데빌스 수학2 정오표

01-4 해설 오타 수정

다음 조건들을 모두 만족시키는 다항함수 $f(x)$를 모두 구하시오.

(단, 조건을 만족하는 $f(x)$의 개수는 3개 있다.)

(가) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^2 f(x)} = 2$
(나) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 4$
(다) $f(x)$의 차수는 4이하이다.

02-1 정답 수정

다음 [보기] 중 함수 극한에 대하여 참인 명제의 개수는? (단, a는 실수)

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$가 존재하면 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$가 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}g(x)$와 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$가 존재하면 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다. (단, $\lim_{x\to a}f(x)\neq 0$)

ㄷ. $\lim_{x\to a}f(x)\neq 0$이고 $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)\neq 0$ 이다.

ㄹ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)<h(x)$이고 $\lim_{x\to a}\{2h(x)+f(x)\}=6$,

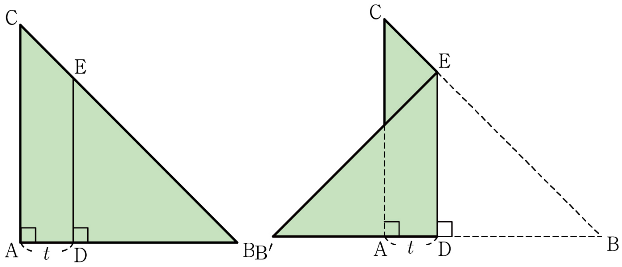
$\lim_{x\to a}\{h(x)-2f(x)\}=-2$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=2$이다.

ㅁ. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{f(x+1)-1}$이 존재하면 $\lim_{x\to 2}f(x)=1$이다.

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

03-5 빠른 정답 정답 수정

다음 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=2$이고 $\angle A=90°$인 직각이등변삼각형 ABC 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 D를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 선분 BC와 만나는 점을 E라 하고, $\overline{AD}=t$일 때, 선분 DE를 접는 선으로 하여 삼각형 DBE와 삼각형 DB′E가 선대칭이 되도록 종이를 접었다. 이때 생기는 도형의 넓이를 $S(t)$라 할 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) $S(t)$를 구하시오. (단, $0<t<2$)

(2) $\lim_{t\to1}\dfrac{2tS(t)-3}{t-1}$의 값을 구하시오.

06-3 해설 오타 수정

이차함수 $f(x)=(x+1)^2$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ |-f(-x)+t| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $s(t)$에 대하여 함수 $h(t)s(t)$가 모든 실수 t에서 연속이다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $h(t)$를 구하시오.

(2) 방정식 $s(t)=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

09-5 문제 조건,보기, 답 수정

자연수 n에 대해서 곡선 $f(x)=x^3+(n+1)x^2-2x$ 위의 점 $(-1,\ n+2)$에서의 접선이 이 곡선 위의 다른 한 점 $\mathrm{A}(x_n,\ f(x_n))$에서 만난다. 이때, $\sum_{n=3}^{20} x_n$의 값은?

① -219 ② -209 ③ -199 ④ -189 ⑤ -179

13-5 해설 수정

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)=\left|x^3-ax\right|$의 최댓값을 $M(a)$라고 할 때, $M(a)$의 최솟값은? (단, $a>0$)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

01-4 정답 $3x^2+4x$, x^3+x^2+4x, x^4+x^2+4x

풀이

함수 $f(x)$는 다항함수이므로

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

조건 (나)에 대입하면 $a_0=0$, $a_1=4$임을 알 수 있다.

따라서 다항함수 $f(x)$의 일차항 계수는 4고 상수항은 0이다.

조건 (다)로부터 다항함수 $f(x)$의 차수가 4차 이하이기 때문에 다음과 같이 나누어 생각해 볼 수 있다.

(ⅰ) $f(x)$가 4차식인 경우

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+4x$ $(a\neq 0)$라 하자.

$$x^2f(x)=ax^6+bx^5+cx^4+4x^3$$

$$\{f(x)\}^2=a^2x^8+2abx^7+(2ac+b^2)x^6+\cdots$$

$$f(x^2)=ax^8+bx^6+cx^4+4x^2$$

분모는 6차이고 분자의 차수는 8차이므로 분자의 x^8의 계수와 x^7의 계수가 0이어야 한다.

$$a^2-a=0$$

$$\therefore\ a=1\ \ (\because\ a\neq 0)$$

$$2ab=0$$

$$\therefore\ b=0$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^2f(x)}$의 극한값은 분모, 분자의 x^6의 계수를 비교하면 된다. 따라서

$$\frac{2ac+b^2-b}{a}=2c=2$$

$$\therefore\ c=1$$

$$\therefore\ f(x)=x^4+x^2+4x$$

(ⅱ) $f(x)$가 삼차식인 경우

$f(x)=ax^3+bx^2+4x$ $(a\neq 0)$라 하자.

$$x^2f(x)=ax^5+bx^4+4x^3$$

$$\{f(x)\}^2=a^2x^6+2abx^5+(8a+b^2)x^4+\cdots$$

$$f(x^2)=ax^6+bx^4+4x^2$$

분모는 5차이고 분자의 차수는 6차이므로 분자의 x^6의 계수가 0이어야 한다.

$$a^2-a=0$$

$$\therefore\ a=1\qquad(\because\ a\neq 0)$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^2f(x)}$의 극한값은 분모, 분자의 x^5의 계수를 비교하면 된다. 따라서

$$\frac{2ab}{a}=2b=2$$

$$\therefore\ b=1$$

$$\therefore\ f(x)=x^3+x^2+4x$$

(ⅲ) $f(x)$가 이차식인 경우

$f(x)=ax^2+4x \quad (a \neq 0)$라 하자.

$x^2 f(x)=ax^4+4x^3$

$\{f(x)\}^2=a^2x^4+8ax^3+16x^2$

$f(x^2)=ax^4+4x^2$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^2f(x)}$의 극한값은 분모, 분자의 x^4의 계수를 비교하면 된다. 따라서

$\dfrac{a^2-a}{a}=a-1=2$

$\therefore\ a=3$

$\therefore\ f(x)=3x^2+4x$

(ⅰ) ~ (ⅲ)로부터 다항함수 $f(x)$는

$f(x)=x^4+x^2+4x,\ f(x)=x^3+x^2+4x,\ f(x)=3x^2+4x$ 해설중 오타 수정

<참고>

일반적으로 다항함수 조건에 관계식이 주어진다면 “TIP2”와 같이 최고차항을 설정하고 관계식에 대입하여 차수를 구하고 문제를 해결하는 경우가 많다. 하지만 이 문제의 경우 $\{f(x)\}^2$과 $f(x^2)$은 최고차가 같아서 최고차항 및 그 이하의 항들을 없앨 수 있으므로 문제 조건에 4차 이하라는 조건이 추가되어 있었던 것이다.

따라서 본 문제는 위의 해설과 같이 $f(x)$의 차수를 기준으로 접근하는 것이 옳은 풀이가 될 것이다.

[“TIP3”의 적용]

이 문제는 함수의 극한 중 “미정계수의 결정”이라는 내용에 기초한 문제다. 하지만 극한, 연속, 미분계수의 정의는 연계되어 있는 경우가 많다. 따라서 “TIP3”의 관점에서 조건 (나)를 $f(0)=0,\ f'(0)=4$로 해석할 수 있을 것 같다. 그럼 상수항이 0이고 일차항의 계수가 4임을 쉽게 확인할 수 있다.

Theme 02 ‖ 극한값의 성질; 합답형 정답 수정

02-1 정답 ②

풀이

ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}g(x)$이므로 $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재한다.

따라서 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$는 존재한다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}\neq 0$이 성립하지는 않으므로 존재하지 않을 수 있다. (거짓)

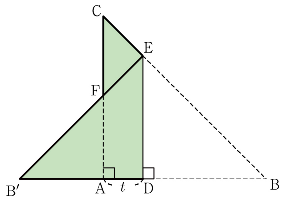
ㄷ. 주어진 명제의 대우 명제는 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이거나 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다. 주어진 명제의 대우명제가 거짓이므로 주어진 명제도 거짓이다. (거짓)

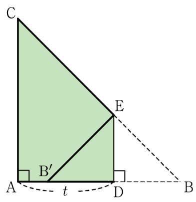
ㄹ. 뒤의 두 조건으로부터 $\lim_{x\to a} f(x)=2$, $\lim_{x\to a} h(x)=2$이므로 $\lim_{x\to a} g(x)=2$이 성립한다. (참)

ㅁ. 항상 성립한다 볼 수 없다. (거짓)

03-5 정답 (1) $S(t)=\begin{cases} \frac{3}{2}t^2-2t+2 & (0<t<1) \\ 2t-\frac{1}{2}t^2 & (1\le t<2) \end{cases}$ 정답 수정 (2) 5

풀이





(1) $0<t<1$일 때 선분 EB′과 선분 AC가 만나는 점을 F라 하면 $S(t)$는 사다리꼴 ADEC의 넓이와 삼각형 B′AF의 넓이의 합이고, $1\le t<2$일 때 $S(t)$는 사다리꼴 ADEC의 넓이가 된다.

(ⅰ) $0<t<1$일 때,

$\overline{DE}=\overline{DB}=2-t$이므로 사다리꼴 ADEC의 넓이는

$\frac{1}{2}(2+2-t)\times t=2t-\frac{1}{2}t^2$

$\overline{B'A}=2-2t$이므로 삼각형 B′AF의 넓이는

$\frac{1}{2}(2-2t)^2=2t^2-4t+2$

$S(t)=\left(2t-\frac{1}{2}t^2\right)+(2t^2-4t+2)$

$=\frac{3}{2}t^2-2t+2$

(ⅱ) $1\le t<2$일 때

$S(t)$는 사다리꼴 ADEC의 넓이와 같으므로 (ⅰ)에 의하여

$S(t)=\frac{1}{2}(2+2-t)\times t=2t-\frac{1}{2}t^2$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$\therefore\ S(t)=\begin{cases} \frac{3}{2}t^2-2t+2 & (0<t<1) \\ 2t-\frac{1}{2}t^2 & (1\le t<2) \end{cases}$$

(2) $\lim_{t\to 1+}\frac{2tS(t)-3}{t-1}=\lim_{t\to 1+}\frac{4t^2-t^3-3}{t-1}$

$$= \lim_{t \to 1+} \frac{-(t-1)(t^2-3t-3)}{t-1}$$

$$= \lim_{t \to 1+} (-t^2+3t+3)$$

$$=5$$

$$\lim_{t \to 1-} \frac{2tS(t)-3}{t-1} = \lim_{t \to 1-} \frac{3t^3-4t^2+4t-3}{t-1}$$

$$= \lim_{t \to 1-} \frac{(t-1)(3t^2-t+3)}{t-1}$$

$$= \lim_{t \to 1-} (3t^2-t+3)$$

$$=5$$

$$\therefore \lim_{t \to 1} \frac{2tS(t)-3}{t-1} = 5$$

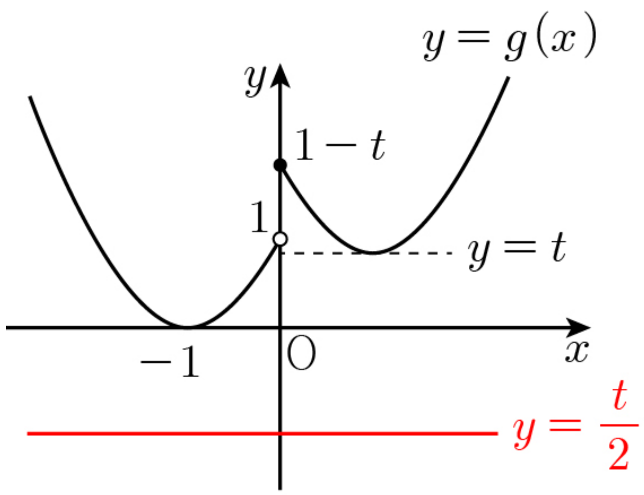
06-3 정답 (1) 풀이참조 (2) $\frac{8}{3}$

풀이

(1) $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & (x<0) \\ |(x-1)^2-t| & (x \ge 0) \end{cases}$ 이다.

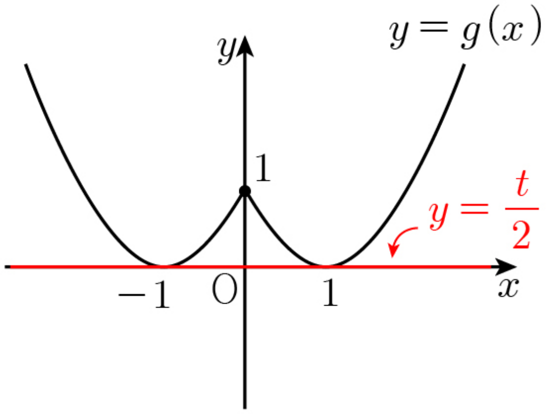
k의 값의 범위에 따른 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$ 위치관계는 다음과 같다.

(i) $t<0$일 때,



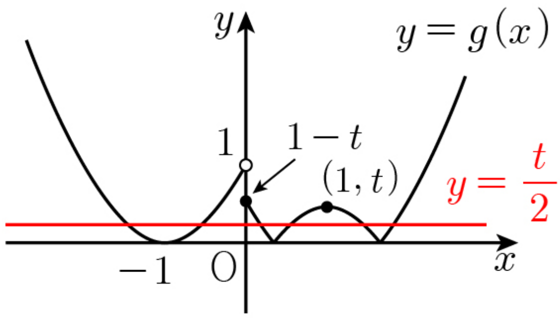
$\therefore\ h(t)=0$

(ii) $t=0$일 때,



$\therefore\ h(t)=2$

(ⅲ) $0<t<1$일 때,

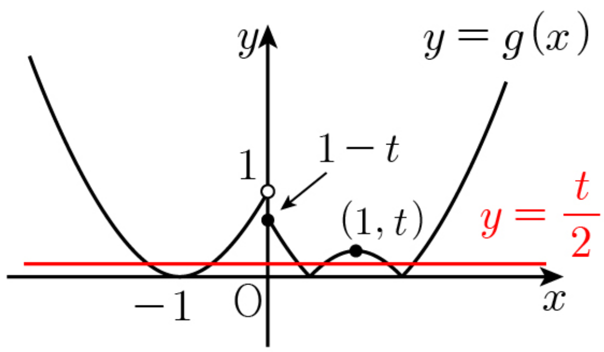


이때, y축과의 교점인 $1-t$와 $y=\frac{t}{2}$의 위치에 따라 교점의 개수가 달라짐을 알 수 있다.

$1-t=\frac{t}{2}$

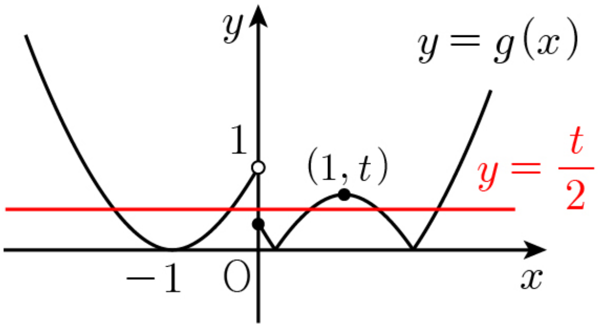
$\therefore\ t=\frac{2}{3}$

① $0<t\le\frac{2}{3}$일 때,



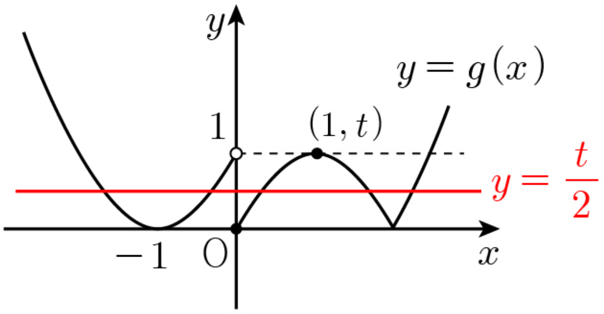
$\therefore\ h(t)=6$

② $\frac{2}{3}<t<1$일 때,



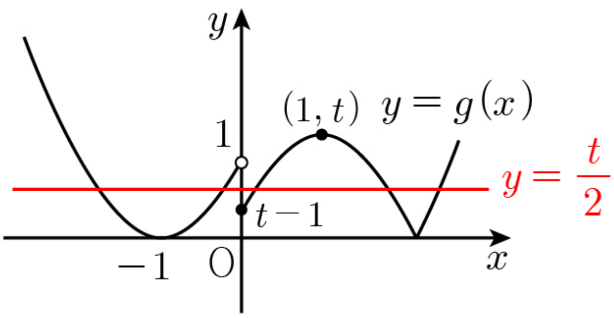
$\therefore\ h(t)=5$ 오타수정

(iv) $t=1$일 때,



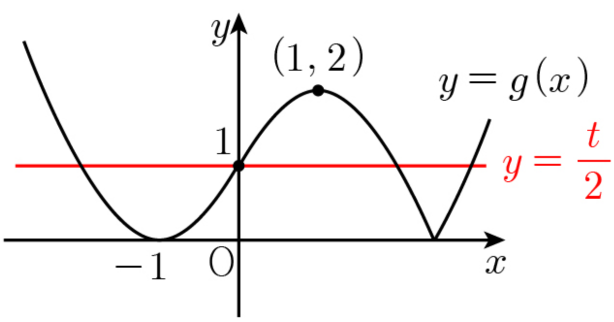
$\therefore\ h(t)=5$

(v) $1<t<2$일 때,



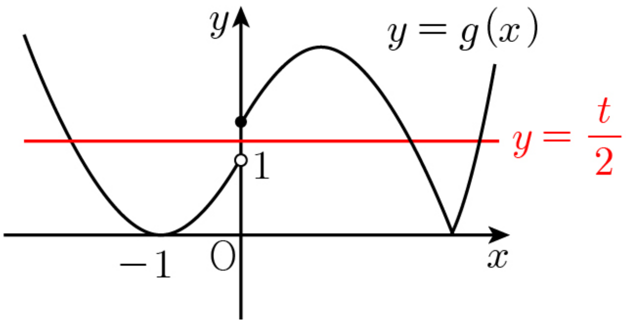
$\therefore\ h(t)=5$

(vi) $t=2$일 때,



$\therefore\ h(t)=4$

(vii) $t>2$일 때,



$\therefore\ h(t)=3$

(i) ~ (vii)으로부터 함수 $h(t)$는 다음과 같다.

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0) \\ 6 & \left(0<t\le\frac{2}{3}\right) \\ 5 & \left(\frac{2}{3}<t<2\right) \\ 4 & (t=2) \\ 3 & (t>2) \end{cases}$$

(2) 함수 $h(t)s(t)$는 모든 실수 t에서 연속인데 함수 $h(t)$는 $t=0,\ \frac{2}{3},\ 2$에서 불연속이다.

그러므로 $s(0)=s\left(\frac{2}{3}\right)=s(2)=0$을 만족해야 한다.

따라서 방정식 $s(t)=0$의 모든 실근의 합은 $0+\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$ 이다.

[참고 : $y=|-f(-x)+t|$의 해석]

$(a,\ b)$에 대하여 대칭인 함수는 $f(x)=-f(2a-x)+2b$이다.

따라서 함수 $y=-f(-x)+t$는 $\left(0,\ \frac{t}{2}\right)$에 대하여 대칭인 함수이다.

그리고 $y=|-f(-x)+t|$은 x축 아랫부분을 접어올린 함수이다.

09-5 정답 ④

풀이

$f(x)=x^3+(n+1)x^2-2x$

$f'(x)=3x^2+2(n+1)x-2$

$(-1,\ n+2)$에서의 기울기 $f'(-1)=3-2(n+1)-2=-2n-1$

접선의 방정식은

$y=(-2n-1)(x+1)+n+2=(-2n-1)x-n+1$

접선과 곡선 $f(x)$의 교점이므로

$x^3+(n+1)x^2-2x=(-2n-1)x-n+1$

$x^3+(n+1)x^2+(2n-1)x+n-1=0$

$(x+1)^2(x+n-1)=0$

$x_n = 1-n$

$\therefore \sum_{n=3}^{20} x_n = \sum_{n=3}^{20}(1-n) = \sum_{n=1}^{20}(1-n) = 20-210-(-1) = -189$

다른풀이

주어진 함수의 변곡점의 x좌표는 $x=-\frac{n+1}{3}$이고 접점의 x좌표가 -1이다.

접선과 곡선의 접점이 아닌 교점의 x좌표는 접점과 변곡점을 3:2로 외분하는 점의 x좌표가 된다.

$\therefore\ x = \frac{\left(-\frac{n+1}{3}\right)\times 3-(-1)\times 2}{3-2} = \frac{-n-1+2}{1} = 1-n$

$\therefore \sum_{n=2}^{20} x_n = \sum_{n=2}^{20}(1-n) = \sum_{n=1}^{20}(1-n) = 20-210 = -190$

13-5 정답 ①

풀이

$y=x^3-ax=x(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$

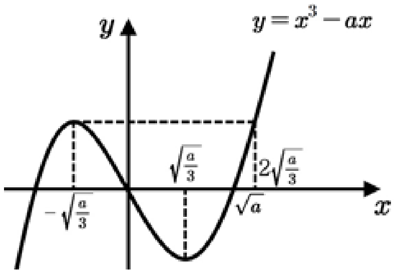
$y'=3x^2-a=3\left(x-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=0$에 대해

$y=x^3-ax$에 $x=-\sqrt{\frac{a}{3}}$을 대입하면

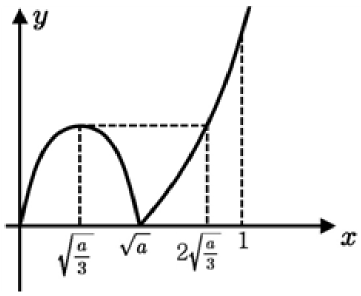
$y=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}$

$x^3-ax=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}$,

$x^3-ax-\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}=\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2\left(x-2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$



이므로 위 그림을 참고하여 함수 $f(x)$의 그래프를 그려보면 다음 그림과 같다.



그래프를 보면 a값에 따른 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서의 함수 $f(x)$의

최댓값 $M(a)=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}$ 는

$2\sqrt{\frac{a}{3}} \le 1$일 때, 즉, $0<a\le\frac{3}{4}$일 때이고,

최솟값은 $a=\frac{3}{4}$일 때

$M\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}$