구하기

$\therefore\ \overline{AC}=2r\sin\theta=2\times5\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{AC}\times\overline{CD}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

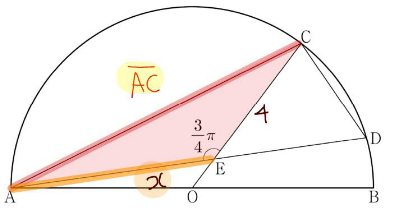
06 해설

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

풀이3

구하는 답 : $\overline{AC} \times \overline{CD}$

- $\overline{CD}$ → [단서]2변 1각→[답]1변 → 코사인법칙
- $\overline{AC}$ → $\angle CEA = \frac{3}{4}\pi$ 활용 → 코사인법칙

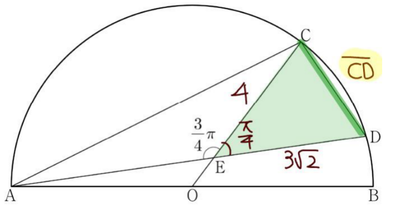


→ $\overline{AC}^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 \cdot \cos\frac{3\pi}{4}$

→ $\overline{AE} = x$ 구하기

- △AEO : 정보가 많은 삼각형
  △AEC : 정보가 부족한 삼각형
  → $\overline{AE}$: 공통부분
- 원 나오면→중심과 특별점 잇기

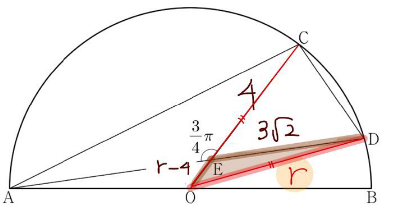
(step1) 코사인법칙 활용 → $\overline{CD}$ 구하기



$\overline{CD}^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4}$

∴ $\overline{CD} = \sqrt{10}$

(step2) 코사인법칙 활용 → 반지름 r 구하기



$r^2 = (r-4)^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2(r-4)3\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}$

∴ $r = 5$

필연성 09

코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

[단서] → [답]

✓ 2변 1각 → 1변

✓ 3변 → 각

필연성 15

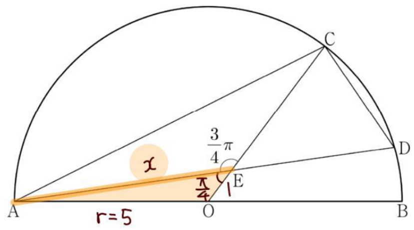
길이를 모르는 삼각형과
길이를 아는 삼각형이 섞여 있을 때
→ 공통부분을 찾아라!

필연성 01

원 나오면 → 중심과 특별점 잇기

✓ 접점 → 접선과 수직

(step3) 코사인법칙 활용 → $\overline{AE}$ 구하기



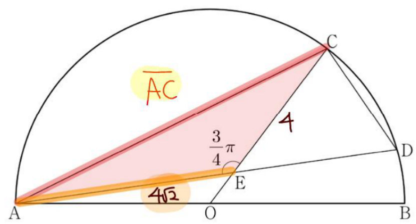
$5^2 = x^2 + 1^2 - 2 \cdot x \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{4}$

⇔ $x^2 - \sqrt{2}x - 24 = 0$

⇔ $x = \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4(-24)}}{2}$

∴ $x = 4\sqrt{2}$

(step4) 코사인법칙 활용 → $\overline{AC}$ 구하기



$\overline{AC}^2 = (4\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\cos\frac{3\pi}{4}$

∴ $\overline{AC} = 4\sqrt{5}$