황보백T

1. 집합과 명제

◆ 개념 01 - 집합과 원소

(1) 집합과 원소

① 집합 : 그 대상을 명확히 구분할 수 있는 것들의 모임

(예) 10 보다 작은 소수의 모임

② 원소 : 집합을 이루고 있는 대상 하나 하나

(2) 집합과 원소의 관계

① a 가 집합 A 의 원소일 때, 이것을 기호로 $a \in A$ 와 같이 나타내고 a 는 집합 A 에 속한다고 한다.

② a 가 집합 A 의 원소가 아닐 때, 이것을 기호로 $a \notin A$ 와 같이 나타내고 a 는 집합 A 에 속하지 않는다고 한다.

(3) 집합을 나타내는 방법

① 원소나열법 : 집합에 속하는 모든 원소를 { } 안에 나열하여 나타내는 방법 (예) $A = \{1, 2, 3, 6\}$

② 조건제시법 : 원소들의 공통된 성질을 조건으로 제시하여 나타내는 방법 (예) $A = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$

◆ 개념 02 - 집합의 포함 관계

(1) 부분집합 : 집합 A 의 모든 원소가 집합 B 의 원소일 때, 즉 집합 A 의 임의의 원소 a 에 대하여 $a \in A$ 이면 $a \in B$ 일 때, 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이라 하고 이것을 기호로 $A \subset B$ 와 같이 나타낸다.

이때, 부분집합의 성질은 다음과 같다.

① $A \subset A$, $\phi \subset A$

② $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A \subset C$

(2) 서로 같은 집합 : $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, 두 집합 A, B 는 서로 같다고 하고 이것을 기호로 $A = B$ 와 같이 나타낸다.

(3) 진부분집합 : $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 일 때, 집합 A 를 집합 B 의 진부분집합이라 한다.

◆ 개념 03 - 부분집합의 개수

집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ $(k \leq n)$ 에 대하여

(1) 집합 A 의 부분집합의 개수 : 2^n

(2) 집합 A 의 진부분집합의 개수 : $2^n - 1$

(3) k 개의 특정한 원소를 포함하거나 포함하지 않는 집합 A 의 부분집합의 개수 : 2^{n-k}

(4) k 개의 특정한 원소 중 적어도 한 개를 포함하는 집합 A 의 부분집합의 개수 : $2^n - 2^{n-k}$

[랑데뷰팁]

원소기호

$\in$: 원소(Element)의 첫 글자 'E'의 모양을 따서 만든 것으로 원소가 집합에 속하는 관계를 나타내는 기호

[랑데뷰팁]

포함기호

$\subset$: 포함하다(Contain)의 첫 글자 'C'의 모양을 따서 만든 것으로 집합과 집합의 포함 관계를 나타내는 기호

STEP-1

1)

집합 $A=\{a,\ b,\ \{a,\ b\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a\in A$ ② $\{a,\ b\}\in A$ ③ $\{b\}\in A$
④ $\{a,\ b\}\subset A$ ⑤ $\{a,\ b,\ \{a,\ b\}\}\subset A$

2)

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{0,\ 1,\ 2\}$ 에 대하여 집합
$P=\{x\mid x=ab,\ a\in A,\ b\in B\}$
라 할 때, 다음 조건을 모두 만족시키는 집합 C의 개수는? (단, $n(A)$ 는 집합 A 의 원소의 개수이다.)

(가) $C-P=\varnothing$
(나) $A\cup C=C$
(다) $n(B\cap C)=2$

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

3)

두 집합 A,B 에 대하여 두 연산 △, ▽를

$$A\triangle B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$$
$$A\triangledown B=\{ab\mid a\in A,\ b\in B\}$$

로 정의한다. $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{0,1,2\}$ 일 때, 집합 $(A\triangle B)\cap(A\triangledown B)$ 의 모든 원소의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

4)

두 집합
$A=\{2-a,\ 2+a\}$, $B=\{-20,\ 0,\ 24\}$
에 대하여 $A\subset B$가 성립할 때, 자연수 a 의 값을 구하시오.

STEP-2

83)

자연수 n에 대하여 자연수 전체 집합의 부분집합 A_n을

$$A_n = \{ x | x\text{는 } \sqrt{n}\text{ 이상의 짝수 } \}$$

라 할 때, $A_n \subset A_{49}$ 를 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오.

84)

전체집합 $U=\{x \mid x$는 108이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B가 $A=\{x| \ x$는 k의 배수$\}$, $B=\{x \mid x$는 108의 약수$\}$일 때, $n(A^C \cap B)=8$을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.

세미나(25)-집합의 교대합의 합

① $m(A)$: 어떤 집합 A의 원소들을 큰 수부터 나열한 뒤 각 원소 사이에 $-$와 $+$를 번갈아 넣어 계산한 값을 [집합 A의 **교대합**]이라 하고 $m(A)$로 나타낸다.

② A의 원소의 개수가 n개, 원소 중 가장 큰 값이 N일 때, A의 모든 부분집합의 **교대합의 합**을 $M(A)$라 하면 $M(A)=N\times 2^{n-1}$이다.

[관련 문제] 자연수를 원소로 가지는 집합 A에 대하여 다음 규칙에 따라 $m(A)$의 값을 정한다.

> (가) 집합 A의 원소가 1개인 경우 집합 A의 원소를 $m(A)$의 값으로 한다.
> (나) 집합 A의 원소가 2개 이상인 경우 집합 A의 원소를 큰 수부터 차례로 나열하고, 나열한 수들 사이에 $-$, $+$를 이 순서대로 번갈아 넣어 계산한 결과를 $m(A)$의 값으로 한다.

예를 들어, $A=\{5\}$이면 $m(A)=5$이다. 또, $B=\{1, 2, 4\}$, $C=\{1, 2, 4, 5\}$이면 $m(B)=4-2+1=3$, $m(C)=5-4+2-1=2$가 되어 $m(B)+m(C)=(4-2+1)+(5-4+2-1)=5$이다. 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 X_1, X_2, $\cdots$, X_{31}이라 할 때,
$m(X_1)+m(X_2)+\cdots+m(X_{31})$의 값을 구하여라.

일반 풀이

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 2^5개의 부분집합 중 최대의 원소인 5를 포함하는 것과 5를 포함하지 않는 것을 다음과 같이 일대일 대응시킬 수 있다.

$$\varnothing \leftrightarrow \{5\},\qquad \{1\}\leftrightarrow\{1, 5\}$$
$$\{2\}\leftrightarrow\{2, 5\},\qquad \{3\}\leftrightarrow\{3, 5\}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\{1, 2, 3, 4\}\leftrightarrow\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

두 집합 A, B가 위와 같이 대응될 때 $m(\varnothing)=0$으로 정하고 $m(A)+m(B)$의 값을 구하여 보자.

$\varnothing \leftrightarrow \{5\}$의 경우 : $0+5=5$
$\{1\}\leftrightarrow\{1, 5\}$의 경우 : $1+(5-1)=5$
$\{2\}\leftrightarrow\{2, 5\}$의 경우 : $2+(5-2)=5$
$\{3\}\leftrightarrow\{3, 5\}$의 경우 : $3+(5-3)=5$
$\vdots$
$\{1, 2, 3, 4\}\leftrightarrow\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 경우 :
$$(4-3+2-1)+(5-4+3-2+1)=5$$
이와 같은 경우가 부분집합의 개수의 절반인
$\dfrac{2^5}{2}=16$(가지)만큼 존재하므로 구하는 값은
$m(X_1)+m(X_2)+\cdots+m(X_{31})=5\times16=80$

랑데뷰 풀이

$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 $M(A)=5\times2^4=80$

②번 설명

A의 부분집합 2^n개 중 최대 원소 N을 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-1}개이고 이것들을 원소로 하는 집합을 P라 하자. 그런데 원소 N을 포함하지 않는 부분집합의 개수도 2^{n-1}개이고 이것들을 원소로 하는 집합을 Q라 하자. P의 임의의 원소 X와 Q의 임의의 원소 Y를 $X-\{N\}=Y$가 되도록 대응시키면 X, Y의 교대합의 합 $m(X)+m(Y)=N$으로 항상 일정하다. 이런 (X, Y)의 순서쌍이 2^{n-1}개이므로 A의 모든 부분집합의 교대합의 합 $M(A)=N\times2^{n-1}$이다.

세미나(33)-티투의 정리

코시 엥겔폼 (Titu's Lemma)

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b},\quad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

(단, $a>0,\ b>0,\ c>0$이고 등호는 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$일 때 성립)

[관련 문제] ① 양수 $a,\ b,\ c$가 $a+b+c=6$을 만족할 때, $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}$의 최솟값을 구하여라.

② 양의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$의 최솟값을 구하여라.

일반 풀이

① 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right) \geq (1+2+3)^2$

$6\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right) \geq 36 \qquad \therefore\ \frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c} \geq 6$

② $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1\right)$

$=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$

$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=2$ ⋯⋯ ㉠

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}\times\frac{a}{c}}=2$ ⋯⋯ ㉡

(단, 등호는 $c=a$일 때 성립)

$\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}=2$ ⋯⋯ ㉢

(단, 등호는 $b=c$일 때 성립)

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geq 6$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $3+6=9$

랑데뷰 풀이

① 코시 엥겔폼에서

$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}+\frac{3^2}{c} \geq \frac{(1+2+3)^2}{a+b+c}=6$

② 코시 엥겔폼에서

$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=\frac{(\sqrt{a+b+c})^2}{a}+\frac{(\sqrt{a+b+c})^2}{b}+\frac{(\sqrt{a+b+c})^2}{c}$

$\geq \frac{(3\sqrt{a+b+c})^2}{a+b+c}=9$

증명

코시 부등식

$\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\}$

$\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{c}}\right)^2\right\}$

$\geq (x+y+z)^2$ 에서 양변을 $(a+b+c)$로 나누면

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$

STEP-3

100) **심화유형 1-1**

전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 양의 정수$\}$의 두 부분집합 $A=\{8, 9\}$, $B=\{8, 10\}$에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 전체집합 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오.

(가) $A\cup X=B\cup X$
(나) $X\cap\{x|x$는 소수$\}=\varnothing$

101)

전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 네 부분 집합 $A=\{6, 10\}$, $B=\{7, 10\}$, $C=\{8, 10\}$, $D=\{x|x=4k+1, k$는 정수$\}$에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 전체집합 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오.

(가) $A\cup X=B\cup X=C\cup X$
(나) $X\cap D=\varnothing$

102)

전체집합 $U=\{x|x$는 20의 양의 약수$\}$의 모든 서로 다른 부분집합을 A_1, A_2, $\cdots$, A_n이라 할 때, 다음 규칙에 따라 $m(A_n)$의 값을 정한다.

(가) 집합 A_n의 원소를 큰 수부터 나열하고, 나열한 수들 사이에 $-$, $+$를 이 순서로 번갈아 넣어 계산한 결과를 $m(A_n)$이라 한다.
(나) $m(\varnothing)=0$

예를 들어
$m(\{1\})=1$, $m(\{5\})=5$,
$m(\{1, 2, 5, 10\})=10-5+2-1$이다. 이때,
$m(A_1)+m(A_2)+\cdots+m(A_n)$의 값을 구하시오.