이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2024 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2024 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통(수학1+수학2) 〉

- 공통 8 – 인수분해(고1)+함수의 연속성+우함수/기함수의 정적분
- 공통 10 – 삼차함수의 비율관계(빠른계산)+절댓값이 붙은 다항함수의 그래프의 개형
- 공통 12 – 최대최소 문제: 관찰 또는 식 세우기. 두 방법 모두 가능.
- 공통 14 – 교육청 2학년 문제를 보는 듯. 삼차함수와 직선의 교점의 개수가 2인 상황+이차함수의 대칭축과 꼭짓점의 위치(고1)
- 공통 15 – 수열+수형도. 전형적인 문제.
- 공통 19 – 삼각함수의 그래프가 아닌 단위원+부등식과 필요충분조건을 이루는 방정식 찾기.
- 공통 20 – 원의 성질, 두 개의 직각삼각형이 주어진 기하적 상황
- 공통 22 – 다항함수의 그래프의 개형을 그릴 때, x절편, y절편을 가장 먼저 결정해야 함. 삼차함수의 특징($-\infty \to 0 \to \infty$)+사이값 정리+귀류법. 계산은 거의 없음.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 26 – 함수의 정의에 대한 근본을 묻는 문제. 쉽지만, 너무나도 좋은 문제.
- 확률과 통계 29 – 수의 대소 관계($a<b$, $a=b$, $a>b$)+중복조합. 교사경 기출에서 자주 다룬 유형의 문제.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 – ‘2022–미적분30’, ‘2023–확률과통계22/미적분22/기하22’의 계보를 잇는 문제. 곡선 위의 점을 먼저 찍고, 곡선을 그리면 어려울 것이 없음.
- 미적분 30 – 변곡접선을 소재로 하는 문제. (※올해 수능에서 삼차함수의 비율관계, 변곡접선, …등의 실전이론이 출제되었습니다. 앞으로의 수능에서 이런 실전이론들이 출제되지 말라는 법은 없습니다.)

〈 기하 〉

- 기하 28 – 공간도형 문제는 결국 평면도형에서 해결해야 함. 타원의 정의+원의 성질+두 개 이상의 직각삼각형이 주어진 기하적 상황
- 기하 30 – 교사경 문제인 ‘2013(10)고3–B형21’의 변형 문제.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 ‘교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구’됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2007개정 교육과정		
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2012	모의평가(6월)	2011년 6월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2012	모의평가(9월)	2011년 9월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2012	대학수학능력	2011년 11월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2014	예비시행	2012년 5월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2013	모의평가(9월)	2012년 9월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2013	대학수학능력	2012년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2014	대학수학능력	2013년 11월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2015	모의평가(6월)	2014년 6월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2015	대학수학능력	2014년 11월
6차 교육과정			2016	모의평가(6월)	2015년 6월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2000	대학수학능력	1999년 11월	2016	대학수학능력	2015년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2009개정 교육과정		
2002	대학수학능력	2001년 11월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2017	대학수학능력	2016년 11월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월	2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월	2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2018	대학수학능력	2017년 11월
7차 교육과정			2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2005	예비시행	2003년 12월	2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2019	대학수학능력	2018년 11월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2020	대학수학능력	2019년 11월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2015개정 교육과정		
2006	대학수학능력	2005년 11월	2021	예시문항	2020년 5월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2021	모의평가(6월)	2020년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2021	모의평가(9월)	2020년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월	2021	대학수학능력	2020년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월	2022	모의평가(6월)	2021년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월	2022	모의평가(9월)	2021년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월	2022	대학수학능력	2021년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월	2023	모의평가(6월)	2022년 6월
2009	모의평가(9월)	2008년 9월	2023	모의평가(9월)	2022년 9월
2009	대학수학능력	2008년 11월	2023	대학수학능력	2022년 11월
2010	모의평가(6월)	2009년 6월	2024	모의평가(6월)	2023년 6월
2010	모의평가(9월)	2009년 9월	2024	모의평가(9월)	2023년 9월
2010	대학수학능력	2009년 11월	2024	대학수학능력	2023년 11월
2011	모의평가(6월)	2010년 6월			
2011	모의평가(9월)	2010년 9월			
2011	대학수학능력	2010년 11월			

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다. 그리고 모든 풀이를 보여준다는 의미에서 교육과정 외의 풀이도 수록하였으나, 이를 반드시 읽어야(공부해야) 하는 것은 아닙니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)
[풀이] (교육과정 외)
[참고] (교육과정 외)

목 차

수학 Ⅰ

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록

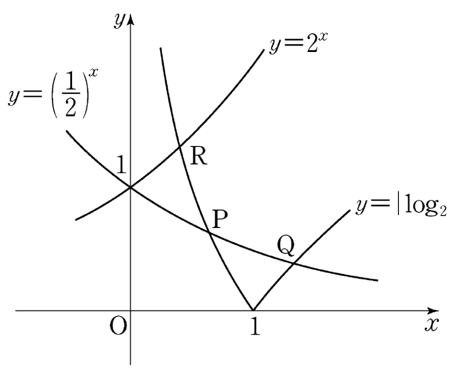
A. 지수함수와 로그함수의 그래프: 역함수(두 곡선의 위치 관계)+직선의 기울기

▶ 실전 이론 p.177

A136

(2011-가형16/나형16)

좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이라 하자. 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<1$
ㄴ. $x_2 y_2-x_3 y_3=0$
ㄷ. $x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A. 지수함수와 로그함수의 그래프: 역함수(두 곡선의 위치 관계)+수직관계

▶ 실전 이론 p.178

A137

(2020(9)-가형15변형)

함수 $y=3^x$의 그래프 위의 x좌표가 양수인 점 A와 함수 $y=-\log_3 x$의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{OB}}$
(나) $\angle \mathrm{AOB}=90^\circ$

직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 2 ② 3 ③ $2\log_2 3$
④ $5\log_5 3$ ⑤ 5

B. 코사인법칙: 할선 정리

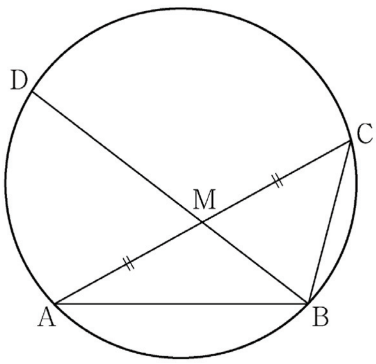
▶ 실전 이론 p.206

B069

●●●

(2023(6)-확률과통계10/미적분10/기하10)

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

B. 코사인법칙: 원에 내접하는 사각형

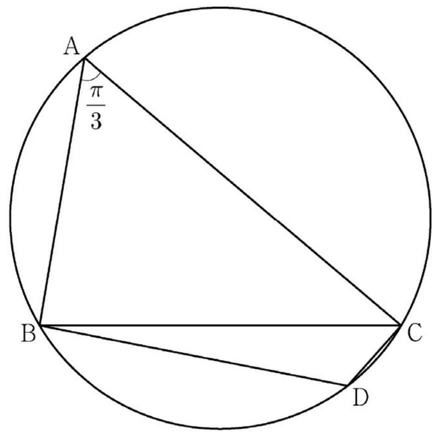
▶ 실전 이론 p.207

B070

○○

(2022(9)-확률과통계12/미적분12/기하12)

반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$

④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

C. 수열의 귀납적 정의: 수형도

▶ 실전 이론 p.230

C158
(2024(9)-확률과통계12/미적분12/기하12)

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

C159
(2024-확률과통계15/미적분15/기하15)

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

C160
(2024(6)-확률과통계15/미적분15/기하15)

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2n-k & (a_n\le 0) \\ a_n-2n-k & (a_n>0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

C161
(2021(9)-나형21)

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n\le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n>a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

A. 로그함수의 그래프: 좌표평면(직선의 기울기)

▶ 기출 문제 p.31

두 개 이상의 직선의 기울기의 대소 관계에 관련된 문제들을 풀어보자.

예제 1

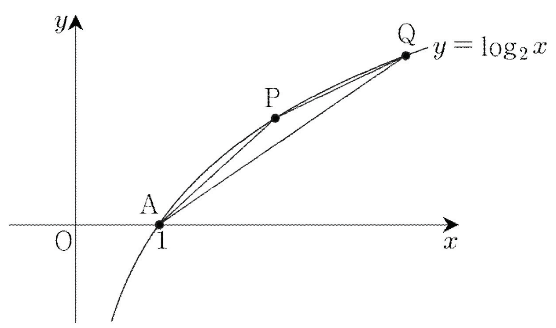
로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 $1<p<q$일 때, 세 수

$$\frac{\log_2 p}{p-1},\ \frac{\log_2 q}{q-1},\ \frac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}$$

의 대소 관계를 밝히시오.

풀이

곡선 $y=\log_2 x$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{P}(p,\ \log_2 p)$, $\mathrm{Q}(q,\ \log_2 q)$를 생각하자.



$\frac{\log_2 p}{p-1}=$(두 점 A, P를 잇는 직선의 기울기)

$\frac{\log_2 q}{q-1}=$(두 점 A, Q를 잇는 직선의 기울기)

$\frac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}=$(두 점 P, Q를 잇는 직선의 기울기)

위의 그림에서 아래의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}<\frac{\log_2 q}{q-1}<\frac{\log_2 p}{p-1}$$

답 풀이 참조

곡선 $y=\log_2 x$가 양의 실수 전체의 집합에서 위로 볼록이므로 위의 부등식이 성립하는 것이다.

지수함수와 로그함수의 참, 거짓 판단 문제는 부등식의 성질과 자주 내적 연계된다.

• 부등식의 성질

실수 a, b, c에 대하여

❶ $a>b$, $b>c$이면 $\quad a>c$

❷ $a>b$이면 $\quad a+c>b+c$, $a-c>b-c$

❸ $a>b$, $c>0$이면 $\quad ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

❹ $a>b$, $c<0$이면 $\quad ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

다음의 필요충분조건이 성립함을 알 수 있다.

양수 a, b, c, d에 대하여

$ab>cd \Leftrightarrow \frac{a}{c}>\frac{d}{b}$ ($\because$ ❸) $\quad\cdots$㉠

양수 a, b, d와 음수 c에 대하여

$ab>cd \Leftrightarrow \frac{a}{c}<\frac{d}{b}$ ($\because$ ❹) $\quad\cdots$㉡

증명

㉠($\Rightarrow$):

양변을 $bc(>0)$로 나누면

$\frac{ab}{bc}>\frac{cd}{bc}$, 즉 $\frac{a}{c}>\frac{d}{b}$

㉠($\Leftarrow$):

양변에 $bc(>0)$를 곱하면

$\frac{a}{c}bc>\frac{d}{b}bc$, 즉 $ab>cd$

㉡($\Rightarrow$):

양변을 $bc(<0)$로 나누면

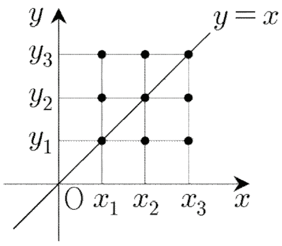
$\frac{ab}{bc}<\frac{cd}{bc}$, 즉 $\frac{a}{c}<\frac{d}{b}$

㉡($\Leftarrow$):

양변에 $bc(<0)$를 곱하면

$\frac{a}{c}bc>\frac{d}{b}bc$, 즉 $ab>cd$

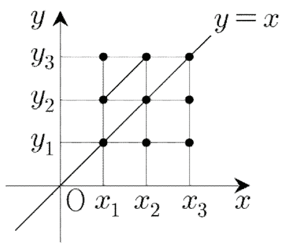
좌표평면 위에 아래 그림과 같이 9개의 점이 있다고 하자.



(단, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$)

다음과 같은 등식들이 성립한다.

- 평행:

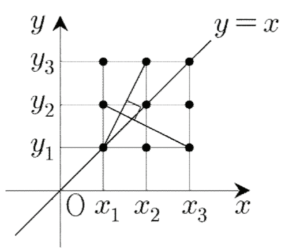


$$\frac{y_3-y_2}{x_2-x_1}=1$$

(두 점 $(x_1,\ y_2)$, $(x_2,\ y_3)$을 잇는 직선과 직선 $y=x$는 서로 평행하다.)

이때, 위의 등식과 등식 $y_3-y_2=x_2-x_1$(두 선분의 길이가 같다.)는 필요충분조건이다.

- 수직:



$$\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}\times\frac{y_3-y_1}{x_2-x_1}=-1$$

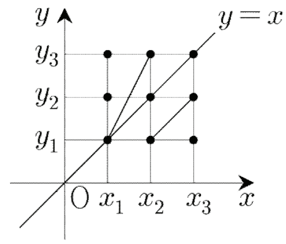
(두 점 $(x_1,\ y_2)$, $(x_3,\ y_1)$을 잇는 직선과 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_3)$을 잇는 직선은 서로 수직이다.)

다음의 부등식이 성립한다. (두 직선의 기울기가 모두 음수일 때, 대소 관계를 주의하자!)

- 두 직선의 기울기의 대소 관계: 기울기가 양수인 경우

$$\frac{y_3-y_1}{x_2-x_1}>\frac{y_2-y_1}{x_3-x_2}$$

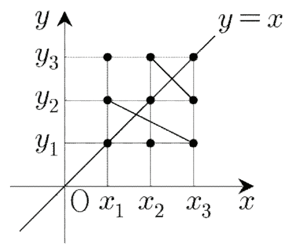
$$\Leftrightarrow (y_3-y_1)(x_3-x_2)>(y_2-y_1)(x_2-x_1)$$



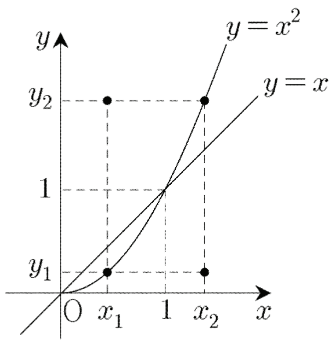
- 두 직선의 기울기의 대소 관계: 기울기가 음수인 경우

$$\frac{y_2-y_3}{x_3-x_2}<\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}$$

$$\Leftrightarrow (y_2-y_3)(x_3-x_1)<(y_1-y_2)(x_3-x_2)$$



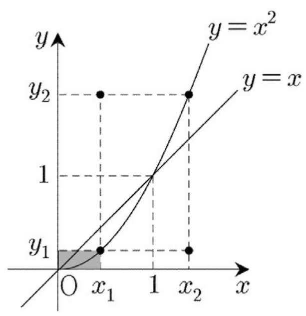
아래의 예를 생각해보자.

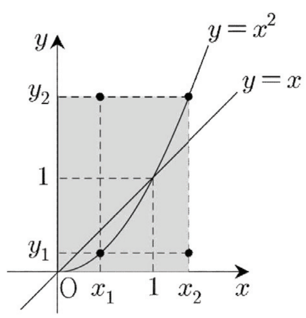


위의 그림에서 아래의 부등식이 성립한다.

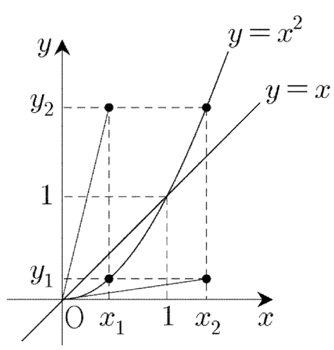
$x_1y_1 < x_2y_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_2} < \dfrac{y_2}{x_1}$

(즉, 두 직사각형의 넓이의 대소 비교 ⇔ 두 직선의 기울기의 대소 비교)





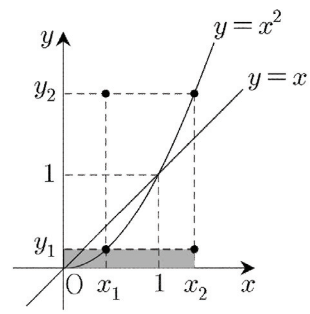
위의 두 직사각형의 넓이를 비교해보면 $x_1y_1 < x_2y_2$이다.

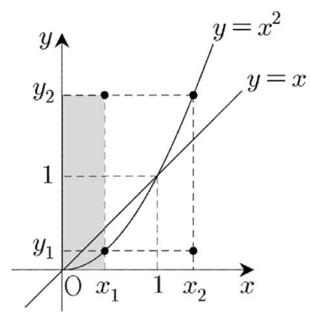


위의 두 직선의 기울기를 비교해보면 $\dfrac{y_1}{x_2} < \dfrac{y_2}{x_1}$이다.

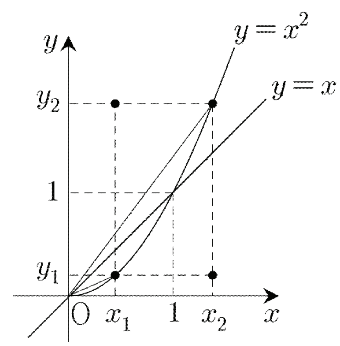
$x_2y_1 < x_1y_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_1} < \dfrac{y_2}{x_2}$

(즉, 두 직사각형의 넓이의 대소 비교 ⇔ 두 직선의 기울기의 대소 비교)



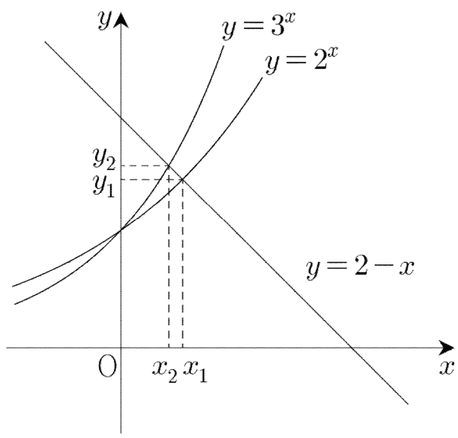


위의 두 직사각형의 넓이를 비교해보면 $x_2y_1 < x_1y_2$이다.



위의 두 직선의 기울기를 비교해보면 $\dfrac{y_1}{x_1} < \dfrac{y_2}{x_2}$이다.

직선 $y=2-x$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$과 만나는 두 교점의 좌표가 아래 그림과 같다고 하자.



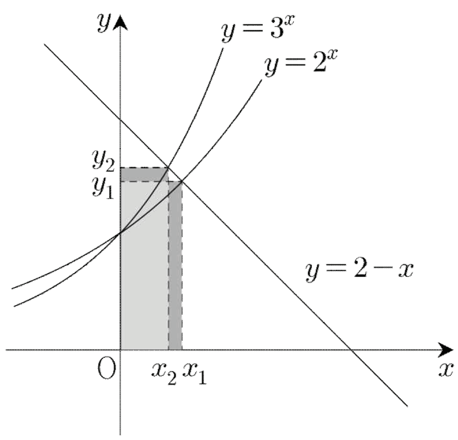
다음이 등식과 부등식이 성립한다.

교점: $0<x_2<x_1<2$, $1<y_1<y_2<2$

기울기: $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$ ($\Leftrightarrow$ $x_1-x_2=y_2-y_1$)

기울기 대소 비교: $\dfrac{y_1}{x_1}<\dfrac{y_2}{x_2}$ $\Leftrightarrow$ $x_2y_1<x_1y_2$

$x_1y_1>x_2y_2$(넓이) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{y_1}{x_2}>\dfrac{y_2}{x_1}$(기울기)



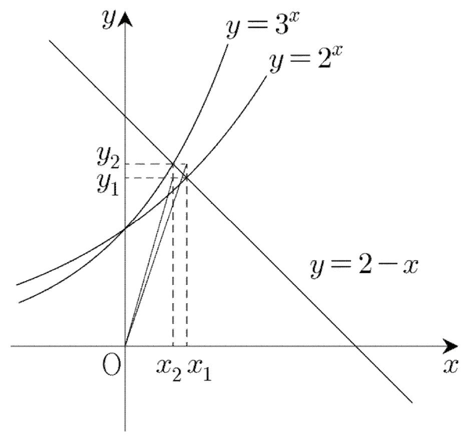
위의 그림에서 두 직사각형의 공통부분의 넓이를 제외한 나머지 두 직사각형의 넓이는 각각

$y_1(x_1-x_2)$, $x_2(y_2-y_1)$

이다. 이때, $x_1-x_2=y_2-y_1$

이므로 $y_1(x_1-x_2)>x_2(y_2-y_1)$

그러므로 $x_1y_1>x_2y_2$



위의 그림에서 두 직선의 기울기를 비교하면

$\dfrac{y_1}{x_2}>\dfrac{y_2}{x_1}$

임을 알 수 있다.

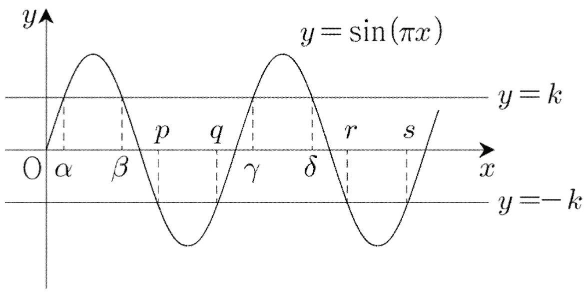
이 문제의 경우 두 직사각형의 넓이의 대소관계가 두 직선의 기울기의 대소관계보다 명확하게 보인다.

B. 삼각함수와 방정식: 실근의 합(대칭성)

▶ 기출 문제 p.71

예제 1

곡선 $y=\sin(\pi x)$와 두 직선 $y=k$, $y=-k$의 교점의 x좌표가 아래 그림과 같다고 하자. (단, $k>0$)



이때, 다음의 값을 구하시오.

(1) 선대칭

$\alpha+\beta$, $\gamma+\delta$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\alpha+\delta$, $\beta+\gamma$

(2) 점대칭

$\beta+p$, $\alpha+q$, $\alpha+\beta+p+q$, $\alpha+s$, $\beta+r$

(3) 주기성

$\gamma-\alpha$, $\delta-\beta$

풀이

(1) 선대칭

$\alpha+\beta=1$ $\left(\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\right)$

($\because$ 주어진 곡선은 직선 $x=\dfrac{1}{2}$에 대하여 대칭이다.)

$\gamma+\delta=5$ $\left(\Leftrightarrow\dfrac{\gamma+\delta}{2}=\dfrac{5}{2}\right)$

($\because$ 직선 $x=\dfrac{5}{2}$에 대하여 대칭)

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=6$ $\left(\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}=\dfrac{3}{2}\right)$

($\because$ 직선 $x=\dfrac{3}{2}$에 대하여 대칭)

$\alpha+\delta=3$ $\left(\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+\delta}{2}=\dfrac{3}{2}\right)$

($\because$ 직선 $x=\dfrac{3}{2}$에 대하여 대칭)

$\beta+\gamma=3$ $\left(\Leftrightarrow\dfrac{\beta+\gamma}{2}=\dfrac{3}{2}\right)$

($\because$ 직선 $x=\dfrac{3}{2}$에 대하여 대칭)

(2) 점대칭

$\beta+p=2$ $\left(\because\dfrac{\beta+p}{2}=1\right)$

($\because$ 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭)

$\alpha+q=2$ $\left(\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+q}{2}=1\right)$

($\because$ 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭)

$\alpha+\beta+p+q=4$ $\left(\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+\beta+p+q}{4}=1\right)$

($\because$ 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭)

$\alpha+s=4$ $\left(\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+s}{2}=2\right)$

($\because$ 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭)

$\beta+r=4$ $\left(\Leftrightarrow\dfrac{\beta+r}{2}=2\right)$

($\because$ 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭)

(3) 주기성

주어진 곡선의 주기는 2이므로

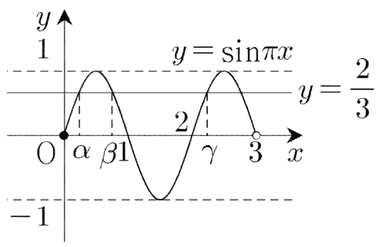
$\gamma-\alpha=2$

$\delta-\beta=2$

답 풀이 참조

예제 2

아래 그림처럼 함수 $f(x)=\sin\pi x(0\le x<3)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$가 만나는 네 개의 교점 중에서 세 점의 x좌표를 각각 α, β, γ라고 하자. $f(\alpha+\beta+\gamma)$의 값을 구하여라.



풀이

함수 $y=\sin\pi x$의 그래프는 직선 $y=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$에서 $\alpha+\beta=1$

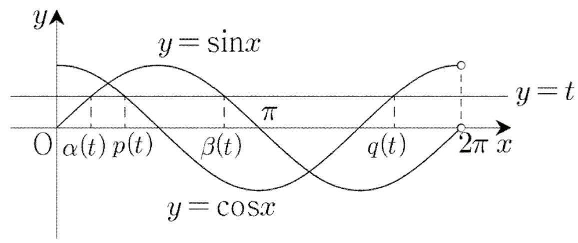
$\therefore\ f(\alpha+\beta+\gamma)=f(1+\gamma)=\sin(\pi+\pi\gamma)$

$=-\sin\pi\gamma=-\frac{2}{3}$

답 $-\frac{2}{3}$

예제 3

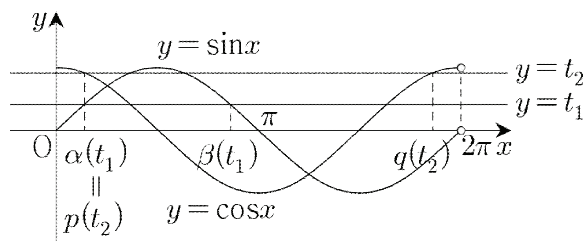
구간 $[0,\ 2\pi)$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=t(-1<t<1)$의 두 교점의 x좌표를 각각 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=t$의 두 교점의 x좌표를 각각 $p(t)$, $q(t)$라고 하자. (단, $\alpha(t)<\beta(t)$, $p(t)<q(t)$)



$\alpha(t_1)=p(t_2)$인 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$일 때, 다음의 값을 구하시오.

(1) $q(t_2)-\beta(t_1)$　　　　(2) t_1, t_2

풀이



$\alpha(t_1)=p(t_2)=a$로 두면

$\cos a-\sin a=\frac{1}{2}$　　$\cdots$㉠

양변을 제곱하여 정리하면

$1-2\cos a\sin a=\frac{1}{4}$, $\cos a\sin a=\frac{3}{8}$

$(\cos a+\sin a)^2=(\cos a-\sin a)^2+4\cos a\sin a$

$=\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$　　$\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 두 실수 $\cos a$, $\sin a$는 이차방정식

$x^2-\frac{\sqrt{7}}{2}x+\frac{3}{8}=0$

의 서로 다른 두 실근이다.

$\cos a=\frac{\sqrt{7}+1}{4}(=t_2)$, $\sin a=\frac{\sqrt{7}-1}{4}(=t_1)$

$\therefore\ q(t_2)-\beta(t_1)=2\pi-p(t_2)-\{\pi-\alpha(t_1)\}$

$=\pi+\alpha(t_1)-p(t_2)=\pi$

답 (1) π (2) $t_1=\frac{\sqrt{7}-1}{4}$, $t_2=\frac{\sqrt{7}+1}{4}$

C. 등비수열의 합: 기하급수적

▶ 기출 문제 p.101

• 기하급수적으로 커진다.

첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음의 부등식이 항상 성립한다.

모든 자연수 n에 대하여
$a_1+a_2+\cdots+a_n<a_{n+1}$

예를 들어
$a_1<a_2$ $(1<2)$
$a_1+a_2<a_3$ $(1+2<4)$
$a_1+a_2+a_3<a_4$ $(1+2+4<8)$
$\vdots$
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9<a_{10}$
$(1+2+4+\cdots+512<1024)$

첫째항이 양수이고 공비가 1 보다 큰 등비수열은 기하급수적으로 증가한다. 이를 위의 부등식과 연관하여 기억해둘 필요가 있다.

예제 1

$a_1=1$인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하자.
$\sum_{n=1}^{5}a_n=61$, $\sum_{n=1}^{5}|a_n|=121$일 때, r의 값을 구하시오.
(단, r은 정수이다.)

풀이
만약 r이 자연수이면
$$\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}|a_n|$$
이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 r은 음의 정수이다.
만약 $r=-4$이면
$$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=1+4+16+64+256>121$$
$|r|$이 5 이상이면 마찬가지의 이유로 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|$의 값은 121 보다 크다.
따라서 $|r|$은 1 또는 2 또는 3이다.
$r=-1$: $\sum_{n=1}^{5}|a_n|=1+1+1+1+1=5<121$ (×)
$r=-2$: $\sum_{n=1}^{5}|a_n|=1+2+4+8+16=31<121$ (×)
따라서 $r=-3$이다.
$r=-3$: $\sum_{n=1}^{5}a_n=1-3+9-27+81=61$, (○)
$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=1+3+9+27+81=121$ (○)
$\therefore$ $r=-3$

답 -3

C. 수열의 귀납적 정의: 군수열(마디가 등비)(1)

▶ 기출 문제 p.123

예를 들어 모든 자연수는

$k\times 2^p$ (k는 음이 아닌 홀수, p는 음이 아닌 정수)

의 꼴로 표현이 가능하다.

$p=0$: 1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$

$p=1$: 2, 6, 10, 14, 18, $\cdots$

$p=2$: 4, 12, 20, 28, 36, $\cdots$

$\vdots$

예를 들어 수열 $\{a_n\}$의 규칙성이

a_1, a_2, a_4, a_8, a_{16}, $\cdots$, $a_{2^{n-1}}$, $\cdots$

을 기준으로 나타나는 경우도 있다.

위의 경우에는

$(\boxed{a_{2^0}})$, $(\boxed{a_{2^1}}, a_{2^1+1})$, $(\boxed{a_{2^2}}, a_{2^2+1}, \cdots, a_{2^3-1})$, $(\boxed{a_{2^3}}, a_{2^3+1}, \cdots, a_{2^4-1})$, $\cdots$

와 같은 군수열을 만들고, $\boxed{}$ 안의 수열

a_{2^0}, a_{2^1}, a_{2^2}, a_{2^3}, $\cdots$, $a_{2^{n-1}}$, $\cdots$

즉, a_1, a_2, a_4, a_8, $\cdots$, $a_{2^{n-1}}$, $\cdots$

의 규칙성을 먼저 파악한다. 그리고 나머지 항들의 값을 구하면 된다.

※ 군수열은 몇 개의 임의의 항을 차례로 묶어 군으로 나눈 수열을 말한다. 예를 들어

(a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_5, a_6, a_7), $(a_8, a_9, \cdots, a_{15})$, $\cdots$

는 군수열이다.

예제 1

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}=1+a_n,\ a_{2n+1}=\frac{1}{a_{2n}}$$

을 만족시킨다. $a_k=\dfrac{1}{7}$일 때, 자연수 k의 값을 구하시오.

[4점]

풀이

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_1=1$

$a_2=1+a_1=2$

$a_4=1+a_2=3$

$a_8=1+a_4=4$

$a_{16}=1+a_8=5$

$a_{32}=1+a_{16}=6$

$a_{64}=1+a_{32}=7$

그런데

$a_{65}=\dfrac{1}{a_{64}}=\dfrac{1}{7}$

이므로

$\therefore\ k=65$

답 65

※ a_1, a_2, a_3, a_4, $\cdots$을 모두 나열해서 규칙을 찾는 문제가 아니다.

a_{2^0}, a_{2^1}, a_{2^2}, a_{2^3}, $\cdots$

을 나열하여 규칙성을 찾고 나서 나머지 항들의 값을 구하면 된다.

예제 2

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$

(나) $a_{2n+1}=a_n+1$

$a_7=3$일 때, $\sum_{n=1}^{31}a_n$의 값을 구하시오.

풀이1

$a_7=a_3+1=3(\because(나))$, $a_3=2$

$a_3=a_1+1=2(\because(나))$, $a_1=1$

$a_2=a_1-1=0(\because(가))$

마찬가지의 방법으로 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$1(a_1)$,

⇦ 합이 1 (항의 개수는 2^0)

$0(a_2)$, 2,

⇦ 합이 2 (항의 개수는 2^1)

$-1(a_4)$, 1, 1, 3,

⇦ 합이 4 (항의 개수는 2^2)

$-2(a_8)$, 0, 0, 2, 0, 2, 2, 4,

⇦ 합이 8 (항의 개수는 2^3)

$-3(a_{16})$, -1, -1, 1, -1, 1, 1, 3, -1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, $5(a_{31})$

⇦ 합이 16 (항의 개수는 2^4)

⋮

$\therefore \sum_{n=1}^{31}a_n=1+2+4+8+16=31$

답 31

풀이2

$a_7=a_3+1=3(\because(나))$, $a_3=2$

$a_3=a_1+1=2(\because(나))$, $a_1=1$

$a_2=a_1-1=0(\because(가))$

(가)+(나): $a_{2n}+a_{2n+1}=2a_n$

$a_2+a_3=2a_1$, …㉠

$a_4+a_5=2a_2$, …㉡

$a_6+a_7=2a_3$, …㉢

㉡+㉢: $a_4+a_5+a_6+a_7=2(a_2+a_3)=2^2a_1$ $(\because㉠)$

다음과 같이 추론할 수 있다.

$a_1=a_1$,

$a_1+(a_2+a_3)=a_1+2a_1$,

$a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)=a_1+2a_1+2^2a_1$,

⋮

$a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_8+\cdots+a_{15})$
$+(a_{16}+\cdots+a_{31})$
$=a_1+2a_1+2^2a_1+2^3a_1+2^4a_1$
$=1+2+4+8+16=31$

답 31

자.

점 P는 두 곡선 $y=-a^x$, $y=\log_{\frac{1}{a}} x$와 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

(점 P의 y좌표)

$=-a^t=\log_{\frac{1}{a}} t=-t$ ⋯ ㉠

곡선 $y=-a^x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 $y=-x$의 기울기와 같으므로

(점 P에서의 미분계수)

$=-a^t \ln a=-\dfrac{1}{t\ln a}=-1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=e^{\frac{1}{e}}$, $t=e$

[참고4] 교육과정 외 (이과생을 위한 설명)

보기 ㄷ에서 주어진 두 함수의 그래프가 접할 때의 a, k의 값을 구하자.

두 함수 $y=ka^x$, $y=\log_a x$의 그래프의 접점을 P, 점 P의 x좌표를 t라고 하자. 그리고 함수 $y=ka^x$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 m이라고 하자. (단, $m>0$)

점 P는 두 곡선 $y=ka^x$, $y=\log_a x$ 위에 있으므로

$ka^t=\log_a t$ ⋯ ㉠

곡선 $y=ka^x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 각각 m이므로

$ka^t \ln a=\dfrac{1}{t\ln a}=m$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$t=e^m$, $a=e^{\frac{1}{m\times e^m}}$, $k=\dfrac{m}{a^{e^m}\ln a}$

점 P의 좌표는

$P\left(e^m, \dfrac{m}{\ln a}\right)$

A135 | 답 192

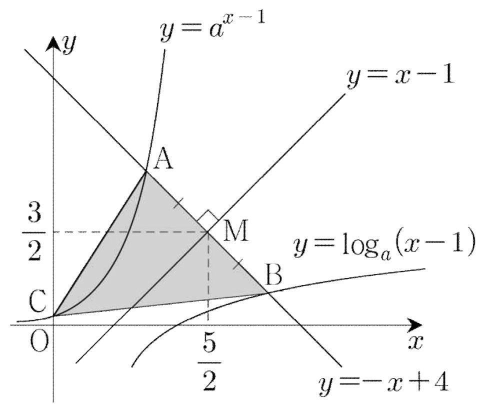
[풀이]

문제에서 주어진 두 곡선을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 두 곡선

$y=a^x$, $y=\log_a x$

와 각각 일치한다. 그런데 이 두 곡선은 서로 역함수 관계이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 문제에서 주어진 두 곡선은 직선 $y=x-1$에 대하여 서로 대칭이다. (아래 그림)



위의 그림에서 두 점 A, B는 직선 $y=x-1$에 대하여 서로 대칭이다. 그리고 이 두 점은 두 직선

$y=x-1$, $y=-x+4$의 교점 $M\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$에 대하여 서로 대칭이기도 하다.

$\overline{AM}=\overline{BM}=\sqrt{2}$이고, 직선 AB의 기울기가 -1이므로

점 M을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 점 $A\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$이고, 점 M을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면

점 $B\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$이다.

곡선 $y=a^{x-1}$은 점 A를 지나므로

$\dfrac{5}{2}=a^{\frac{1}{2}}$, $a=\dfrac{25}{4}$

곡선 $y=\left(\dfrac{25}{4}\right)^{x-1}$의 y절편은 $\dfrac{4}{25}$이므로

$C\left(0, \dfrac{4}{25}\right)$

$\therefore$ $S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times$(점 C에서 직선 AB까지의 거리)

$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{4-\dfrac{4}{25}}{\sqrt{2}}=\dfrac{96}{25}$

$\therefore$ $50S=192$

답 192

A136 | 답 ③

[풀이] ★

$0<x\le 1$일 때, $|\log_2 x|=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}} x$

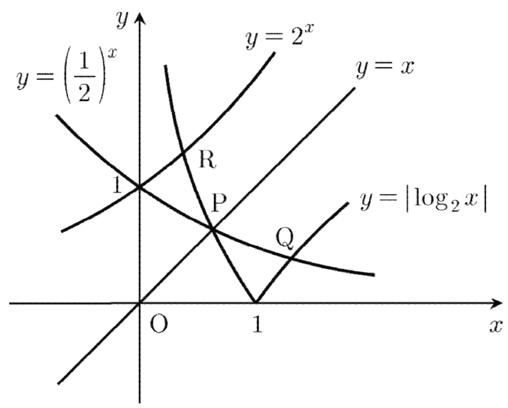
$x>1$일 때, $|\log_2 x|=\log_2 x$

함수 $y=|\log_2 x|$의 방정식은 다음과 같다.

$$y=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x & (0<x\leq 1)\\ \log_2 x & (x>1)\end{cases}$$

지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$와 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 서로 역함수이다. 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 점 P는 직선 $y=x$ 위에 있다.

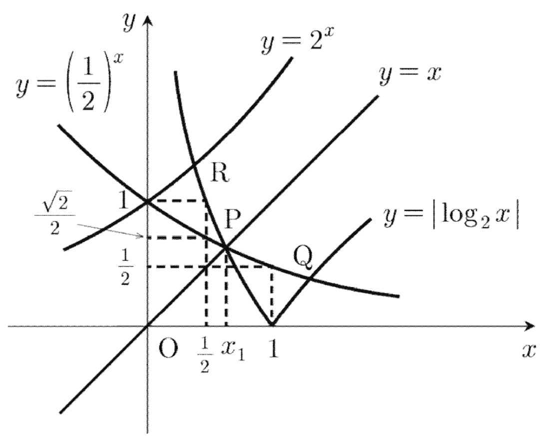
또한 지수함수 $y=2^x$와 로그함수 $y=\log_2 x$는 서로 역함수이다. 두 곡선 $y=\log_2 x\left(y=\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$, $y=2^x\left(y=\log_{\frac{1}{2}}x\right)$는 직선 $y=x(y=x)$에 대하여 서로 대칭이므로 두 점 Q, R은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.



$x_2=y_3$, $y_2=x_3$ $\cdots(*)$

▸ ㄱ. (참)

곡선 $y=|\log_2 x|$는 두 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $(1,\ 0)$을 지나고, 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$는 두 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 지난다.



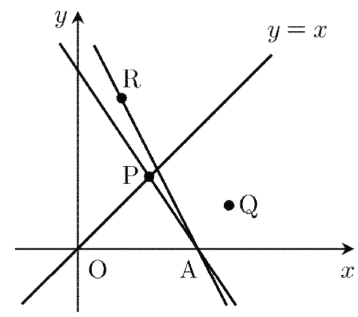
위의 그림에서 $\frac{1}{2}<x_1<1$

▸ ㄴ. (참)

$x_2y_2-x_3y_3=x_2y_2-y_2x_2=0$ $(\because (*))$

▸ ㄷ. (거짓)

점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$라고 하자.



(직선 AP의 기울기)$=\frac{y_1}{x_1-1}$

(직선 AR의 기울기)$=\frac{y_3}{x_3-1}=\frac{x_2}{y_2-1}$ $(\because (*))$

위의 그림에서

(직선 AR의 기울기)$<$(직선 AP의 기울기)

$$\frac{x_2}{y_2-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$$

양변에 양수 $(x_1-1)(y_2-1)$을 곱하면

$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

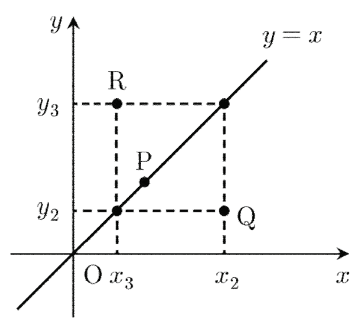
답 ③

[참고1]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 보일 수도 있다.

▸ ㄴ. (참)

두 점 Q, R은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.



위의 그림에서 서로 다른 세 점

$(0,\ 0)$, $(x_3,\ y_2)$, $(x_2,\ y_3)$이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$\frac{y_2-0}{x_3-0}=\frac{y_3-0}{x_2-0}$ 즉, $\frac{y_2}{x_3}=\frac{y_3}{x_2}$

분수식을 정리하면

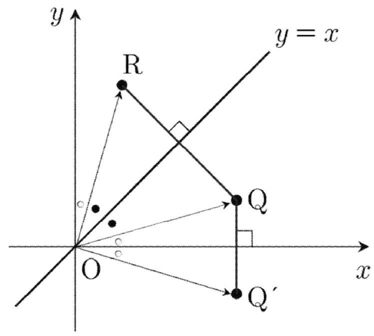
$x_2y_2-x_3y_3=0$

[참고2] 교육과정 외 (이과생을 위한 설명)

벡터의 내적을 이용하여 보기 ㄴ이 참임을 보일 수도 있다.

▸ ㄴ. (참)

점 Q를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q′이라고 하자.



위의 그림에서 두 벡터 $\overrightarrow{OQ'}$, $\overrightarrow{OR}$이 서로 수직이므로

$\overrightarrow{OQ'} \cdot \overrightarrow{OR} = (x_2,\ -y_2) \cdot (x_3,\ y_3)$

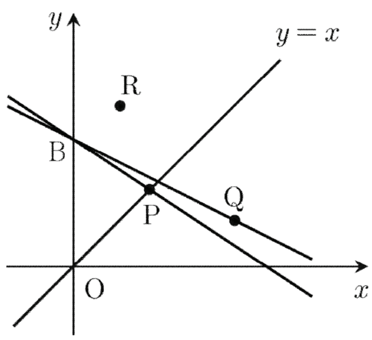
$= x_2x_3 - y_2y_3 = x_2y_2 - x_3y_3 = 0$

[참고3]

보기 ㄷ이 거짓임을 다음과 같이 보일 수도 있다.

▸ ㄷ. (거짓)

점 $B(0,\ 1)$이라고 하자.



(직선 BP의 기울기)$= \dfrac{y_1 - 1}{x_1} = \dfrac{x_1 - 1}{y_1}$

($\because$ 점 P는 직선 $y = x$ 위의 점이다.)

(직선 BQ의 기울기)$= \dfrac{y_2 - 1}{x_2}$

위의 그림에서

(직선 BP의 기울기)$<$(직선 BQ의 기울기)

$\dfrac{x_1 - 1}{y_1} < \dfrac{y_2 - 1}{x_2}$

양변에 양수 x_2y_1을 곱하면

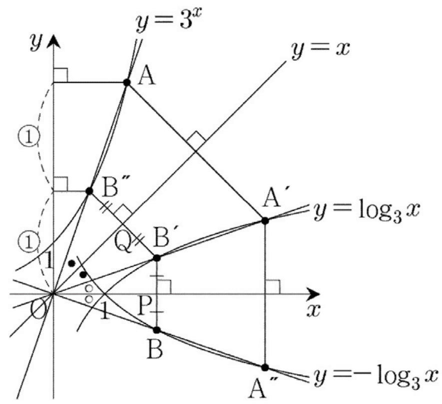
$x_2(x_1 - 1) < y_1(y_2 - 1)$

A137 | 답 ③

[풀이]

세 곡선 $y = 3^x$, $y = \log_3 x$, $y = -\log_3 x$와 직선 $y = x$를 한 평면 위에 나타내면 다음과 같다.

이때, 두 곡선 $y = 3^x$, $y = \log_3 x$는 직선 $y = x$에 대하여 서로 대칭이고, 두 곡선 $y = \log_3 x$, $y = -\log_3 x$는 x축에 대하여 서로 대칭이다.



(단, ●+○=45°)

점 A를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 A′를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″라고 하자. 이때, 점 A′는 곡선 $y = \log_3 x$ 위에 있고, 점 A″는 곡선 $y = -\log_3 x$ 위에 있다.

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′, 점 B′를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점을 B″라고 하자. 이때, 점 B′는 곡선 $y = \log_3 x$ 위에 있고, 점 B″는 곡선 $y = 3^x$ 위에 있다.

선분 B″B′가 직선 $y = x$와 만나는 점을 Q, 선분 B′B가 x축과 만나는 점을 P라고 하자.

두 직각삼각형 BOP, B′OP는 SAS합동이므로

$\angle BOP = \angle B'OP (= \circ)$

두 직각삼각형 B′OQ, B″OQ는 SAS합동이므로

$\angle B'OQ = \angle B''OQ (= \bullet)$

위의 그림에서

$\bullet + \circ = 45°$ 이므로

$\angle B''OB = \bullet + \bullet + \circ + \circ = 90°$

즉, 점 B″는 점 O를 지나고 직선 OB에 수직인 직선 위에 있다. 그런데 조건 (나)에 의하여 점 A도 점 O를 지나고 직선 OB에 수직인 직선 위에 있으므로 세 점 O, B″, A는 한 직선 위에 있다. (그러므로 세 점 O, B′, A′도 한 직선 위에 있고, 세 점 O, B, A″도 한 직선 위에 있다.)

점 A의 좌표를 $(t,\ 3^t)$로 두면

점 B″의 좌표는 $\left(\dfrac{t}{2},\ 3^{\frac{t}{2}}\right)$이다.

조건 (가)에 의하여

(점 A의 y좌표)$= 2 \times$(점 B″의 y좌표)

이므로

$3^t = 2 \times 3^{\frac{t}{2}}$, $3^{\frac{t}{2}} = 2$, $\dfrac{t}{2} = \log_3 2$, $t = 2\log_3 2$

점 A의 좌표는 $(2\log_3 2,\ 4)$이므로

직선 OA의 기울기는

$\angle \mathrm{BO_2A} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{BO_1A} = \frac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\frac{\theta_1}{2} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 $\mathrm{O_2BC}$에서

$\overline{\mathrm{BC}} = k$, ($\because \angle \mathrm{AO_1B} = \angle \mathrm{BO_1C}$)

$\overline{\mathrm{BO_2}} = 2\sqrt{2}k$, $\angle \mathrm{CO_2B} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{CO_1B} = \frac{\theta_1}{2}$이므로

코사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{O_2C}} = \boxed{\frac{7}{3}k}$이다.

($\because \overline{\mathrm{O_2C}} = x$로 두면

$k^2 = 8k^2 + x^2 - 2\times 2\sqrt{2}k\times x\cos\frac{\theta_2}{2}$,

$k^2 = 8k^2 + x^2 - \frac{16}{3}kx$, $3x^2 - 16kx + 21k^2 = 0$,

$(3x-7k)(x-3k) = 0$, $x = \frac{7k}{3}$)

$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{O_2D}} + \overline{\mathrm{O_2C}} = \overline{\mathrm{O_1O_2}} + \overline{\mathrm{O_2C}}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}} = k : \left(\boxed{\frac{3k}{2}} + \boxed{\frac{7k}{3}}\right)$이다.

(가): $f(k) = 3k$

(나): $p = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(다): $g(k) = \frac{7}{3}k$

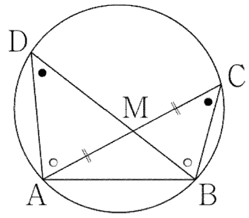
$\therefore f(p)\times g(p) = 2\sqrt{2}\times\frac{14\sqrt{2}}{9} = \frac{56}{9}$

답 ②

B069 | 답 ③

[풀이]

$\overline{\mathrm{AC}} = p$, $\overline{\mathrm{BM}} = q$로 두자.



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$2^2 = p^2 + 3^2 - 2\times p\times 3\times\cos(\angle \mathrm{BAC})$,

$4p^2 - 21p + 20 = 0$, $(4p-5)(p-4) = 0$,

$p = 4$ ($\because p > 3$)

삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$q^2 = 2^2 + 3^2 - 2\times 2\times 3\times\cos(\angle \mathrm{BAC})$

풀면 $q = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

원주각의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{BDA} = \bullet$,

$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{DBC} = \circ$

이므로 두 삼각형 AMD, BMC는 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{AM}} : \overline{\mathrm{MD}} = \overline{\mathrm{BM}} : \overline{\mathrm{MC}}$, 즉 $\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{MC}} = \overline{\mathrm{DM}}\times\overline{\mathrm{MB}}$

(이 등식은 공식으로 암기해도 좋다.)

$2\times 2 = \overline{\mathrm{DM}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$\therefore \overline{\mathrm{DM}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$

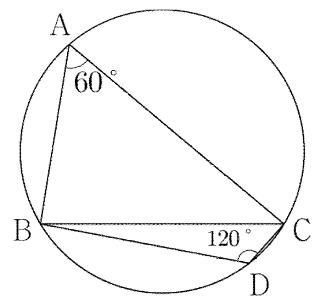
답 ③

B070 | 답 ②

[풀이]

사각형 ABDC가 원에 내접하므로

$\angle \mathrm{BDC} = 180^\circ - \angle \mathrm{CAB} = 120^\circ$



사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 60^\circ} = 2\mathrm{R}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{21}$

$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle \mathrm{BCD})} = 2R$, $\overline{\mathrm{BD}} = 8$

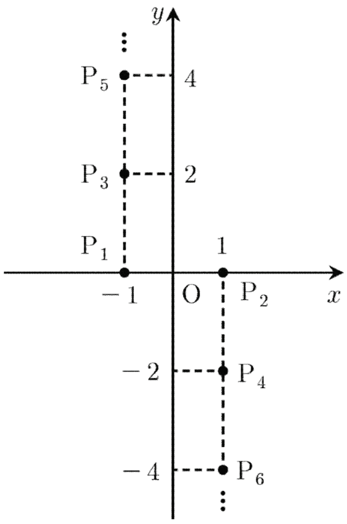
이제 $\overline{\mathrm{CD}} = x$로 두자.

삼각형 BDC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos 120^\circ = \frac{8^2 + x^2 - (2\sqrt{21})^2}{2\times 8\times x}$, $x = 2$

$\therefore \overline{\mathrm{BD}} + \overline{\mathrm{CD}} = 8 + 2 = 10$

답 ②



n이 홀수일 때, 점 P_n의 좌표는

$\mathrm{P}_n(-1,\ n-1)$

n이 짝수일 때, 점 P_n의 좌표는

$\mathrm{P}_n(1,\ -n+2)$

따라서 점 P_{25}의 좌표는 $\mathrm{P}_{25}(-1,\ 24)$

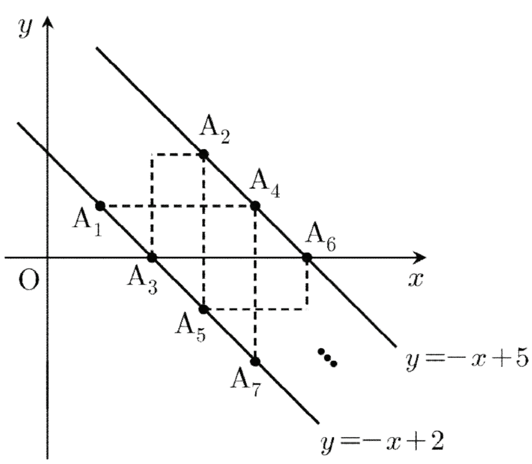
$\therefore\ a+b=23$

답 23

C157 | 답 ①

※ 수열의 귀납적 정의에서는 일반항을 유도하지 않지만 등차수열, 등비수열, (발견적 추론으로) 규칙이 명확한 수열의 경우 수열의 귀납적 정의에서 일반항을 유도하는 것이 가능합니다.

[풀이]



모든 자연수 n에 대하여

점 A_{2n-1}은 직선 $y=-x+2$ 위에 있고,

점 A_{2n}은 직선 $y=-x+5$ 위에 있다.

점 A_{2n-1}의 x좌표를 a_n이라고 하면

수열 $\{a_n\}$은 첫째항과 공차가 각각 1인 등차수열이다.

일반항 a_n은

$a_n=n$

점 A_{2n}의 x좌표를 b_n이라고 하면

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3이고, 공차가 1인 등차수열이다.

일반항 b_n은

$b_n=n+2$

점 $\mathrm{A}_k(7,\ -2)$는 직선 $y=-x+5$ 위에 있으므로

$b_n=n+2=7$에서 $n=5$

이때, $k=2n=10$

점 $\mathrm{A}_l(9,\ -7)$은 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

$a_n=n=9$에서 $n=9$

이때, $l=2n-1=17$

$\therefore\ k+l=27$

답 ①

C158 | 답 ①

[풀이]

a_2+a_4가 짝수이므로

$a_2,\ a_4$는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.

- (1) $a_2,\ a_4$가 모두 짝수인 경우

$a_3=\frac{1}{2}a_2$

a_3이 짝수인 경우: $a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{4}a_2$

이때, $a_2+a_4=a_2+\frac{1}{4}a_2=\frac{5}{4}a_2=40$

$a_2=32\ (a_3=16,\ a_4=8)$

$a_2=a_1+1$ 또는 $a_2=\frac{1}{2}a_1$이므로

$\therefore\ a_1=31$ 또는 $a_1=64$

a_3이 홀수인 경우: $a_4=a_3+1=\frac{1}{2}a_2+1$

이때, $a_2+a_4=a_2+\frac{1}{2}a_2+1=\frac{3}{2}a_2+1=40$

$a_2=26\ (a_3=13,\ a_4=14)$

$a_2=a_1+1$ 또는 $a_2=\frac{1}{2}a_1$이므로

$\therefore\ a_1=25$ 또는 $a_1=52$

- (2) $a_2,\ a_4$가 모두 홀수인 경우

$a_3=a_2+1(=\text{짝수})$

$a_4=\dfrac{a_2+1}{2}$

$$a_2+a_4=a_2+\frac{a_2+1}{2}=\frac{3a_2+1}{2}=40$$

이를 만족시키는 정수 a_2는 존재하지 않는다.

(1), (2)에서 구하는 값은

$31+64+25+52=172$

답 ①

C159 | 답 ③

[풀이]

$a_6+a_7=3=1+2$이므로

$a_6=2,\ a_7=1$ 또는 $a_6=1,\ a_7=2$

(1) $a_6=2,\ a_7=1$인 경우

문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하여

수열 $a_7,\ a_6,\ a_5,\ a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1$을 쓰면

아래 표와 같다.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th><th>a_6</th><th>a_7</th><th>a_8</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">1</td><td rowspan="7">2</td><td rowspan="7">1</td><td rowspan="7">2</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>64</td><td rowspan="2">32</td><td rowspan="2">16</td><td rowspan="3">8</td><td rowspan="3">4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td><td>3</td></tr>
</table>

(예를 들어 $a_7=1$에서

$2^{a_6}=1(a_6=0(\times)),\ \frac{1}{2}a_6=1(a_6=2(\bigcirc))$

$a_2=8$에서

$2^{a_1}=8(a_1=3(\bigcirc)),\ \frac{1}{2}a_1=8(a_1=16(\bigcirc))$

와 같이 판단한 것이다.)

(2) $a_6=1,\ a_7=2$인 경우

위의 표에서 $a_7=1,\ a_8=2$일 때,

a_2는 $2,\ 8,\ 32,\ 6$이므로

$a_6=1,\ a_7=2$일 때,

a_1은 $2,\ 8,\ 32,\ 6$이다.

(1), (2)에서

구하는 값은

$1+4+16+3+64+5+12$

$+2+8+32+6$

$=153$

답 ③

C160 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 따라

수열 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$

을 쓰면 아래 표와 같다.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th><th>a_6</th></tr>
<tr><td rowspan="4">k</td><td rowspan="4">-2</td><td rowspan="4">$2-k$</td><td rowspan="3">$8-2k$ $(k\ge 2)$</td><td rowspan="2">$16-3k$ $(k\ge 4)$</td><td>$26-4k$ $(k\ge 6)$</td></tr>
<tr><td>$6-4k$ $(k\le 5)$</td></tr>
<tr><td>$-3k$ $(k\le 3)$</td><td>$10-4k$</td></tr>
<tr><td>-6 $(k=1)$</td><td>1</td><td>-10</td></tr>
</table>

- (1) $k\ge 6$인 경우

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6$

$=\underbrace{(2-k)}_{-}\underbrace{(8-2k)}_{-}\underbrace{(16-3k)}_{-}\underbrace{(26-4k)}_{+,\ 0,\ -}<0$

$26-4k$가 양$(+)$이어야 하므로 $k=6$이다.

- (2) $k=5$인 경우

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6$

$=-3\times(-2)\times1\times(-14)<0\ (\bigcirc)$

- (3) $k=2$ 또는 $k=3$인 경우

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6$

$=\underbrace{(2-k)}_{0,\ -}\underbrace{(8-2k)}_{+}\underbrace{(-3k)}_{-}\underbrace{(10-4k)}_{+,\ -}<0$

일단 $k\ne 2$이고, $10-4k$가 음$(-)$이어야 하므로 $k=3$이다.

- (4) $k=1$인 경우

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6$

$=1\times(-6)\times1\times(-10)>0$

(1)~(4)에서 구하는 값은

$6+5+3=14$

답 ②

C161 | 답 ②

[풀이]

$a_1=a,\ a_2=b$로 두자.

문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하면 아래의 표를 완성할 수 있다.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th><th>a_6</th></tr>
<tr><td rowspan="3">a</td><td rowspan="3">b</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="2">$2b+2$ $(b \le 2)$</td><td>$2b+6$ $(0 \le b \le 2)$</td><td>$6b+10$ $(0 \le b \le 2)$</td></tr>
<tr><td>$2b+4$ $(b<0)$</td><td>$6b+8$ $(b<0)$</td></tr>
<tr><td>$b+2$ $(b>2)$</td><td>$b+6$ $(b>2)$</td><td>$3b+10$ $(b>2)$</td></tr>
</table>

우선 b의 값을 구하자.

$6b+10=19\ (0 \le b \le 2)$: $b=\dfrac{3}{2}$ (○)

$6b+8=19\ (b<0)$: $b=\dfrac{11}{6}$ (×)

$3b+10=19\ (b>2)$: $b=3$ (○)

이제 a의 값을 구하자.

$a \le b$일 때, $a_3=2a+b=2$에서

$b=\dfrac{3}{2}$이면 $a=\dfrac{1}{4}$(○), $b=3$이면 $a=-\dfrac{1}{2}$(○)

$a>b$일 때, $a_3=a+b=2$에서

$b=\dfrac{3}{2}$이면 $a=\dfrac{1}{2}$(×), $b=3$이면 $a=-1$(×)

따라서 구하는 값은

$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$

답 ②

C162 | 답 ③

[풀이]

우선 a_6, a_7, a_8, $\cdots$의 값을 구하자.

$a_5=5 \ge 0$이므로 $a_6=a_5-6=-1$

$a_6=-1<0$이므로 $a_7=-2a_6+3=5$

⋮

수열 a_5, a_6, a_7, a_8, $\cdots$은 다음과 같다.

$5(=a_5)$, -1, 5, -1, 5, -1, $\cdots$

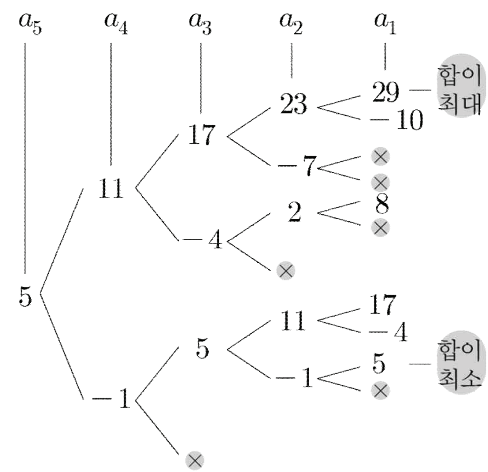
(즉, 5와 -1이 반복해서 나타난다.)

이제 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5의 값을 구하자.

$a_5=a_4-6(a_4 \ge 0)$에서 $a_4=11$

$a_5=-2a_4+3(a_4<0)$에서 $a_4=-1$

마찬가지의 방법으로 나머지 항을 구하면 다음과 같다. (이때, 수형도를 사용하면 된다.)



위의 수형도에서

$M=29+23+17+11+(5-1+5-1+\cdots-1)$

$m=5-1+5-1+(5-1+5-1+\cdots-1)$

$\therefore\ M-m$

$=29+23+17+11-(5-1+5-1)$

$=72$

답 ③

C163 | 답 ①

[풀이]

우선 a_5, a_6의 값을 결정하자.

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$$a_6=\begin{cases} -2a_5-2 & \left(-1 \le a_5 < -\dfrac{1}{2}\right) \\ 2a_5 & \left(-\dfrac{1}{2} \le a_5 \le \dfrac{1}{2}\right) \\ -2a_5+2 & \left(\dfrac{1}{2} < a_5 \le 1\right) \end{cases}$$

$a_6=-a_5$이므로

$-a_5=-2a_5-2$, $a_5=-2$ (×)

$-a_5=2a_5$, $a_5=0$ (○)

$-a_5=-2a_5+2$, $a_5=2$ (×)

즉, $a_5=a_6=0$

함수

$$y=\begin{cases} -2x-2 & \left(-1 \le x < -\dfrac{1}{2}\right) \\ 2x & \left(-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\dfrac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases}$$

의 그래프는 다음과 같다.

D073

●●● (2014-A형28)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \le 0) \\ -\dfrac{1}{2}x+7 & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

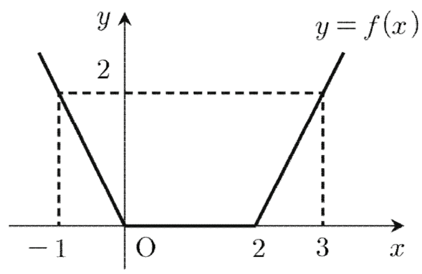
D. 함수의 연속: 곱/나누기(그래프 개형) +네 가지 경우 판단

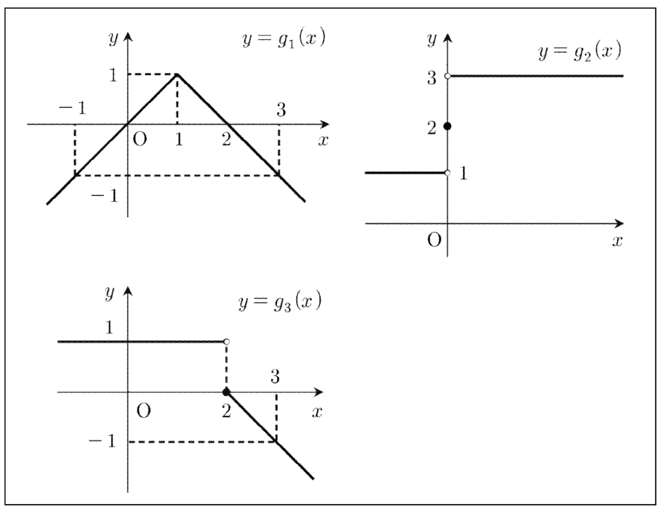
▶ 실전 이론 p.152

D074

○○ (1996-인문예체능9/자연9)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 주어져 있다. 아래의 그래프로 주어진 함수 $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$, $y=g_3(x)$ 중에서 $f(x)$와 곱하여 얻어지는 함수 $y=f(x)g_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$이 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이 되는 $g_k(x)$를 모두 고르면? [1점]





① $g_1(x)$　② $g_2(x)$　③ $g_1(x),\ g_2(x)$

④ $g_1(x),\ g_3(x)$　⑤ $g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x)$

E126

★★★
(2021-나형30)

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,
함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

E127

★★★
(2022(9)-확률과통계22/미적분22/기하22)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

F032

(2023(6)-확률과통계14/미적분14/기하14)

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때,
방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

F033

(2024(6)-확률과통계20/미적분20/기하20)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x) \geq g(4)$이고 $|g(x)| \geq |g(3)|$이다.

F. 정적분 계산

▶ 실전 이론 p.273

F034

(2012(9)-나형13)

모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\int_0^3 f(x)dx=3\int_0^1 f(x)dx$
ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^1 f(x)dx$
ㄷ. $\int_0^1 \{f(x)\}^2dx=\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

F035

(2008(9)-가형5)

$\int_0^2 |x^2(x-1)|\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

D. 함수의 극한 계산: 차수, 계수 결정

▶ 기출 문제 p.14

• 최고차수와 계수 결정

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$의 수렴과 발산에 대하여 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수를 각각 a, b라고 하면

($f(x)$의 차수)>($g(x)$의 차수):

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \, (ab > 0)$ 또는

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \, (ab < 0)$

($f(x)$의 차수)=($g(x)$의 차수):

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} (\neq 0)$

($f(x)$의 차수)<($g(x)$의 차수):

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

각각에 대한 예를 들면

$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x}{-3x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x}{3x^2 + x} = \frac{2}{3}$,

$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x}{x^3 + x} = 0$

따라서

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$이면 함수 $f(x)$의 차수가 함수 $g(x)$의 차수보다 크다.

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha(\alpha \neq 0$인 상수)이면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 차수는 서로 같다.

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$이면 함수 $g(x)$의 차수가 함수 $f(x)$의 차수보다 크다.

몇 가지의 예를 들어보자.

상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$이면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x) = 2x^2 + ax + b$(단, a, b는 상수)이다.

$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2}{f(x)} = 2$이면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x) = 3x^2 + ax + b$(단, a, b는 상수)이다.

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$이면 $f(x)$는 이차함수 또는 일차함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x) = ax^2 + bx + c$(단, a, b, c는 상수(단, 이 세 수가 모두 0일 수 없다.))이다.

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{f(x)} = 0$이면 $f(x)$는 사차 이상의 함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$
(단, $n \geq 4$, $a_n \neq 0$, a_{n-1}, $\cdots$, a_0은 상수)이다.

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = -\infty$이면 $f(x)$는 사차 이상의 함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$
(단, $n \geq 4$, $a_n < 0$, $\cdots$, a_0은 상수)이다.

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{f(x)} = -\infty$이면 $f(x)$는 이차함수 또는 일차함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^2+bx+c$(단, $a<0$, b, c는 상수)
또는
$f(x)=ax+b$(단, $a<0$, b는 상수)
이다.

다음과 같은 예도 생각해볼 수 있다.

$\lim_{x\to 0+} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=3$이면 $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}=3$이므로
$f(x)=3x^2+ax+b$이다.

이때, $x=\frac{1}{t}$으로 치환한 것이고, $x\to 0+$일 때, $t\to\infty$이다. 치환을 하는 이유는 우리에게 익숙한 식의 모양을 만들어 내기 위함이다.

• 최저차수와 계수 결정

이제 다항함수의 최저차수와 계수를 결정해보자.

예를 들어 다항함수 $f(x)$에 대하여
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=2$$
이면 $f(x)=a_nx^n+\cdots+2x^3$ (단, $n\geq 3$, $a_n\neq 0$)이다.

이를 귀류법으로 증명해보자.

$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
(단, $a_n\neq 0$)
으로 두면
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(a_nx^{n-3}+\cdots+a_3+\frac{a_2}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x^3}\right)$$
$=a_3=2$

이때, $a_2\neq 0$, $a_1\neq 0$, $a_0\neq 0$이면 $\frac{a_2}{x}$, $\frac{a_1}{x^2}$, $\frac{a_0}{x^3}$은 모두 발산하므로
귀류법에 의하여 a_2, a_1, a_0는 모두 0을 값으로 갖는다.
$\therefore\ f(x)=a_nx^n+\cdots+2x^3$ (단, $n\geq 3$, $a_n\neq 0$)

일반적으로
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}=c$$
이면
$f(x)=a_nx^n+\cdots+cx^m$ (단, $a_n\neq 0$, $n\geq m$)
이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

〈최고차수와 계수, 최저차수와 계수〉
다항함수 $f(x)$에 대하여
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}=a,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}=b$$
(단, a와 b는 0이 아닌 상수, n, m은 자연수)
이면 함수 $f(x)$의 최고차항은 계수가 a인 n차이고, 차수가 가장 낮은 항은 계수가 b인 m차이다.
즉, $f(x)=ax^n+\cdots+bx^m$ (단, $n\geq m$)

예제 1

4차 이하의 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3+5x^2}{x^n+1}=4,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=5$$

일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

풀이

$n=1$:

왼쪽 등식을 만족시키는 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^3-5x^2+4x+a$ (단, a는 상수)

그런데 이는 오른쪽 등식을 만족시키지 않는다.

$n=2$:

왼쪽 등식을 만족시키는 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^3-x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

그런데 이는 오른쪽 등식을 만족시키지 않는다.

$n=3$:

왼쪽 등식을 만족시키는 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=6x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)

그런데 이는 오른쪽 등식을 만족시키지 않는다.

$n=4$: 왼쪽 등식을 만족시키는 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=4x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (단, a, b, c, d는 상수)

오른쪽 등식을 만족시키기 위해서는

$a=5$, $b=c=d=0$

즉, $f(x)=4x^4+5x^3$

$\therefore\ f(1)=9$

답 9

예제 2

최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음의 두 조건이 성립한다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=1$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-1$

이때, $f(2)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

풀이

(가), (나)에서

$f(x)g(x)=x^3-x^2(=x\times x\times(x-1))$

$f(x)=x$, $g(x)=x(x-1)$: $f(2)=2$

$f(x)=x-1$, $g(x)=x^2$: $f(2)=1$

$f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$: $f(2)=4$

$f(x)=x(x-1)$, $g(x)=x$: $f(2)=2$

따라서 구하는 값은 $1+4=5$이다.

답 5

E. 삼차함수의 그래프: 미분 가능성(절댓값)

▶ 기출 문제 p.77

• 절댓값이 포함된 다항함수의 미분가능성

❶ 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$이고, $|f(x)|$이 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=0$이다. (참)
❷ 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$, $f'(a)=0$이면 $|f(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. (참)

이때, ❷는 ❶의 역명제이다.

증명
❶ (참)
$f(a)=0$이므로 인수정리에 의하여
$f(x)=(x-a)Q(x)$
문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$

가 존재한다.

$$\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}\left|\frac{(x-a)Q(x)}{x-a}\right|=\lim_{x\to a+}|Q(x)|=|Q(a)|$$
$$\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}-\left|\frac{(x-a)Q(x)}{x-a}\right|=\lim_{x\to a-}-|Q(x)|$$
$$=-|Q(a)|$$

$|Q(a)|=-|Q(a)|$에서 $|Q(a)|=0$이므로 $Q(a)=0$
인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=(x-a)^2Q_0(x)$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=2(x-a)Q_0(x)+(x-a)^2Q_0'(x)$
$\therefore$ $f'(a)=0$ (그리고 $x=a$에서의 $|f(x)|$의 미분계수도 0이다.) ■

❷ (참)
$f(a)=f'(a)=0$이므로 인수정리에 의하여
$f(x)=(x-a)^2Q_0(x)$

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)^2Q_0(x)|}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}|(x-a)Q_0(x)|=0$$
$$\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)^2Q_0(x)|}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}-|(x-a)Q_0(x)|=0$$
$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=0\text{이므로}$$

함수 $|f(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. 이때, 미분계수는 0이다. ■

따라서 다음의 필요충분조건이 성립한다.

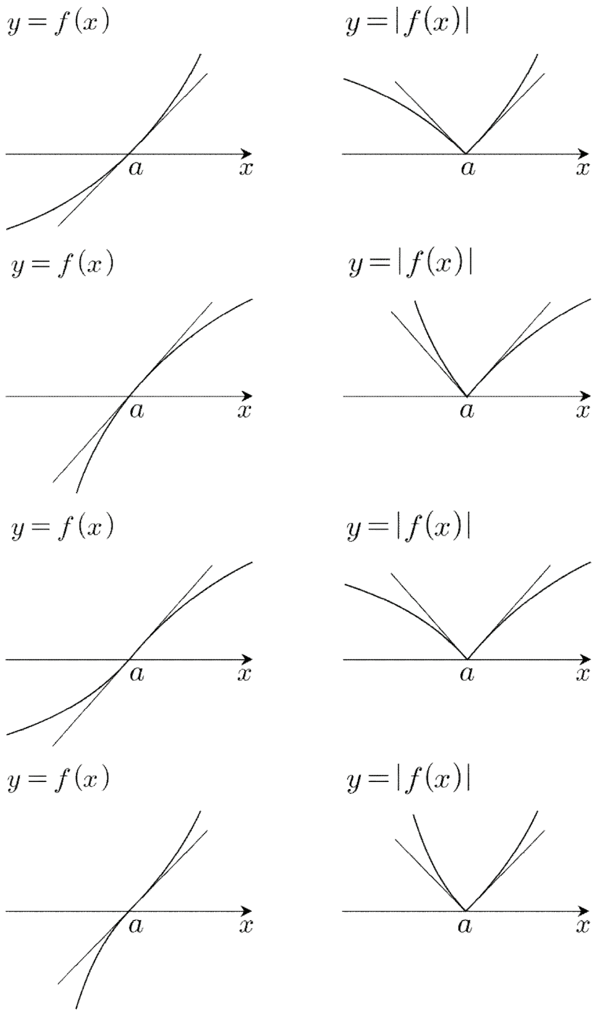
다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$일 때,
함수 $|f(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다.
$\Leftrightarrow$
$f'(a)=0$

기하적 해석은 다음과 같다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선이 x축이면
함수 $y=|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.
이때, 곡선 $y=|f(x)|$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선은 x축이다.

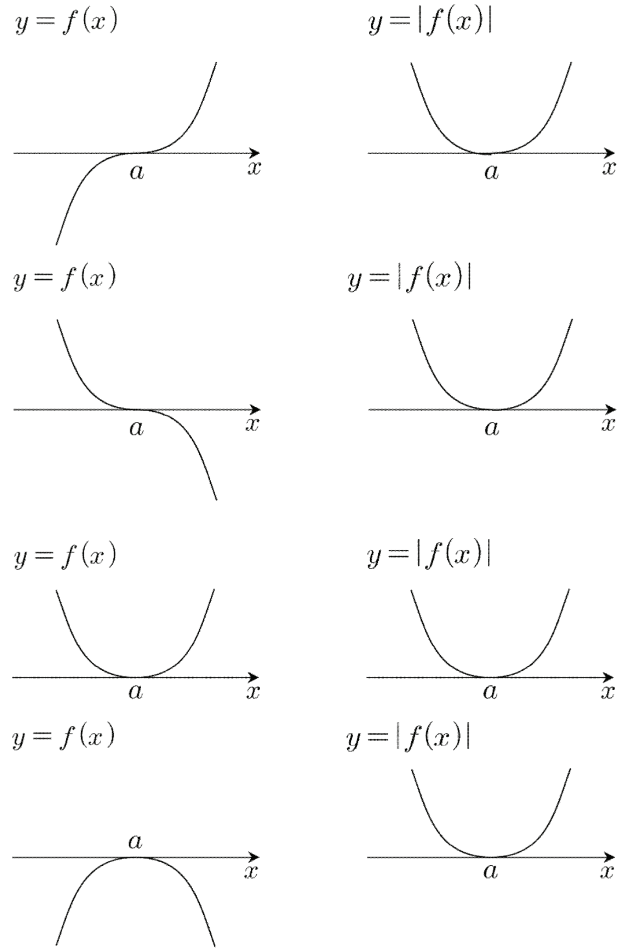
이를 그래프의 개형에서 확인해보자.

❶ $f'(a)>0$인 경우



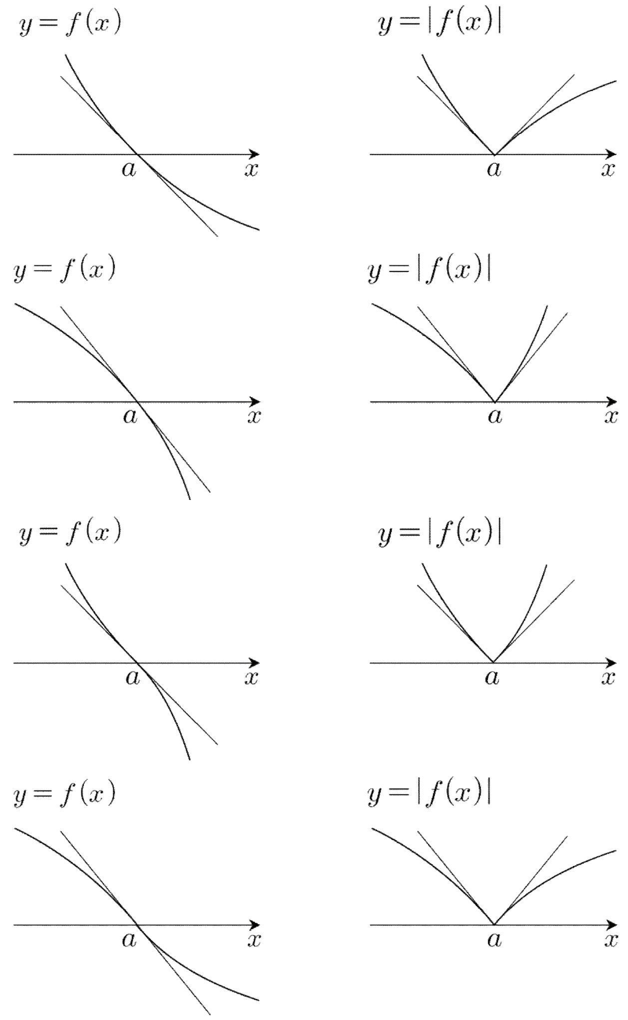
위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않음을 확인할 수 있다.

❷ $f'(a)=0$인 경우



위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능함을 확인할 수 있다.

❸ $f'(a)<0$인 경우



위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않음을 확인할 수 있다.

예제 1

다음 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점을 모두 찾으시오.

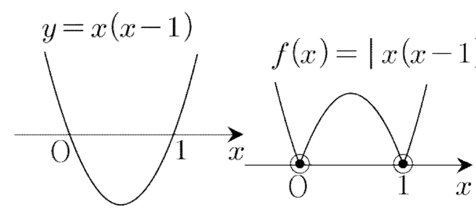
(1) $f(x)=|x(x-1)|$ (2) $f(x)=|x^2(x-1)|$

(3) $f(x)=|x^3(x-1)|$

이 문제를 풀면서 ❶ 미분계수의 정의 ❷ 도함수의 극한 ❸ 그래프의 개형 중에서 어떤 방법이 실전적일지를 생각해보아라.

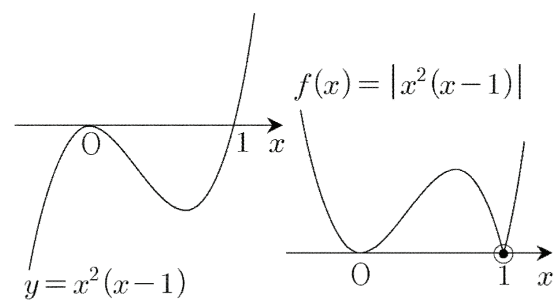
풀이

(1)



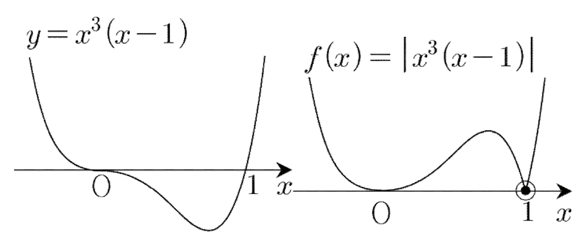
위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(2)



위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(3)

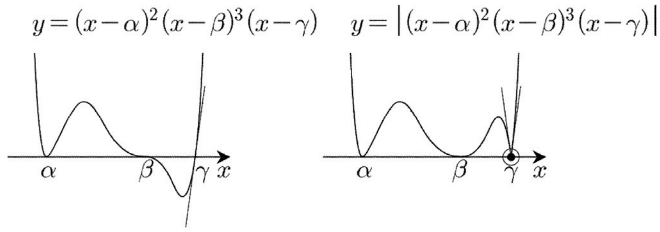


위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

답 풀이 참조

예를 들어 함수

$y=|(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)|$ $\cdots(*)$
(단, 세 수 α, β, γ는 모두 다르다.)
은 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 미분가능하지만, $x=\gamma$에서는 미분가능하지 않다.



(위의 그림처럼 곡선이 꺾이면 접선도 함께 꺾인다!)

❶ 곡선 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)$가 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 x축이 접하므로 함수 (*)는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 미분가능하다. 이때, 곡선 (*)는 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 x축이 접한다.

❷ 곡선 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)$ 위의 점 $(\gamma,\ 0)$에서의 접선이 x축이 아니므로 함수 (*)는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다. 이때, 곡선 (*)는 점 $(\gamma,\ 0)$에서 x축에 접하지 않는다.

• 두 함수의 차로 정의된 함수의 미분가능성

❶ 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$이고, $|f(x)-g(x)|$이 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=g'(a)$이다. (참)

❷ 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$이면 $|f(x)-g(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. (참)

이때, ❷는 ❶의 역명제이다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두고 앞선 정리를 적용하면 참임을 증명할 수 있다. (증명은 생략한다.)

따라서 다음의 필요충분조건이 성립한다.
두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$일 때,
함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.
$\Leftrightarrow$
$f'(a)=g'(a)$

함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.
$\Leftrightarrow$
함수 $y=\begin{cases} f(x) & (x \geq a) \\ g(x) & (x < a) \end{cases}$는 $x=a$에서 미분가능하다.

❷의 기하적 해석은 다음과 같다.

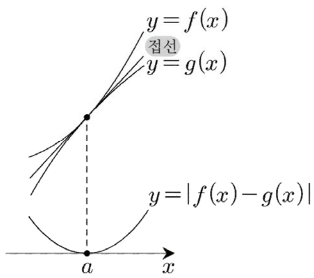
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a,\ b)$에서 서로 접할 때,
함수 $y=|f(x)-g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.
이때, 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선은 x축이다.

❸ 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선을 $y=g(x)$라고 할 때,
함수 $|f(x)-g(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. (참)

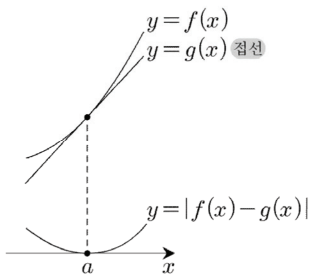
❸은 ❷의 특수한 경우이다.

위의 세 정리는 아래의 그림과 함께 기억하면 절대 잊지 않는다.

❶&❷

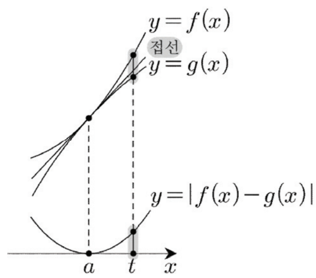


❸

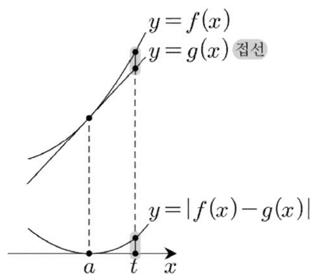


다음과 같은 관찰을 해보자.

❶&❷



❸



각각의 그림에서 두 선분의 길이는 서로 같다.

$t \to a$일 때,

(1) 두 선분의 길이는 모두 0에 수렴한다.

(2) 곡선(직선) $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$에 한없이 가까워진다. 그리고 $t=a$에서 곡선(직선) $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다.

(3) 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$는 x축에 한없이 가까워진다. 그리고 $t=a$에서 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$는 x축에 접한다.

예제 2

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$는 세 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$을 지난다.

(나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서 그은 접선은 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(0)=1$

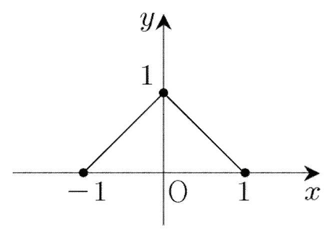
ㄴ. $f'(c)=-1$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 존재한다.

ㄷ. 곡선 $y=|f(x)-x-1|$이 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

조건 (가)에서 주어진 세 점을 좌표평면 위에 나타내자.



ㄱ. (참)

조건 (나)에서

$f'(0)=$(두 점 $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$의 평균변화율)

$=\dfrac{1-0}{0-(-1)}=1$

ㄴ. (참)

함수 $f(x)$가

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=-1=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나 이상 존재한다.

ㄷ. (참)

보기 ㄴ과 마찬가지의 방법으로

$f'(d)=1$인 d가 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 존재한다.

요컨대

$-1<d<0<c<1$

인 두 상수 c, d에 대하여

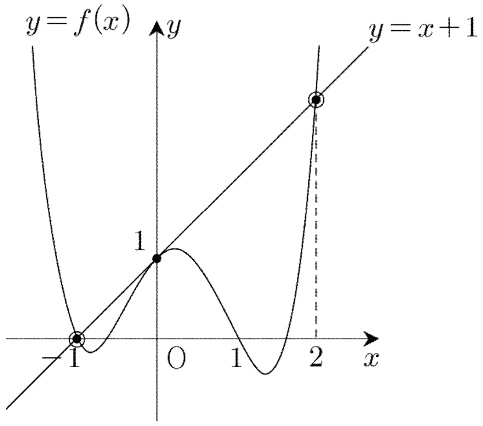
$f'(c)=-1<0$, $f'(d)=1>0$

이므로 다음이 성립한다.

구간 $(-1, 0)$에 속하는 어떤 열린구간에서 함수 $f(x)$는 증가하고,

구간 $(0, 1)$에 속하는 어떤 열린구간에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

그런데 $x \to \pm\infty$일 때, 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산하므로 곡선 $y=f(x)$는 아래 그림( )처럼 그려질 수밖에 없다.



(단, ◉는 함수 $|f(x)-x-1|$가 미분가능하지 않은 점)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선이 $y=x+1$이므로 곡선 $y=|f(x)-x-1|$은

$x=0$에서 미분가능하다. 그런데 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-1, 0)$, $(1, 0)$을 지나므로 구간

$(-1, 1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x+1$의 아래쪽에 놓일 수밖에 없다.

위의 그림에서 함수 $|f(x)-x-1|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

다음과 같이 함수 $f(x)$의 방정식을 유도하여 보기 ㄷ의 참, 거짓을 판단할 수 있다.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

으로 두자.

조건(가)에서

$f(0)=d=1$

$f(1)=a+b+c+2=0$

$f(-1)=-a+b-c+2=0$

연립방정식을 풀면

$b=-2$, $c=-a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$

조건 (나)에 의하여

$f'(0)=-a=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=1$이므로 $a=-1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$

ㄷ. (참)

방정식 $f(x)=x+1$을 정리하면

$x^4-x^3-2x^2=0$

좌변을 인수분해하면

$x^2(x-2)(x+1)=0$

$|f(x)-x-1|=|x^2(x-2)(x+1)|$

이므로 함수 $|f(x)-x-1|$는 $x=-1$, $x=2$에서 미분가능하지 않다.

E. 삼차함수의 그래프: 변곡접선

▶ 기출 문제 p.80

예제 1

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=x^3-3x$에 그을 수 있는 접선의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 불연속이 되는 모든 실수 t의 값의 합을 구하시오.

풀이1 대수적

접점의 x좌표를 s로 두자.

접선의 방정식은

$y=(3s^2-3)(x-s)+s^3-3s$

이 직선이 점 $(t,\ 2)$를 지나므로

$2=(3s^2-3)(t-s)+s^3-3s$

정리하면

$(s+1)\{2s^2-(3t+2)s+3t+2\}=0 \cdots (*1)$

$\Leftrightarrow$ $s=-1$ 또는

$2s^2-(3t+2)s+3t+2=0 \qquad \cdots (*2)$

(*2)에 $s=-1$을 대입하면 $t=-1$

$t=-1$을 (*2)에 대입하면

$2s^2+s-1=0,\ (2s-1)(s+1)=0$

풀면 $s=\dfrac{1}{2}$ 또는 $s=-1$

즉, $t=-1$이면 삼차방정식 (*1)의 해집합은

$\left\{-1,\ \dfrac{1}{2}\right\}$이다. 이때, -1은 중근이다.

이차방정식 (*2)의 판별식을 D라고 하자.

$D=(3t+2)^2-4\times2\times(3t+2)=3(3t+2)(t-2)$

(1) $D>0$인 경우 $\left(t<-\dfrac{2}{3}\right.$ 또는 $\left.t>2\right)$

$t<-1$ 또는 $-1<t<-\dfrac{2}{3}$ 또는 $t>2$이면

이차방정식 (*2)의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$t=-1$이면

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $D=0$인 경우 $\left(t=-\dfrac{2}{3}\right.$ 또는 $\left.t=2\right)$

이차방정식 (*2)의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로

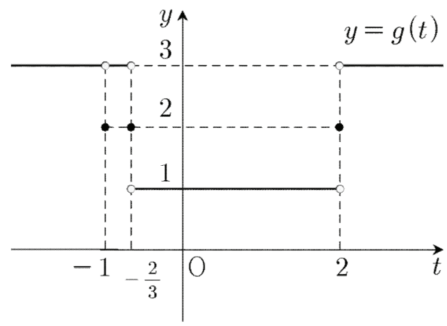
삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(3) $D<0$인 경우 $\left(-\dfrac{2}{3}<t<2\right)$

이차방정식 (*2)가 허근을 가지므로

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$가 불연속인 모든 실수 t의 값의 합은 $\dfrac{1}{3}$이다.

답 $\dfrac{1}{3}$

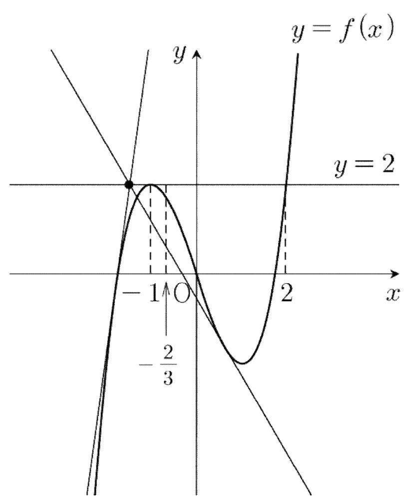
위의 풀이에서 -1, 2는 직선 $y=2$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점의 x좌표이고, $-\dfrac{2}{3}$는 직선 $y=2$가 '곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선' 과 만나는 점이다. 이를 아래의 풀이에서 확인하자.

풀이2 기하적

t의 값을 변화시키면서, 실제로 접선을 그어보자.

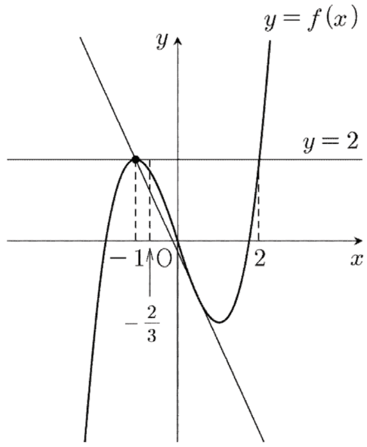
(1) $t<-1$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



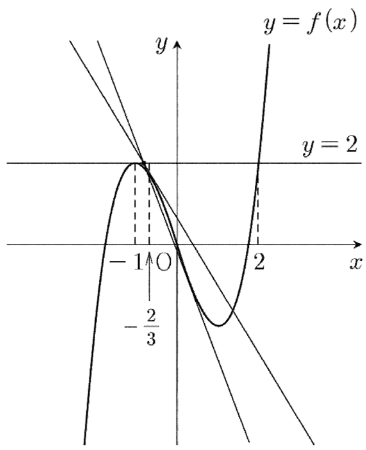
(2) $t=-1$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.



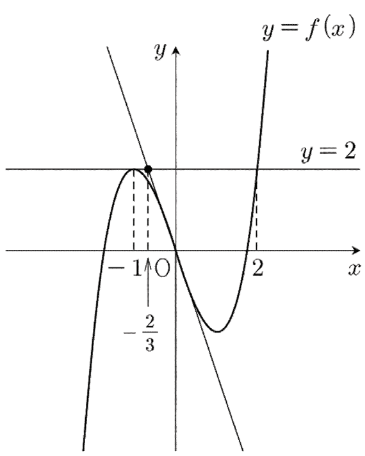
(3) $-1<t<-\dfrac{2}{3}$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



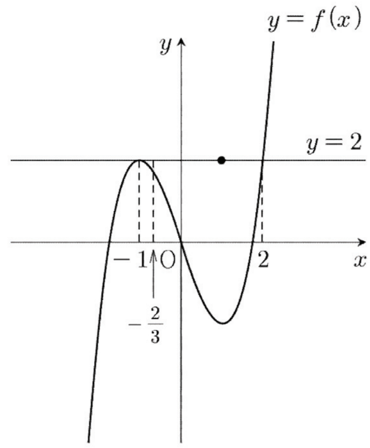
(4) $t=-\dfrac{2}{3}$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다. 이때, 원점을 지나는 직선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선이다.



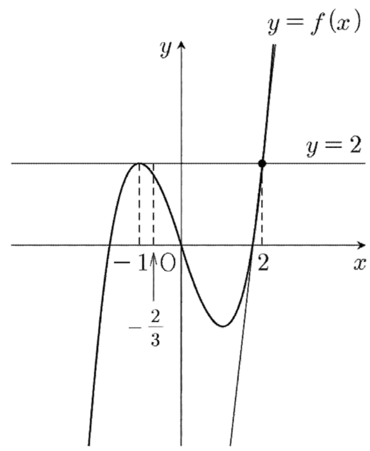
(5) $-\dfrac{2}{3}<t<2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 1개의 접선을 그을 수 있다.



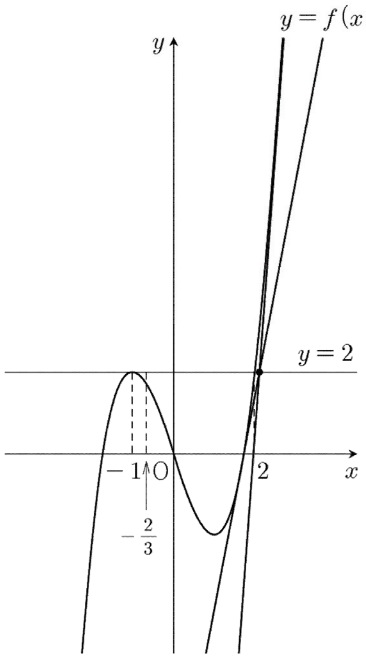
(6) $t=2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.



(7) $t>2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



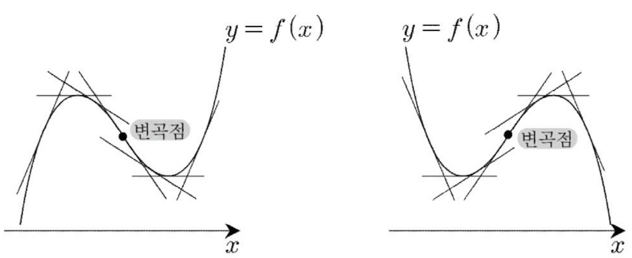
답 $\frac{1}{3}$

이 문제는 '대수적 풀이' 와 '기하적 관찰' 이 모두 가능하다. 전자의 경우 삼차방정식의 근의 분리와 이차방정식의 근의 분리가 적용된 풀이인데, 이는 수능에서 거의 매해 출제되는 전형적인 풀이에 해당하므로 반드시 익혀두어야 한다. 후자의 경우 t의 값을 변화시키면서 접선의 개수를 관찰하는 실전적인 풀이이다.

다음과 같은 관찰을 해보자.

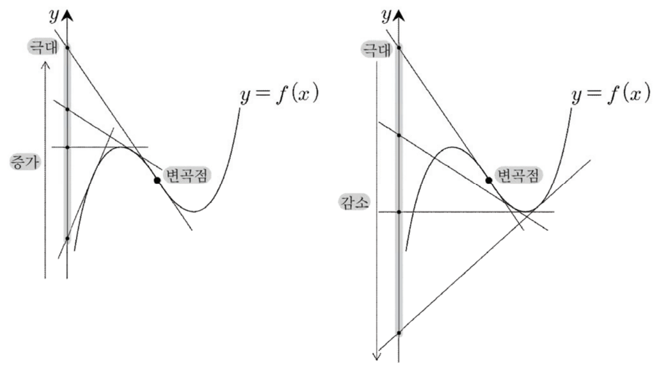
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 점 P가 변곡점 일 때 최소가 된다. (아래 왼쪽 그림)

최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 점 P가 변곡점 일 때 최대가 된다. (아래 오른쪽 그림)

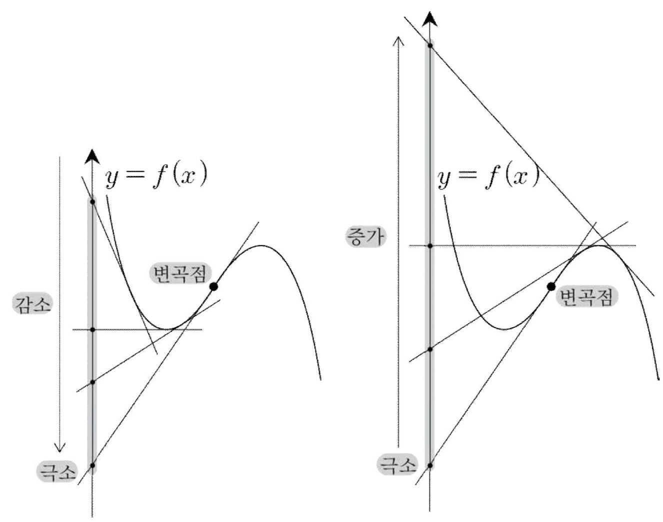


이제 다음의 관찰을 해보자.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$는 점 P가 변곡점일 때 극댓값을 갖는다.
(단, 곡선 $y=f(x)$와 y축의 위치 관계가 아래 그림과 같을 때로 한정하자.)



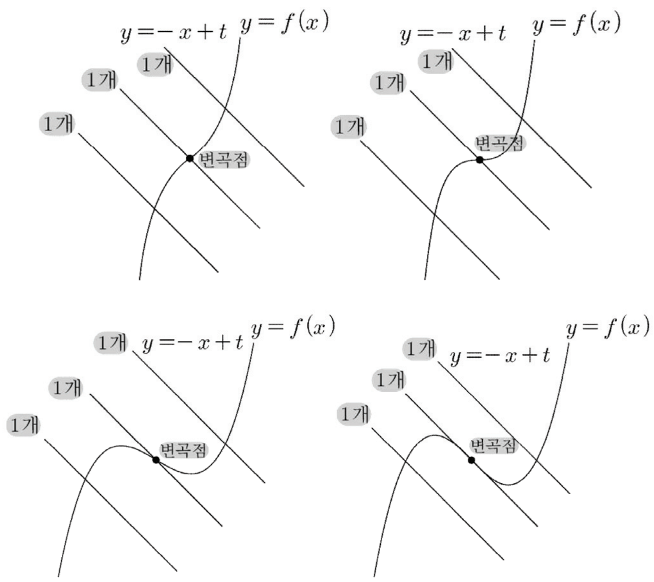
최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$는 점 P가 변곡점일 때 극솟값을 갖는다.
(단, 곡선 $y=f(x)$와 y축의 위치 관계가 아래 그림과 같을 때로 한정하자.)



• 삼차함수와 직선의 위치 관계

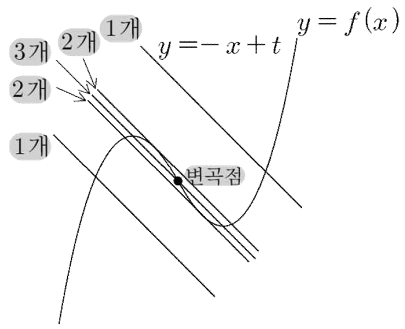
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속인 경우와 불연속인 경우를 구분해보자.

(1) 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 기울기가 -1 이상인 경우



위의 그림에서 알 수 있듯이 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(2) 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 기울기가 -1보다 작은 경우



위의 그림에서 알 수 있듯이 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 불연속이다. 이때, 불연속 점의 개수는 2이다.

E. 방정식 $f(f(x))=x$에 대한 연구

▶ 기출 문제 p.83

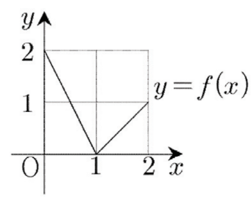
본 주제에 들어가기 전에 아래의 문제를 풀어보자.

예제 1

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 정의된 함수

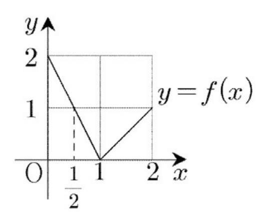
$$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (0\le x\le 1)\\ x-1 & (1<x\le 2)\end{cases}$$

의 그래프는 아래 그림과 같다.



방정식 $f(x+f(x))=1$을 만족시키는 모든 해의 합을 구하시오.

풀이

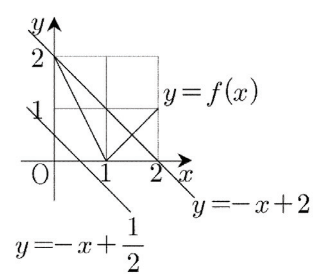


$f(\alpha)=1$을 풀면 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\alpha=2$

문제에서 주어진 방정식은 다음과 필요충분조건이다.

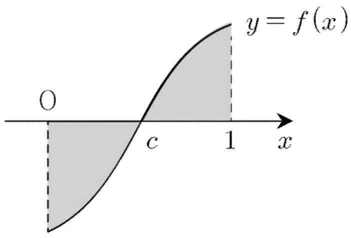
$x+f(x)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x+f(x)=2$

즉, $f(x)=-x+\dfrac{1}{2}(\cdots㉠)$ 또는 $f(x)=-x+2(\cdots㉡)$



위의 그림에서 ㉠은 해를 갖지 않고,

㉡: $x=0$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

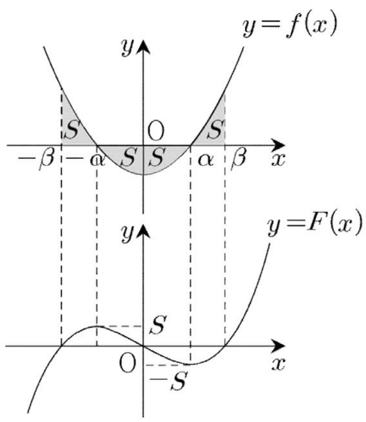


답 풀이 참조

참고

기하적인 관점에서 위의 그림을 재해석 하자. (귀류법)
구간 $[0,\ 1]$에서 연속함수 $f(x)$의 정적분 값은 0이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 x축의 아래에만 있거나, x축의 위에만 있을 수 없다.(전자의 경우에 정적분의 값은 음$(-)$이고, 후자의 경우에 정적분의 값은 양$(+)$이다.) 따라서 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 x축과 적어도 하나 이상의 점에서 만나야 한다. 이 관점이 녹아든 문제는 수능에서도 빈번하게 출제되고 있으므로, 위의 상황을 반드시 눈과 손에 익혀 두도록 하자.

y축이 대칭축인 이차함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다고 하자. (단, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$)



(단, $F(\beta)=0$, $\beta=\sqrt{3}\alpha$)

위의 그림에서 다음의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_{-\beta}^{\beta} f(x)dx=0,$$

$$\int_{-\beta}^{0} f(x)dx=0,\ \int_{0}^{\beta} f(x)dx=0$$

$$\int_{-\beta}^{\alpha} f(x)dx=-S,\ \int_{-\alpha}^{\beta} f(x)dx=-S$$

F. 정적분의 계산: 영역+절댓값

▶ 기출 문제 p.115

다음의 성질을 함께 증명해보자.

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$는 연속함수이다.
모든 실수 x에 대하여
$-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)|$
임을 이용하여, 부등식
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq \int_a^b |f(x)|dx$$
가 성립함을 증명하시오.

이때, 등호가 성립할 조건은 다음과 같다.
$f(x)\geq 0\ (\Leftrightarrow |f(x)|=f(x))$
또는 $f(x)\leq 0\ (\Leftrightarrow |f(x)|=-f(x))$

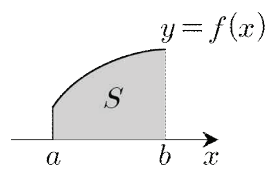
증명

모든 실수 x에 대하여
$-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)|$
이므로
$$-\int_a^b |f(x)|dx\leq \int_a^b f(x)dx\leq \int_a^b |f(x)|dx$$
$$\therefore\ \left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq \int_a^b |f(x)|dx$$
($\because$ 두 실수 A, B에 대하여
$-B\leq A\leq B$이면 $|A|\leq B$이다.) ■

위의 성질을 그래프의 개형을 이용하여 재해석하자.

함수 $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이다.

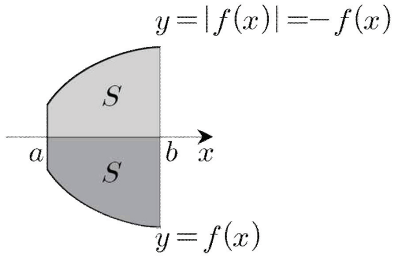
❶ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$인 경우



위의 그림에서

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx \quad (\because |S| = S)$$

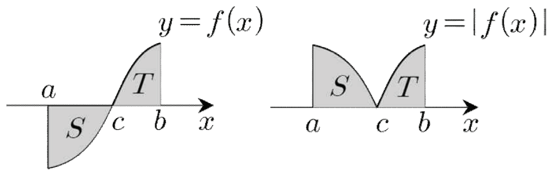
❷ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \le 0$인 경우



위의 그림에서

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx \quad (\because |-S| = S)$$

❸ 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x) \le 0$이고,
구간 $[c,\ b]$에서 $f(x) \ge 0$인 경우
(단, $a < c < b$)



위의 그림에서

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |T-S|$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = S+T$$

$S \ge T$이면 $|T-S| = S-T$이므로

$S+T-|T-S| = 2T \ge 0$

$S < T$이면 $|T-S| = T-S$이므로

$S+T-|T-S| = 2S \ge 0$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

❶, ❷, ❸에 의하여 다음의 부등식이 항상 성립한다.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

F. 정적분의 계산: 평행이동, 대칭이동

▶ 기출 문제 p.116

평행이동의 관점을 적용하면 정적분의 계산이 간단해 지는 경우들이 있다. (미분법도 마찬가지이다. 수능에서는 평행이동의 관점을 적용하면 계산이 간단해지는 미분법, 적분법 문제가 즐겨 출제되고 있다.)

예제 1

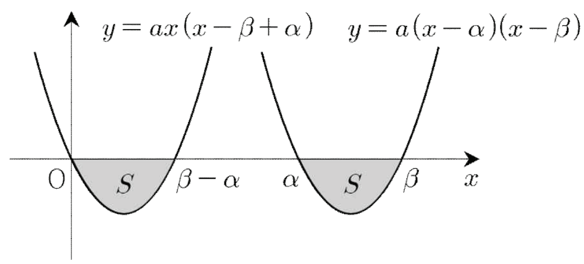
이차함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하면

$S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ (단, $\beta > \alpha$)

이다. 위의 공식을 증명하여라.

증명

우선 $a > 0$인 경우를 생각하자.



문제에서 주어진 곡선을 x축의 방향으로 $-\alpha$만큼 평행이동시키면 곡선

$y=ax(x-\beta+\alpha)$

와 일치한다.

(※ 평행이동을 한 이유는? 계산을 간단히 하기 위해서이다.)

이때, 문제에서 주어진 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 평행이동시킨 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 같다. 즉, 평행이동해도 도형의 넓이가 변하지 않는다.

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\int_0^{\beta-\alpha} ax(x-\beta+\alpha)dx$$

$$=\int_0^{\beta-\alpha} \{ax^2+a(\alpha-\beta)x\}dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}(\alpha-\beta)x^2\right]_0^{\beta-\alpha}$$

$=\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$

$=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

$\therefore\ S=\left|\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx\right|=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

(단, $\beta>\alpha$)

$a<0$인 경우에도 마찬가지의 방법으로 동일한 식을 얻는다.

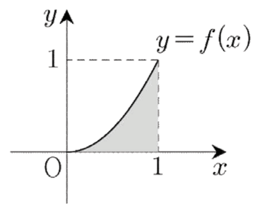
■

F. 정적분의 계산: 주기성, 대칭성

▶ 기출 문제 p.117

예제 1

$0\le x\le 1$에서 정의된 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음을 만족시킨다.



(가) $0\le x\le 1$일 때, $g(x)=f(x)$
(나) $1\le x\le 2$일 때, $g(x)=f(2-x)$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

이때, $\int_{-1}^{5} g(x)dx$의 값을 구하시오.

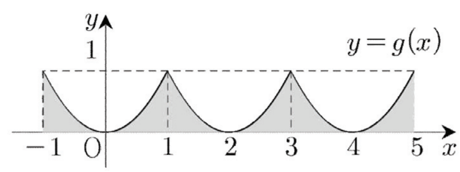
풀이

(나): $g(x)=f(-(x-2))$이므로

함수 $f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 함수 $g(x)$의 그래프와 일치한다.

(다): 함수 $g(x)$의 주기는 2이다.

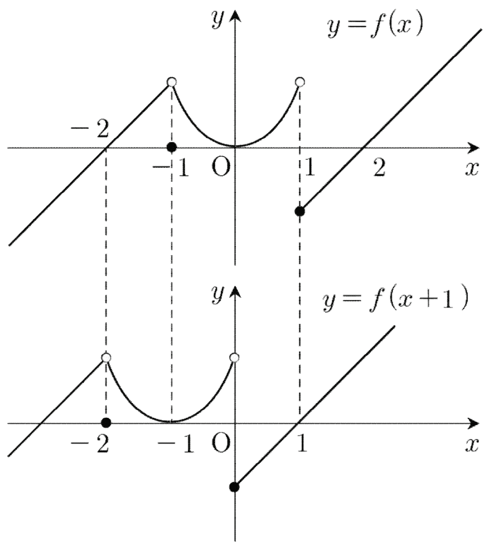
함수 $g(x)$의 그래프는



$\therefore\ \int_{-1}^{5} g(x)dx=6\int_{0}^{1} x^2dx=2$

답 2

함수 $f(x)f(x-1)$은 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.
마찬가지의 이유로 함수
$f(x)f(x-1)$은 $x=0$, $x=2$에서 연속이다.
따라서 함수 $f(x)f(x-1)$은 연속함수이다.
함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 함수 $f(x+1)$의 그래프와 일치한다.



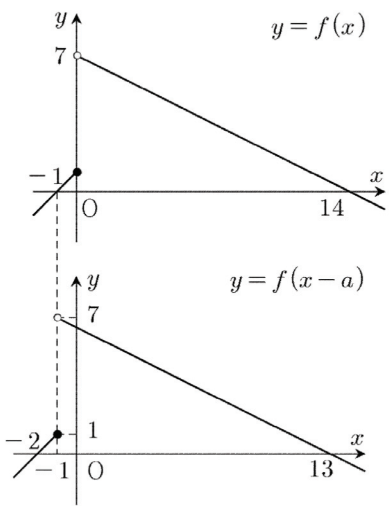
함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이지만
함수 $f(x+1)$이 $x=-1$, $x=1$에서 연속이고
$f(-1)=0$, $f(1)=0$이므로
함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.
마찬가지의 이유로 함수
$f(x)f(x+1)$은 $x=-2$, $x=0$에서 연속이다.
따라서 함수 $f(x)f(x+1)$은 연속함수이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ②

D073 | 답 13

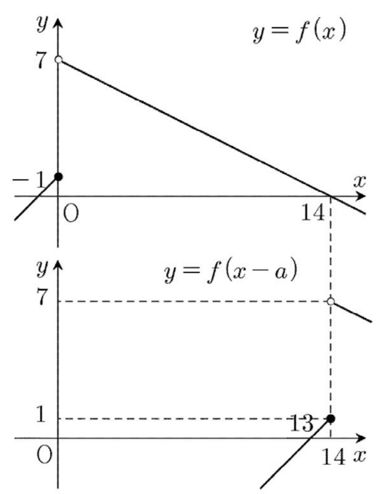
[풀이1]
함수 $f(x)$는 두 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$에서 연속이지만,
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
▸ $a=0$이라고 가정하자.
문제에서 주어진 조건에 의하여
함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이다.
함수의 연속의 정의에 의하여
$\lim\limits_{x \to a+} f(x)f(x-a)$
$= \lim\limits_{x \to 0+} \{f(x)\}^2$
$=49=\{f(0)\}^2$
풀면 $f(0)=\pm 7 \neq 1$이므로 이는 가정에 모순이다.
따라서 $a \neq 0$이다.

▸ $a \neq 0$인 경우
문제에서 주어진 조건에 의하여
함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이다.
함수의 연속의 정의에 의하여
$\lim\limits_{x \to a+} f(x)f(x-a)$
$=f(a) \times 7 = 7f(a) = f(a)f(0)$
그런데 $f(0)=1$이므로
$7f(a)=f(a)$ 즉, $f(a)=0$
방정식을 풀면
$a=-1$ 또는 $a=14$
따라서 구하는 값은 13이다.
답 13

[풀이2] 시험장
• (1) $a=-1$인 경우



함수 $f(x+1)$은 $x=-1$에서 불연속이지만
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이고
$f(-1)=0$이므로
함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.
• (2) $a=14$인 경우



함수 $f(x-14)$는 $x=14$에서 불연속이지만

$p=-3$, $q=39$이므로 p가 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ p+q=8$

답 ③

E126 | 답 39

[풀이]

우선 '함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다.' 라는 조건을 이용하자.

$x<1$일 때, $f(x)\geq g(x)$라고 하면

$h(x)=\begin{cases} f(x)-g(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$,

$h'(x)=\begin{cases} f'(x)-g'(x) & (x<1) \\ f'(x)+g'(x) & (x>1) \end{cases}$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

연속성: $f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$, 즉

$g(1)=0$

미분가능성: $f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$, 즉

$g'(1)=0$

위의 두 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$는 존재하지 않는다. 왜냐하면 $g(x)$는 상수함수이기 때문이다.

귀류법에 의하여 $x<1$일 때, $f(x)<g(x)$이다.

$h(x)=\begin{cases} g(x)-f(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$,

$h'(x)=\begin{cases} g'(x)-f'(x) & (x<1) \\ f'(x)+g'(x) & (x>1) \end{cases}$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

연속성: $g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$, 즉

$f(1)=0$

미분가능성: $g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1)$, 즉

$f'(1)=0$

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)$

한편

$h(0)=0 \Leftrightarrow |f(0)-g(0)| \Leftrightarrow f(0)=g(0)$

즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$는 점 $(0,\ f(0))$에서 만난다. 이때, 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서 접해야만 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

즉, 직선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선이다. 이때, $f(0)=-\alpha$

$f'(x)=2(x-1)(x-\alpha)+(x-1)^2$

에서 $f'(0)=2\alpha+1$이므로

$g(x)=(2\alpha+1)x-\alpha$

이제 α의 값을 결정하자.

$h(2)=f(2)+g(2)=2\alpha+4=5$에서 $\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ h(4)=f(4)+g(4)$

$=9\times\dfrac{7}{2}+2\times 4-\dfrac{1}{2}=39$

답 39

E127 | 답 108

[풀이]

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}+\frac{|f(x-h)|-|f(x)|}{-h}\right\}$$

$=$(함수 $|f(x)|$의 $x=x$에서의 우미분계수)

$+$(함수 $|f(x)|$의 $x=x$에서의 좌미분계수)

$=p(x)$(로 두자.)

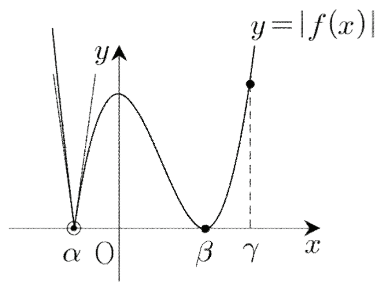
만약 함수 $|f(x)|$가 $x=x$에서 미분가능하면

$p(x)=2\times$(함수 $|f(x)|$의 $x=x$에서의 미분계수)

만약 함수 $|f(x)|$가 $x=x$에서 미분가능하지 않으면

$p(x)=0$

예를 들어보자.



(단, ⦿는 함수 $|f(x)|$가 미분가능하지 않음 점, ●는 함수 $|f(x)|$가 미분가능한 점)

$x=\alpha$에서 함수 $|f(x)|$의 좌미분계수와 우미분계수는 절댓값이 같고 부호가 다르므로

$p(x)=0$

$x=\beta$에서 함수 $|f(x)|$의 좌미분계수와 우미분계수는 0으로 같으므로

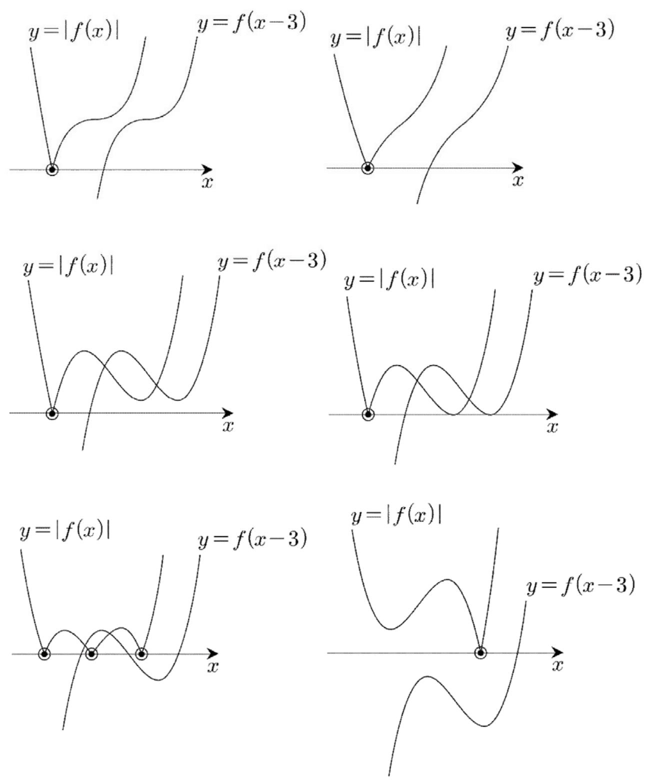
$p(x)=2\times 0=0(=2f'(\beta))$

$x=\gamma$에서 함수 $|f(x)|$의 좌미분계수와 우미분계수는 $f'(\gamma)$으로 같으므로

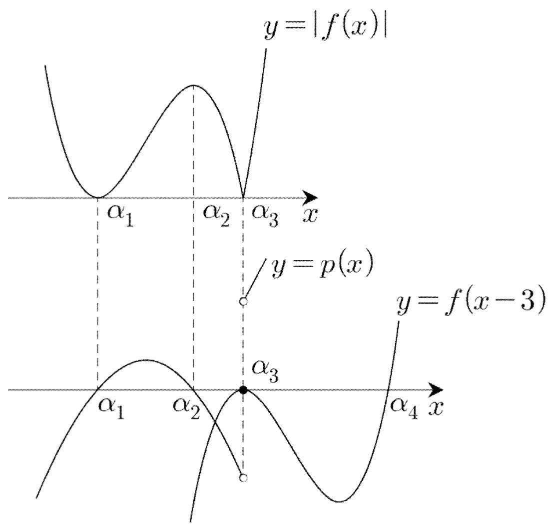
$p(x)=2f'(\gamma)$

이때, 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않고, $x=\beta$, $x=\gamma$에서 미분가능하다.

이제 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 결정하자.
조건 (가)를 만족시키지 않는 경우를 모두 그려보면 다음과 같다.



(단, ◉는 함수 $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 점이다. 즉, 함수 $p(x)$가 연속이 아닌 점이다.)
점 ◉의 x좌표를 α라고 할 때, $p(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이고 $f(\alpha-3)\neq 0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다.
조건 (나)에서 주어진 방정식을 풀면
$g(x)=0 \Leftrightarrow f(x-3)=0$ 또는 $p(x)=0$
두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수 $|f(x)|$의 그래프 개형은 다음과 같다.



(단, $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4$이다.)

$x=\alpha_3$에서 함수 $p(x)$는 불연속이지만 $f(\alpha_3-3)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha_3$에서 연속이다. (조건(가)○)
위의 그림에서
$\alpha_3-\alpha_1=3$, 즉 $\alpha_3=\alpha_1+3$ (평행이동)
$\alpha_2=\alpha_1+2$ (삼차함수의 비율관계)
$\alpha_4=\alpha_3+3=\alpha_1+6$ (평행이동)
이를 조건 (나)에서 주어진 등식에 대입하면
$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=4\alpha_1+11=7$,
$\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=2$, $\alpha_4=5$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=(x+1)^2(x-2)$
$\therefore\ f(5)=36\times 3=108$
답 108

[참고]
삼차함수의 비율관계를 이용하지 않아도
$\alpha_2=\alpha_1+2$
임을 유도할 수 있다.
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_3)$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)+(x-\alpha_1)^2$
그런데 $f'(\alpha_2)=0$이므로
$f'(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)(3\alpha_2-\alpha_1-2\alpha_3)=0$
$\alpha_1\neq\alpha_2$이므로

$$\therefore\ \alpha_2=\frac{\alpha_1+2\alpha_3}{3}=\frac{\alpha_1+2(\alpha_1+3)}{3}=\alpha_1+2$$

E128 | 답 105

[풀이] ★
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 양수로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. (즉, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때에도 동일한 결과를 얻는다.)
우선 조건 (가)를 생각하자.
$f(1)=f(3)=0$이고,
함수 $f(x)$가
닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고
열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하므로
롤의 정리에 의하여
$f'(c)=0$
인 c가 구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.
그런데 조건 (나)에 의하여 c는 유일하다.

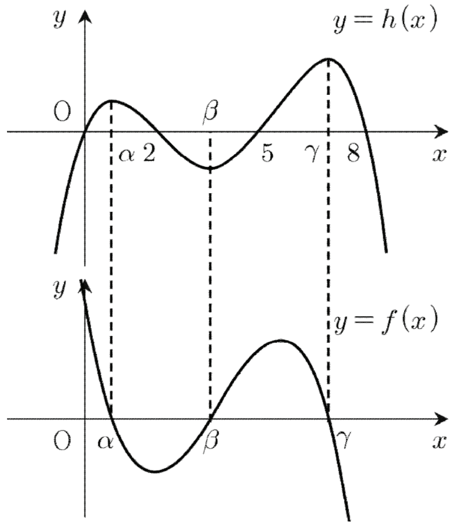
방정식 $f(x)=0$의 해집합은

$\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$

따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)

두 함수 $h(x)$, $f(x)(=h'(x))$의 그래프는 다음과 같다.



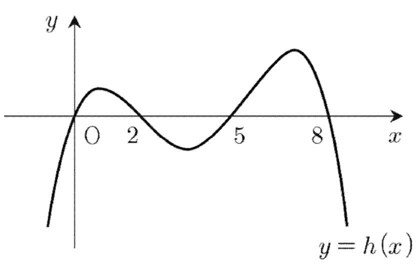
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 감소하므로

$\therefore\ f'(0)<0$

▸ ㄷ. (참)

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_m^{m+2} f(x)dx = h(m+2)-h(m)$$



위의 그림에서

$m=1$일 때, $h(3)-h(1)<0$

$m=2$일 때, $h(4)-h(2)<0$

$m=3$일 때, $h(5)-h(3)>0$

$m=4$일 때, $h(6)-h(4)>0$

$m=5$일 때, $h(7)-h(5)>0$

$m=6$일 때, $h(8)-h(6)<0$

$\vdots$

주어진 부등식을 만족시키는 자연수 m은 3, 4, 5 뿐이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

F032 | 답 ④

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<0)\\ f(x) & (x>0)\end{cases}$ ($g'(x)$는 이차함수)

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-} g'(x) = \lim_{x\to 0+} g'(x)$, 즉 $-f(0)=f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

▸ ㄴ. (거짓)

함수 $g'(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

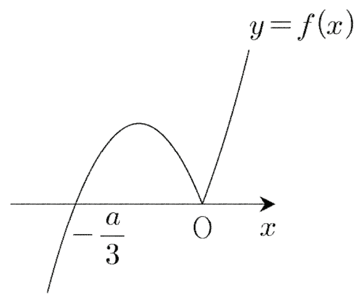
$g'(x)=3x^2+ax$ ($\because g'(0)=0$(ㄱ))

함수 $f(x)$의 방정식은

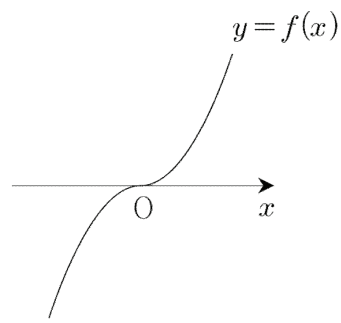
$f(x)=\begin{cases}-3x^2-ax & (x<0)\\ 3x^2+ax & (x\geq 0)\end{cases}$

함수 $f(x)$의 그래프는

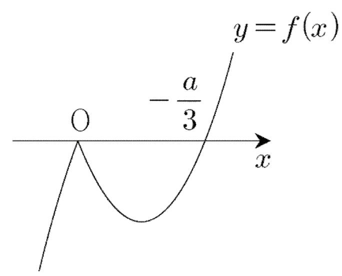
- $a>0$인 경우 (극댓값을 갖는다.)



- $a=0$인 경우 (극값을 갖지 않는다.)



- $a<0$인 경우 (극댓값을 갖는다.)



따라서 주어진 명제는 거짓이다.

▸ ㄷ. (참)

$2<f(1)=3+a<4$, 즉, $-1<a<1$

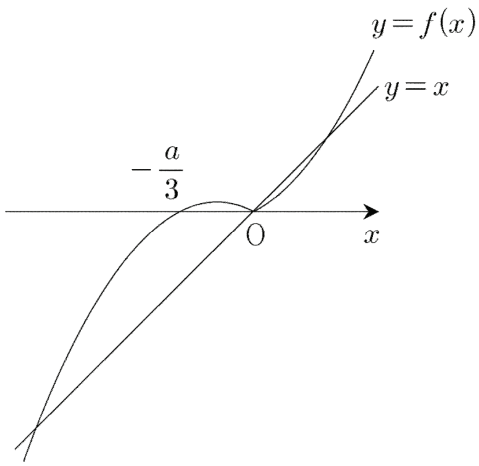
이므로 다음이 성립한다.

$-1<$(곡선 $y=f(x)$ 위의 원점 O에서의 우미분계수의 크기)<1,

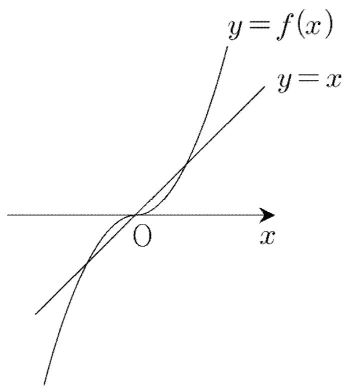
$-1<$(곡선 $y=f(x)$ 위의 원점 O에서의 좌미분계수의 크기)<1

방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 각각

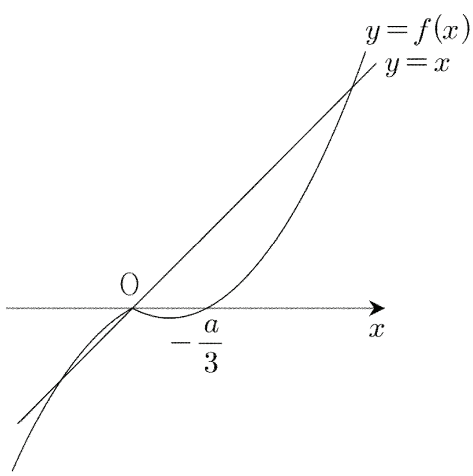
- $a>0$의 경우 (3개)



- $a=0$의 경우 (3개)



- $a<0$의 경우 (3개)



따라서 주어진 명제는 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

F033 | 답 39

[풀이]

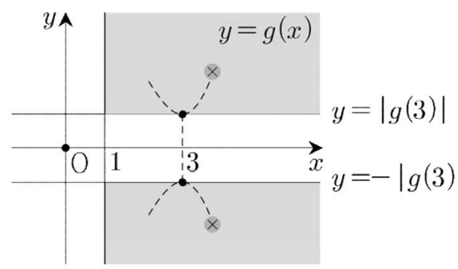
$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3+\cdots$

이고, $g(0)=0$이다.

$x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge g(4)$이므로

함수 $g(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다. $\cdots$(*)

한편 $g(3)\ne 0$이라고 하자.



만약 $x\ge 1$일 때, $g(x)\ge |g(3)|$이면 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다. 이는 (*)에 모순이다.

만약 $x\ge 1$일 때, $g(x)\le -|g(3)|$이면

함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

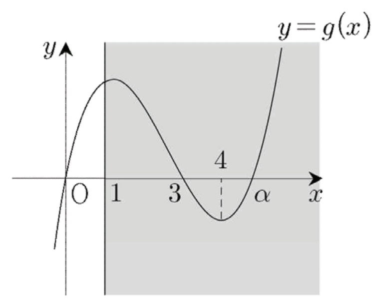
그런데 $g(4)<0$이고 $x\to\infty$일 때, $g(x)\to\infty$이므로

함수 $g(x)$의 그래프는 x축과 반드시 만나야 한다.

($\because$ 사이값 정리)

귀류법에 의하여 $g(3)=0$

함수 $g(x)$의 그래프는



$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-\alpha)$로 두자. (단, $\alpha>4$)

$g'(x)=\frac{1}{3}(x-3)(x-\alpha)+\frac{1}{3}x(x-\alpha)$

$+\frac{1}{3}x(x-3)$

$g'(4)=\frac{4-\alpha}{3}+\frac{4(4-\alpha)}{3}+\frac{4}{3}$

$=\frac{24-5\alpha}{3}=0,\ \alpha=\frac{24}{5}$

$\therefore\ f(9)=g'(9)$

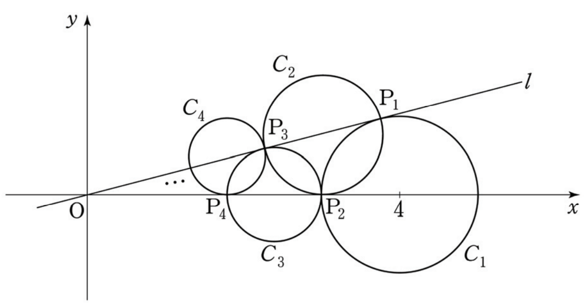
$=\frac{1}{3}\times 6\times\frac{21}{5}+\frac{1}{3}\times 9\times\frac{21}{5}+\frac{1}{3}\times 9\times 6$

$=39$

G139

●●● (2009-가형14/나형14)

좌표평면에 원 $C_1 : (x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자. 중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.) [4점]



① $\frac{3}{2}\pi$　② 2π　③ $\frac{5}{2}\pi$　④ 3π　⑤ $\frac{7}{2}\pi$

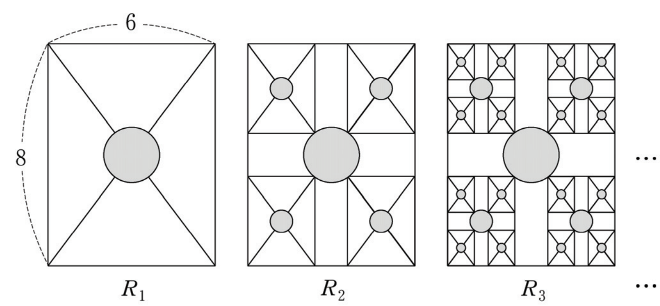
G. 등비급수(기하): 원의 정의(중심/반지름)

▶ 실전 이론 p.237

G140

○○○ (2008-가형17/나형17)

아래와 같이 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 8인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 직사각형의 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 있는 합동인 4개의 직사각형 각각에서 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.) [4점]



① $\frac{37}{9}\pi$　② $\frac{34}{9}\pi$　③ $\frac{31}{9}\pi$　④ $\frac{28}{9}\pi$　⑤ $\frac{25}{9}\pi$

H206

★★★
(2017−가형30)

$x > a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x > a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$이다. (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$) (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

H. 그래프 개형: $y = x\sin x$

▶ 실전 이론 p.376

H207

●●●
(2012−가형18)

정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le \pi\}$인 함수 $f(x) = 2x\cos x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(a) = 0$이면 $\tan a = \dfrac{1}{a}$이다. ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$에 있다. ㄷ. 구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I. 정적분: 주기성

▶ 실전 이론 p.450

I041

★★★ (2022(9)-미적분30)

최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = 0$

(나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0 \le x < 1$일 때 $g(x) = f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1) = g(x)$이다.
$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,

$\int_0^5 xg(x)dx = \frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

I. 정적분: 역함수

▶ 실전 이론 p.452

I042

●●● (2022(예시문항)-미적분29)

함수 $f(x) = e^x + x - 1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x) = \int_0^x \{t - f(s)\}ds$$

가 $x = \alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$의 값을 구하시오. [4점]

I043

●●● (2014(예비)-B형21)

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때 $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$이다.

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 4\int_0^1 f(x)dx$

ㄴ. $1 < x < 2$일 때 $f'(x) > 0$이다.

ㄷ. $\int_1^3 x|f'(x)|dx = 4$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 3

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라. (단, a, b는 양수이다.)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$$

접근법

두 실수 a, b가 주어지면

$a>b$, $a=b$, $a<b$

의 세 경우로 나눠야 한다.

풀이

(i) $a>b(>0)$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$=\frac{a+0}{1+0}=a$$

(ii) $a=b(>0)$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a^{n+1}}{2a^n}=\lim_{n\to\infty}a=a$$

(iii) $(0<)a<b$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0+b}{0+1}=b$$

답 풀이참조

G. 수열의 극한: 치환

▶ 기출 문제 p.14

치환을 이용하여 수열의 극한값의 계산을 해보자.

2개 이상의 일반항의 사칙 연산으로 만든 일반항은 새로운 일반항으로 치환한다.

예를 들어 아래의 예제에서 a_n-b_n은 두 일반항 a_n, b_n의 차로 만들어진 일반항이고, 이를 새로운 일반항 c_n으로 치환한다. 즉, $a_n-b_n=c_n$으로 둔다.

예제 1

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$의 값을 구하시오. (단, α, β는 상수이다.)

풀이

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\boxed{a_n-b_n})=\beta$에서 $\boxed{}$은 수열 $\{a_n-b_n\}$의 일반항이고,

이를 새로운 일반항 c_n으로 치환하자.

$a_n-b_n=c_n$으로 두면

$b_n=a_n-c_n$이고, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\beta$이므로

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\alpha-\beta$

답 $\alpha-\beta$

[풀이2]

$b_n=a_n-(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

와 같이 식의 변형으로 문제를 해결해도 좋다. 즉,

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\alpha-\beta$

답 $\alpha-\beta$

예제 2

다음 명제들의 참, 거짓을 판단하시오. (참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.)

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \beta$일 때, $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\beta}{\alpha}$이다.
(단, $a_n \neq 0$이고, $\alpha(\neq 0)$, β는 상수이다.)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ 이다. (단, α는 상수이다.)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \beta$이면

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\alpha-\beta}{2}$이다.

ㄹ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$이다.

풀이

ㄱ. (참)

$a_n b_n = c_n$으로 두면 $b_n = \frac{c_n}{a_n}$이고, $\lim_{n\to\infty} c_n = \beta$이므로

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \frac{\beta}{\alpha}$$

ㄴ. (참)

$a_n - b_n = c_n$으로 두면 $b_n = a_n - c_n$이고,

$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = \infty$$

ㄷ. (참)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n + \beta_n + \alpha_n - \beta_n}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n + \beta_n - (\alpha_n - \beta_n)}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

ㄹ. (참)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이고,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n\left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right) = \alpha$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right) = 0$, 즉

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$$

답 ㄱ. 참 ㄴ. 참 ㄷ. 참 ㄹ. 참

예제 3

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n + 7n^2}{2n^2+1} = 10$일 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

풀이1

$\frac{na_n + 7n^2}{2n^2+1} = b_n$으로 두면 $a_n = b_n\left(2n + \frac{1}{n}\right) - 7n$이고,

$\lim_{n\to\infty} b_n = 10$이다.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{b_n\left(2 + \frac{1}{n^2}\right) - 7\right\} = 13$$

답 ④

풀이2

$n\to\infty$일 때, $a_n \approx 13n$이면

$$\frac{na_n + 7n^2}{2n^2+1} \approx \frac{13n^2 + 7n^2}{2n^2} \to \frac{13+7}{2} = 10$$

임을 알 수 있다.

$n\to\infty$일 때, $\frac{a_n}{n} \approx 13$

답 ④

예제 4

$\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{3n^2-2n}{n+1}\right)=5$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

풀이1

$b_n=na_n-\frac{3n^2-2n}{n+1}$으로 두면 $\lim_{n\to\infty}b_n=5$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}+\frac{3n-2}{n+1}\right)=0+3=3$

답 3

풀이2

$n\to\infty$일 때,

$$na_n-\frac{3n^2-2n}{n+1}=n\left(a_n-\frac{3n^2-2n}{n^2+n}\right)$$

$$\approx \underbrace{n}_{\infty}\times\underbrace{(a_n-3)}_{0}\to 5$$

이므로 $a_n\approx 3$이다.

답 3

풀이3

$$\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{3n^2-2n}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\underbrace{(a_n-3)}_{0}n^2+\underbrace{(a_n+2)}_{5}n}{n+1}\right)=5$$

이므로 $a_n\approx 3$일 수 밖에 없다.

답 3

G. 수열의 극한: 수렴하는 수열

▶ 기출 문제 p.15

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha(\alpha$는 상수$)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\alpha$이다

예를 들어 일반항이 $a_n=\frac{1}{n}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}=0$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=0$이다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha(\alpha$는 상수$)$이면 $\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\alpha$이다.

이 명제의 역도 성립한다.

다음의 세 명제를 생각해보자.

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$이다. (참)

(2) $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이다. (거짓)

(반례) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_{2n-1}=1+\frac{1}{n},\ a_{2n}=\frac{1}{n}$

이면 $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty}a_{2n}=0$이므로

수열 $\{a_n\}$은 진동하면서 발산한다.

(3) $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$이면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이다. (참)

예제 5

다음 극한의 수렴과 발산을 판단하시오. 만약 수렴한다면 극한값을 구하시오.

(1) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \sin\frac{n}{2}\pi$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

(2) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = (-1)^n n$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

풀이

(1)

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots$

(즉, $1,\ 0,\ -1,\ 0$이 반복된다.)

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots$

(즉, $1,\ 1,\ 0,\ 0$이 반복된다.)

$\frac{S_{4n-3}}{4n-3}=\frac{1}{4n-3},\ \frac{S_{4n-2}}{4n-2}=\frac{1}{4n-2},$

$\frac{S_{4n-1}}{4n-1}=0,\ \frac{S_{4n}}{4n}=0$이고,

$n\to\infty$일 때, $\frac{1}{4n-3}\to0,\ \frac{1}{4n-2}\to0,\ 0\to0$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$$

(2)

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ -7,\ 8,\ \cdots$

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$-1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -4,\ 4,\ \cdots$

$\frac{S_{2n-1}}{2n-1}=-\frac{n}{2n-1},\ \frac{S_{2n}}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$이고,

$n\to\infty$일 때, $-\frac{n}{2n-1}\to-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$은 발산한다.

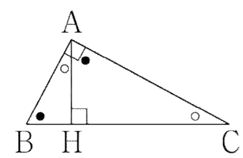
답 (1) 0 (2) 발산

G. 수열의 극한: 직각삼각형 2개

▶ 기출 문제 p.26

평면기하의 활용은 '삼각함수의 극한과 평면기하' 편에서 자세하게 다룬다. 여기서는 직각삼각형의 닮음에 대한 기하학적 상황을 공부해보자. (이 역시 '삼각함수의 극한과 평면기하' 편에서 아주 자세하게 다시 다룬다.)

$\angle CAB=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, $\bullet+\circ=90^\circ$)

위의 그림에서 세 직각삼각형

ABC, HBA, HAC

중 어느 두 삼각형도 서로 닮음이다.

$\overline{AH}^2=\overline{BH}\times\overline{HC}$

즉, 세 선분 BH, AH, HC의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

증명

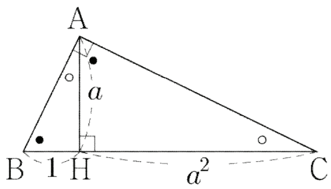
$\triangle BHA \sim \triangle AHC$

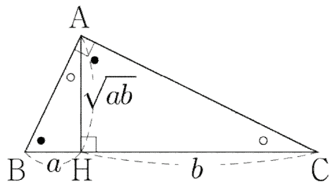
이므로

$\overline{BH}:\overline{HA}=\overline{AH}:\overline{HC}$

$\therefore\ \overline{AH}^2=\overline{BH}\times\overline{HC}$

예를 들어 다음의 두 경우를 생각해 볼 수 있다.

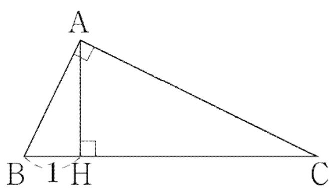




예제 1

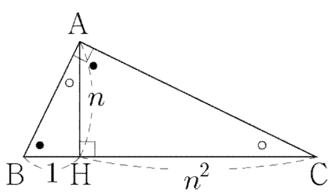
$\angle \mathrm{CAB}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{\mathrm{BH}}=1$,

$\tan(\angle \mathrm{CBA})=n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{n^2}$의 값을 구하시오.



풀이

'삼각형의 세 내각의 합은 180°이다.'를 이용하면 다음과 같이 각의 크기를 결정할 수 있다.
그리고 $\triangle \mathrm{ABC} \sim \triangle \mathrm{HBA} \sim \triangle \mathrm{HAC}$이므로 두 변 AH, HC가 다음과 같다.



$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^2}{n^2}=1$$

답 1

G. 수열의 극한: 극한의 기하적 해석

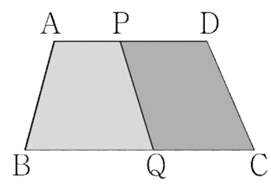
▶ 기출 문제 p.27

• 수열의 극한의 기하적 해석

아래의 네 문제를 풀고, 기하적 관점에서 해석해보아라.

예제 1

사다리꼴 ABCD에 대하여 선분 AD의 $n:n+1$ 내분점을 P, 선분 BC의 $2n:n+2$ 내분점을 Q라고 하자. 두 사각형 ABQP, PQCD의 넓이를 각각 $S(n)$, $T(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{T(n)}$의 값을 구하시오.
(단, $\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$이다.)



풀이1

$$\frac{S(n)}{T(n)}=\frac{\frac{n}{2n+1}\overline{\mathrm{AD}}+\frac{2n}{3n+2}\overline{\mathrm{BC}}}{\frac{n+1}{2n+1}\overline{\mathrm{AD}}+\frac{n+2}{3n+2}\overline{\mathrm{BC}}}$$

이므로 $n\to\infty$일 때, $\frac{S(n)}{T(n)} \to \frac{\frac{1}{2}\times 2+\frac{2}{3}\times 3}{\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times 3}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

풀이2

$n\to\infty$일 때, $n:n+1$은 $1:1$이고, $2n:n+2$은 $2:1$이므로
점 P는 선분 AD의 중점이고, 점 Q는 선분 BC의 $2:1$ 내분점이다.
즉, $\overline{\mathrm{AP}}=1$, $\overline{\mathrm{BQ}}=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{T(n)}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

답 $\dfrac{3}{2}$

예제 2

두 직선 $y=nx-2n$, $y=-x+3$의 교점의 x좌표를 a_n이라고 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

풀이1

두 직선의 방정식을 연립하면

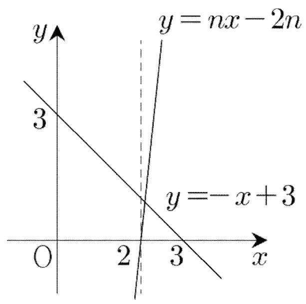
$nx-2n=-x+3$, $(n+1)x=2n+3$, $x=\dfrac{2n+3}{n+1}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n+1}=2$

답 2

풀이2

두 직선 $y=-x+3$, $y=n(x-2)$를 한 좌표평면에 그리자.



위의 그림처럼 두 직선의 교점의 x좌표는 2에 한없이 가까워진다.

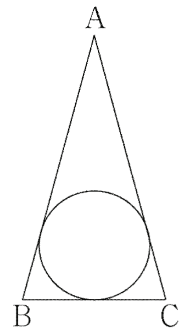
$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

=(두 직선 $y=-x+3$, $x=2$의 교점의 x좌표)$=2$

답 2

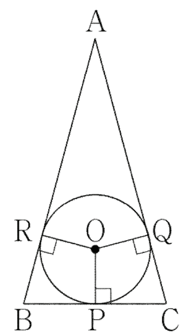
예제 3

$\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}(=n)$인 이등변삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r_n이라고 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$의 값을 구하시오.



풀이1

원의 중심을 O, 점 O에서 세 선분 BC, CA, AC에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라고 하자.



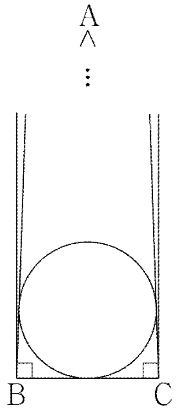
(△ABC의 넓이)=(△ABO의 넓이)+(△OBC의 넓이)
+(△AOC의 넓이)

즉, $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{1}{2}(2n+2)r_n$, $r_n=\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n+1}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n+1}=1$

답 1

풀이2



위의 그림처럼 원의 반지름의 길이는 1에 수렴한다.

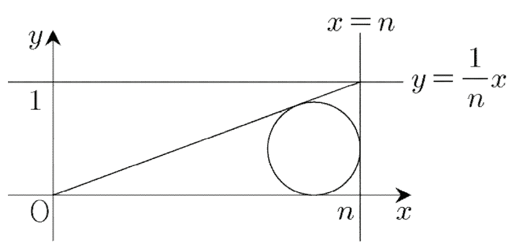
$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n = 1$

답 1

예제 4

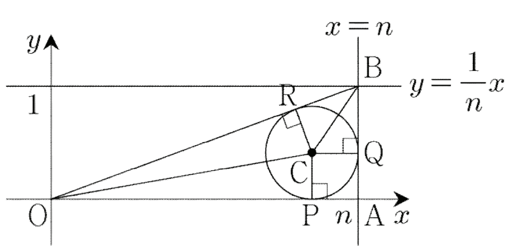
좌표평면에서 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$, $x=n$과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 내접원 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.

$\lim_{n\to\infty} r_n$의 값을 구하시오.



풀이1

원의 중심을 C, 점 C에서 x축, 두 직선 $x=n$, $y=\frac{1}{n}x$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라고 하자. (단, A$(n,\ 0)$, B$(n,\ 1)$이다.)



$\overline{OB}=\overline{OR}+\overline{RB}=\overline{OP}+\overline{QB}$, 즉

$\sqrt{n^2+1}=(n-r_n)+(1-r_n)$

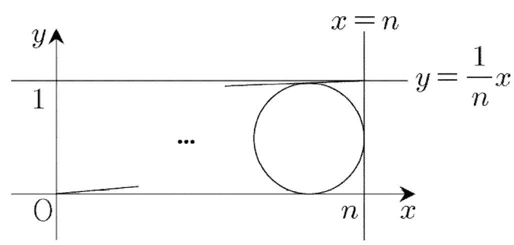
$r_n=\frac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

풀이2



$n\to\infty$일 때, 직선 $y=\frac{1}{n}x$는 점 $(n,\ 1)$을 지나면서 직선 $y=1$에 한없이 가까워지므로

위의 그림처럼 원의 지름의 길이는 1에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

예제 2

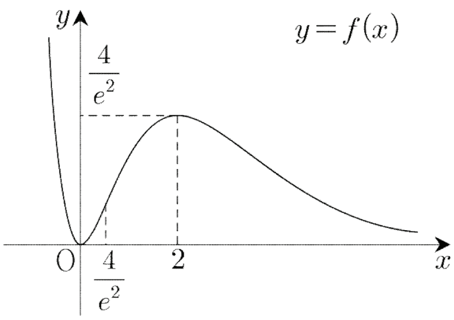
함수 $f(x)=x^2e^{-x}$에 대하여 함수 $f(f(x))$의 그래프를 그리시오.

풀이

$f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 극솟값은 0이고, 극댓값은 $\dfrac{4}{e^2}$이다.

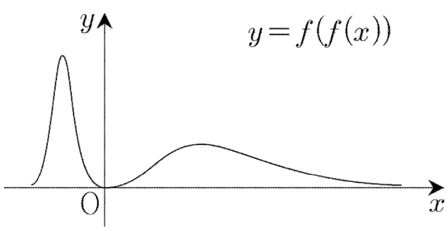


x: $-\infty$ ⇨ 0, $f(x)$: ∞ ⇨ 0, $f(f(x))$: (0) ⇨ 극대 ⇨ 0

x: 0 ⇨ 2, $f(x)$: 0 ⇨ $\dfrac{4}{e^2}$, $f(f(x))$: 0 ⇨ $f\left(\dfrac{4}{e^2}\right)$ (극대)

x: 2 ⇨ ∞, $f(x)$: $\dfrac{4}{e^2}$ ⇨ (0), $f(f(x))$: $f\left(\dfrac{4}{e^2}\right)$(극대) ⇨ (0)

함수 $f(f(x))$의 그래프는



답 풀이 참조

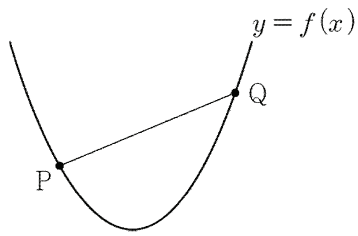
H. 그래프 개형: 볼록성

▶ 기출 문제 p.148

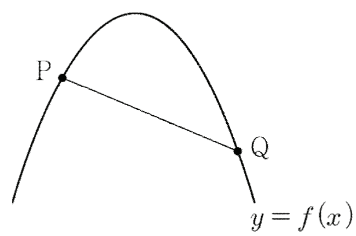
교과서 본문에서는 함수의 오목과 볼록을 다음과 같이 정의하고 있다.

• 곡선의 오목과 볼록의 정의

어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다고 한다.



어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록(또는 아래로 오목)하다고 한다.



✪ 극점은 변곡점이 아니고, 변곡점은 극점이 아니다.

다음의 두 명제를 생각해보자.
함수가 연속인 이계도함수를 가질 때,
❶ 변곡점은 극점일 수 없다. (참)
❷ 극점은 변곡점일 수 없다. (참)
위의 두 명제를 대수적으로 증명할 필요는 없다.(어렵진 않다.) 기하적 관점에서 기억해두면 된다.

함수 $f(x)$가 이계도함수를 가질 때, 이 함수의 오목과 볼록은 이계도함수의 부호로 판단할 수 있다.

• 이계도함수를 이용한 곡선의 오목과 볼록의 판단

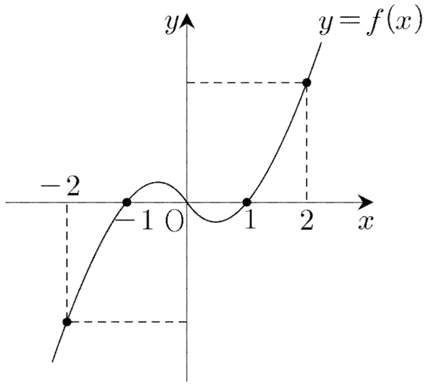
함수 $f(x)$가 이계도함수를 가질 때,
함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서
(1) $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
(2) $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

예제 1

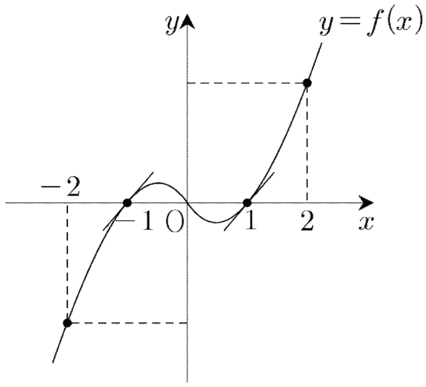
실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(가) $f(-2)=-2$, $f(1)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$이다.
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]
ㄱ. $f'(-1)=f'(1)$
ㄴ. 열린구간 $(-2,\ 0)$에서 함수 $f(x)$의 그래프가 위로 볼록하면 열린구간 $(0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.
ㄷ. 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수의 최솟값은 2이다.
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

✪ 이 문제는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 아예 그리지 않고 대수적으로만 풀 수도 있고, 계산을 최소로 줄이고 그래프의 개형에 의존하여 풀 수도 있다. 실전에서는 아무래도 후자로 접근해야 빠르게 답을 구할 수 있겠으나, (이 문제와 달리) 대수적으로 엄밀하게 참, 거짓을 판단해야 하는 문제도 종종 출제되므로(즉, 그래프의 개형에만 의존하면 오판할 가능성이 커지는 문제들), 전후 두 가지의 방법을 모두 알아두어야 한다.
이제 풀이를 시작하자.
조건 (가)에 의하여
곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(-2,\ -2)$, $(1,\ 0)$을 지난다.
조건 (나)에서 주어진 항등식을 변형하면
$f(-x)=-f(x)$
이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
그러므로 곡선 $y=f(x)$는
두 점 $(2,\ 2)$, $(-1,\ 0)$을 지난다.
문제에서 주어진 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형 중 하나를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. (참)



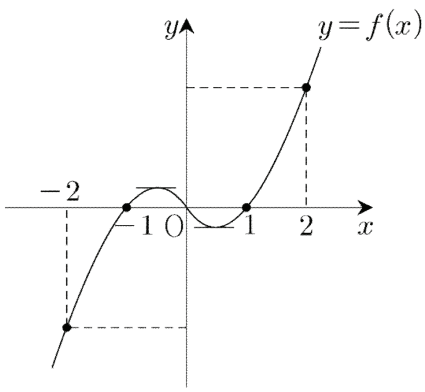
함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 원점에 대하여 서로 대칭인 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 서로 같다.

$\therefore\ f'(-1)=f'(1)$

ㄴ. (참)

함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$의 그래프가 열린구간 $(-2,\ 0)$에서 위로 볼록하면 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0,\ 2)$에서 아래로 볼록이다.

ㄷ. (참)



함수 $f(x)$가

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고

열린구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하므로

롤의 정리에서

$$\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=f'(c_1) \text{ 즉, } f'(c_1)=0$$

인 c_1이 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 적어도 하나 존재한다.

마찬가지의 방법으로

$f'(c_2)=0$

인 c_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 적어도 두 개 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

ㄱ, ㄴ이 참임을 산술적으로 증명하면 다음과 같다.

ㄱ. (참)

조건 (나)에서 주어진 항등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-f'(-x)=0$

모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=f'(-x)$ $\cdots(*)$

$x=1$을 대입하면

$f'(1)=f'(-1)$

ㄴ. (참)

(*)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)=-f''(-x)$

곡선 $y=f''(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

열린구간 $(-2,\ 0)$에서 $f''(x)<0$이면

열린구간 $(0,\ 2)$에서 $f''(x)>0$이다.

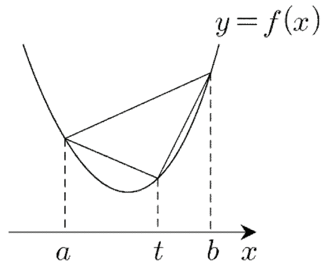
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0,\ 2)$에서 아래로 볼록이다.

이계도함수와 관련된 다음의 두 정리를 알아보자.

(1) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.
$a<t<b$인 임의의 세 수 a, t, b에 대하여

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(b)-f(t)}{b-t}$$

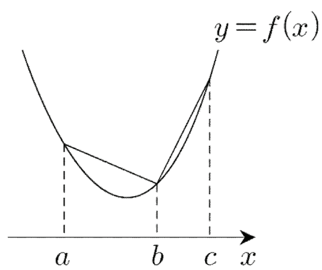
이면 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다.



(2) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $a<b<c$인 모든 a, b, c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

일 필요충분조건은 $x_1<x_2$인 모든 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)<f'(x_2)$ ($\Leftrightarrow$ 이 구간에서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다.)



(1)을 이용하여 (2)가 참임을 증명하시오.
(※(1)은 그림을 그려서 참임을 알 수 있으면 된다. 즉, 대수적인 증명은 하지 않아도 좋다.)

증명

($\Rightarrow$)
함수 $f(x)$는 아래로 볼록이므로
세 수 $a<x<b$에 대해서

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

$x\to a$이면 $f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$이고,

$x\to b$이면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$이다.

$a<b$일 때, $f'(a)<f'(b)$이므로 $f'(x)$는 증가함수이다.

($\Leftarrow$)
평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha) \text{ (단, } a<\alpha<b)$$

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\beta) \text{ (단, } b<\beta<c)$$

이므로
$f'(\alpha)<f'(\beta)$에서

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

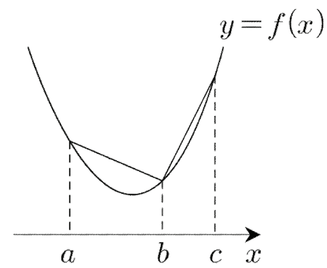
따라서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다. ■

이제 다음과 같은 필요충분조건을 생각할 수 있다.

실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\alpha<a<b<c<\beta$인 모든 a, b, c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

이다.



$\Leftrightarrow$

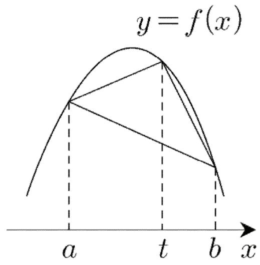
구간 (α, β)에서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다.

물론 아래의 두 정리도 생각할 수 있다.

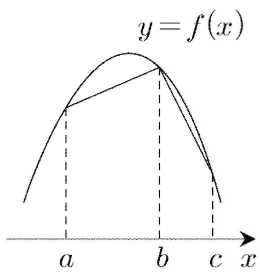
(1) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.
$a<t<b$인 임의의 세 수 a, t, b에 대하여

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(b)-f(t)}{b-t}$$

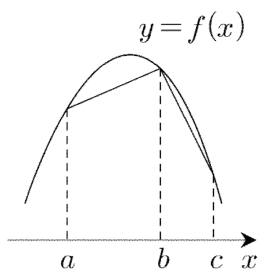
이면 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다.



(2) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가
$a<b<c$인 모든 a, b, c에 대하여
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$
일 필요충분조건은 $x_1<x_2$인 모든 x_1, x_2에 대하여
$f'(x_1)>f'(x_2)$ ($\Leftrightarrow$ 이 구간에서 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다.)



이제 다음과 같은 필요충분조건을 생각할 수 있다.
실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가
$\alpha<a<b<c<\beta$인 모든 a, b, c에 대하여
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$
이다.



$\Leftrightarrow$
구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다.

이제 위의 필요충분조건을 이용하여 아래의 예제를 풀어보자.

예제 2

$0<a<b<c<\frac{\pi}{2}$인 a, b, c에 대하여
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$
을 만족하는 함수 $f(x)$를 고르면?

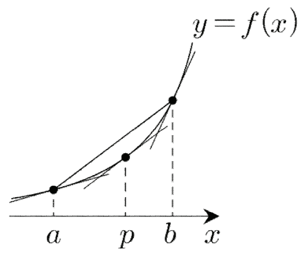
ㄱ. $f(x)=\sin x$　　ㄴ. $f(x)=\cos x$
ㄷ. $f(x)=\tan x$

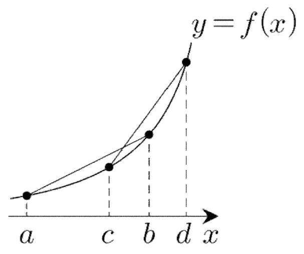
① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　　⑤ ㄱ, ㄷ

풀이
문제에서 주어진 조건에 의하여
함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록이다.
구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서
ㄱ. 함수 $f(x)=\sin x$는 위로 볼록이다.
ㄴ. 함수 $f(x)=\cos x$는 위로 볼록이다.
ㄷ. 함수 $f(x)=\tan x$는 아래로 볼록이다.
답 ③

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

- 함수 $f(x)$가 아래로 볼록인 경우





왼쪽: 평균값의 정리에 의하여

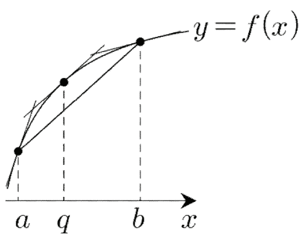
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(p)$이고, $f'(a)<f'(p)<f'(b)$이므로

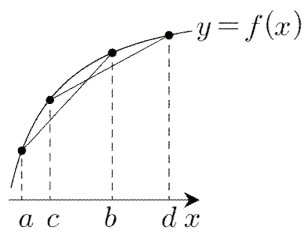
$$f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$$

오른쪽: 평균값의 정리를 두 번 적용하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

- 함수 $f(x)$가 위로 볼록인 경우





왼쪽: 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(q)$이고, $f'(a)>f'(q)>f'(b)$이므로

$$f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(b)$$

오른쪽: 평균값의 정리를 두 번 적용하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

예제 3

구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=x\sin x$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 갖는다고 하자. (단, $\alpha<\beta$)
이때, 다음의 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\sec^2\beta>\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\pi-\beta}>\sec^2\alpha$$

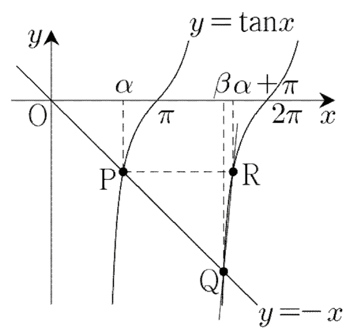
증명

$f'(x)=\sin x+x\cos x=\cos x\{\tan x-(-x)\}$

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로

아래 그림처럼 구간 $[0,\ 2\pi]$에서

곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=-x$의 두 교점의 x좌표는 각각 α, β이다.



(단 $\mathrm{P}(\alpha,\ -\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ -\beta)$, $\mathrm{R}(\alpha+\pi,\ \tan\alpha)$)

(곡선 $y=\tan x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기)

$=\sec^2\alpha$,

(곡선 $y=\tan x$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기)

$=\sec^2\beta$,

(직선 QR의 기울기)

$=\dfrac{-\alpha+\beta}{\alpha+\pi-\beta}$

세 직선의 기울기의 대소 비교를 하면

다음의 부등식을 얻는다.

$$\therefore\ \sec^2\beta>\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\pi-\beta}>\sec^2\alpha$$

답 풀이 참조

예제 1

함수 $f(x)$는 다음의 두 조건을 만족시킨다.

(가) $t \geq 1$일 때, $\dfrac{f(t)}{t} - \dfrac{f(t+1)}{t+1} = \dfrac{1}{t}$

(나) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt = a$ (단, a는 상수)

이때, $\displaystyle\int_1^5 \frac{f(t)}{t}dt$의 값을 구하시오.

풀이

조건 (가)에서

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt - \int_1^x \frac{f(t+1)}{t+1}dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt,$$

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt - \int_2^{x+1} \frac{f(t)}{t}dt = \ln x,$$

$$\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt - \int_x^{x+1} \frac{f(t)}{t}dt = \ln x, \text{ 즉}$$

$$\int_x^{x+1} \frac{f(t)}{t}dt = a - \ln x \ (\because (\text{나})) \qquad \cdots (*)$$

(*)에 $x=1$, 2, 3, 4를 대입하면

$$\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt = a, \quad \int_2^3 \frac{f(t)}{t}dt = a - \ln 2,$$

$$\int_3^4 \frac{f(t)}{t}dt = a - \ln 3, \quad \int_4^5 \frac{f(t)}{t}dt = a - \ln 4$$

위의 등식을 변변히 모두 합하면

$$\therefore \int_1^5 \frac{f(t)}{t}dt = 4a - \ln 24$$

답 $4a - \ln 24$

I. 정적분: 선대칭

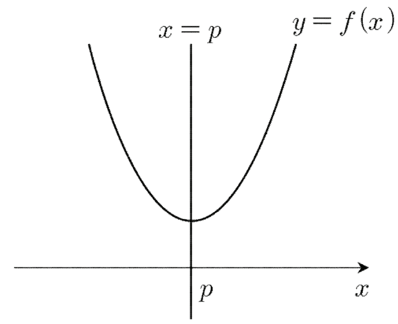
▶ 기출 문제 p.176

선대칭 함수와 점대칭 함수는 정적분의 치환적분법을 적용해 볼 수 있는 좋은 소재들이다.

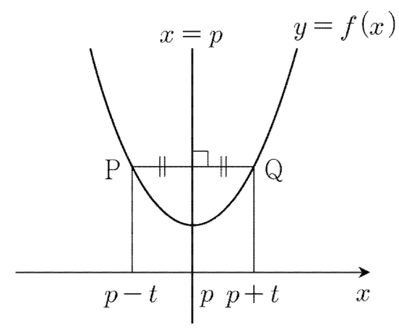
선대칭 함수 중에서 y축에 대칭인 함수는 우함수,
점대칭 함수 중에서 원점에 대칭인 함수는 기함수라고 한다.

• 선대칭 함수

함수 f의 정의역에 속하는 모든 x에 대해서
$f(p+x) = f(p-x)$ ($\Leftrightarrow f(x) = f(2p-x)$)
가 성립하면 함수 f의 그래프는 직선 $x=p$에 대칭이다.



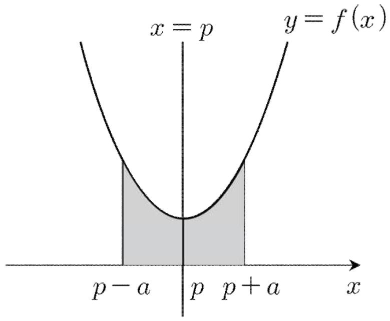
예를 들어 양수 t에 대하여
두 점 $\mathrm{P}(p-t,\ f(p-t))$, $\mathrm{Q}(p+t,\ f(p+t))$는
직선 $x=p$에 대하여 대칭임을 관찰할 수 있다.



$t=0$, $t<0$인 경우도 마찬가지이다.
함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여

$f(x) = f(2p-x)$이면 $\displaystyle\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx = 2\int_p^{p+a} f(x)dx$

이다.
이 명제가 참임을 그래프를 이용하여 확인할 수도 있고, 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명할 수도 있다.



위의 그림에서 색칠된 두 도형 와 는 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다. 즉,

$$\int_{p-a}^{p} f(x)dx=\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

이므로

$$\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx=\int_{p-a}^{p} f(x)dx+\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

$$=2\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

이제 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명하자.
$2p-x=t$로 두면 $-dx=dt$이고,
$x=p-a$일 때 $t=p+a$, $x=p$일 때 $t=p$이다.

$$\int_{p-a}^{p} f(x)dx$$

$$=\int_{p-a}^{p} f(2p-x)dx$$

(⇦ ❶ 문제에서 주어진 항등식 적용)

$$=-\int_{p+a}^{p} f(t)dt$$

(⇦ ❷ 정적분의 치환적분법 적용)

$$=\int_{p}^{p+a} f(t)dt$$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx=\int_{p-a}^{p} f(x)dx+\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

(⇦ ❸ 정적분의 성질 적용)

$$=\int_{p}^{p+a} f(t)dt+\int_{p}^{p+a} f(x)dx=2\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

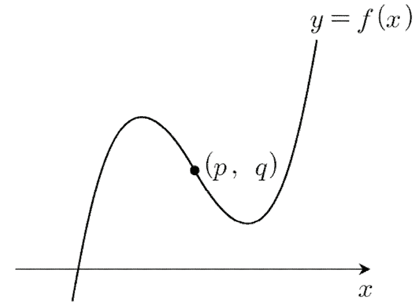
위의 증명과정은 ❶, ❷, ❸의 세 과정으로 나눌 수 있다. 수능에는 이 세 과정을 의식적으로 적용해서 풀어야 하는 문제가 자주 출제된다.

- 점대칭 함수

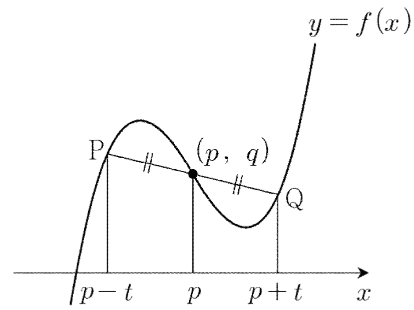
함수 f의 정의역에 속하는 모든 x에 대해서

$$\frac{f(p+x)+f(p-x)}{2}=q \ (\Leftrightarrow f(x)+f(2p-x)=2q)$$

가 성립하면 함수 f의 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대칭이다.



예를 들어 양수 t에 대하여
두 점 $\mathrm{P}(p-t,\ f(p-t))$, $\mathrm{Q}(p+t,\ f(p+t))$이
점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭임을 관찰할 수 있다.

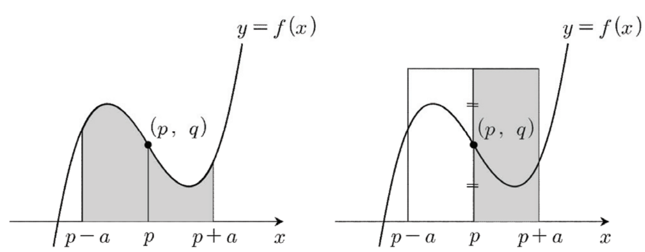


$t=0$, $t<0$인 경우도 마찬가지이다.

함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여

$f(x)+f(2p-x)=2q$이면 $\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx=2aq$이다.

이 명제가 참임을 그래프를 이용하여 확인할 수도 있고, 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명할 수도 있다.



위의 그림에서 색칠된 도형 을 점 $(p,\ q)$를 중심으로 180° 회전시켜서 색칠된 도형 의 위에 붙이면 직사각형이 만들어진다. 이때, 직사각형의 밑변과 높이는 각각 a, $2q$이다. (또는 '$2aq=2a\times q$=(밑변의 길이)×높이' 인 직사각형을 생각할 수도 있다.)

따라서

$$\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx = 2aq$$

이제 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명하자.

$2p-x=t$로 두면 $-dx=dt$이고,

$x=p-a$일 때 $t=p+a$, $x=p$일 때 $t=p$이다.

$$\int_{p-a}^{p} f(x)dx$$

$$=\int_{p-a}^{p} \{2q-f(2p-x)\}dx$$

(⇦ ❶ 문제에서 주어진 항등식 적용)

$$=-\int_{p+a}^{p} \{2q-f(t)\}dt$$

(⇦ ❷ 정적분의 치환적분법 적용)

$$=\int_{p}^{p+a} \{2q-f(t)\}dt$$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx = \int_{p-a}^{p} f(x)dx + \int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

(⇦ ❸ 정적분의 성질 적용)

$$=\int_{p}^{p+a} \{2q-f(t)\}dt + \int_{p}^{p+a} f(x)dx = \int_{p}^{p+a} 2q dx$$

$=2aq$

위의 증명과정은 ❶, ❷, ❸의 세 과정으로 나눌 수 있다. 수능에는 이 세 과정을 의식적으로 적용해서 풀어야 하는 문제가 자주 출제된다.

예제 1

다음 명제들이 참임을 그래프를 이용하여 확인하시오. (단, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.)

(1) $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$이다.

(2) $f(x)$가 우함수이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$이다.

(3) $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$이다.

(4) $f(x)$가 기함수이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{-b}^{-a} f(x)dx$이다.

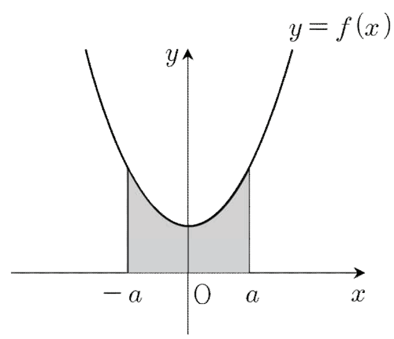
(5) 함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2p-x)$이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx$이다.

(6) 함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(2p-x)=2q$이면

$\int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx = 2(b-a)q$이다.

풀이

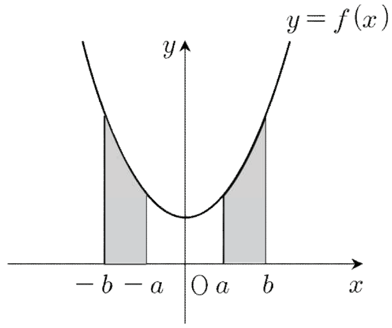
(1) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

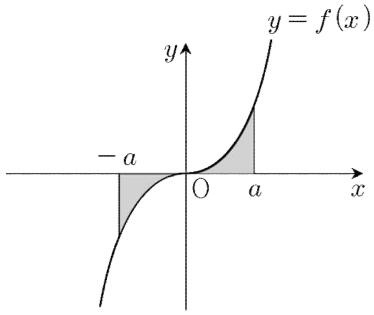
(2) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$$

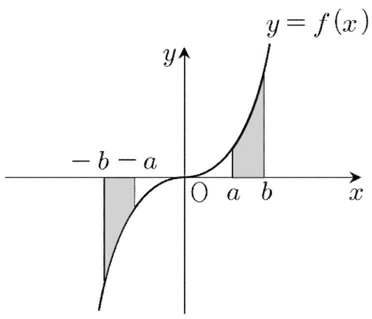
(3) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

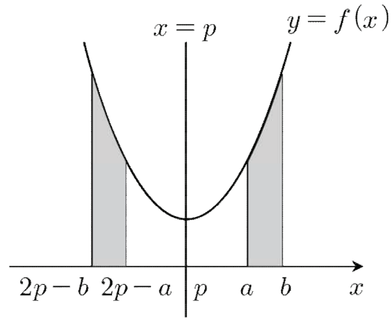
(4) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_{a}^{b} f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} f(x)dx$$

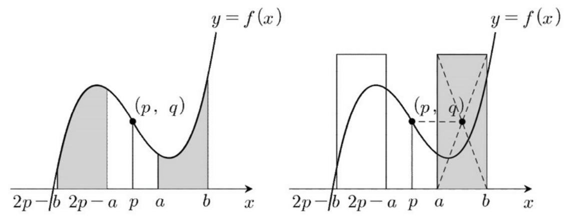
(5) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx$$

(6) (참)



위의 그림에서 색칠된 도형 을 점 (p, q)를 중심으로 180° 회전시켜서 색칠된 도형 의 위에 붙이면 직사각형이 만들어진다. 이때, 직사각형의 밑변과 높이는 각각 $b-a$, $2q$이다.

$$\therefore \int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx=2(b-a)q$$

답 풀이 참조

참고

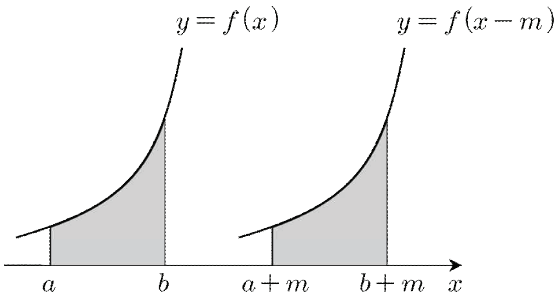
미분법과 관련된 기함수, 우함수의 명제들은 다음과 같다.
(단, 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 미분가능하다.)

1. $f(x)$가 기함수이면 $f'(x)$는 우함수이다. (참)
2. $f(x)$가 우함수이면 $f'(x)$는 기함수이다. (참)
3. $f(x)$가 기함수이면 $f'(0)=0$이다. (거짓)
(반례: $f(x)=x^3-3x$)
4. $f(x)$가 우함수이면 $f'(0)=0$이다. (참)

• 평행이동

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{a+m}^{b+m} f(x-m)dx=\int_{a}^{b} f(x)dx$$



정적분의 치환적분법을 이용하여 위의 등식을 증명하자.

$x-m=t$로 두면 $dx=dt$이고,

$x=a+m$일 때, $t=a$, $x=b+m$일 때, $t=b$이다.

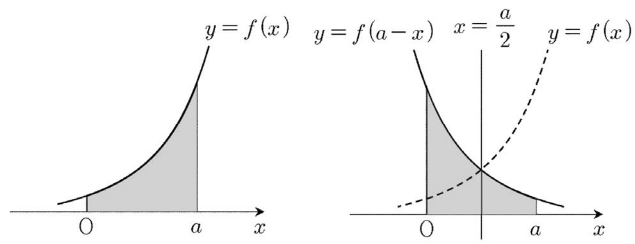
$$\int_{a+m}^{b+m} f(x-m)dx=\int_{a}^{b} f(t)dt=\int_{a}^{b} f(x)dx$$

• 대칭이동

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{0}^{a} f(a-x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx$$

이 명제가 참임을 그래프를 이용하여 확인할 수도 있고, 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명할 수도 있다.



함수 $f(x)$의 그래프를 직선 $x=\dfrac{a}{2}$에 대하여 대칭이동시키면 함수 $f(a-x)$의 그래프와 일치하므로, 위의 그림에서 주어진 명제가 참임을 확인할 수 있다.

이제 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명하자.

$a-x=t$로 두면 $-dx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=a$, $x=a$일 때 $t=0$이다.

$$\int_{0}^{a} f(a-x)dx=-\int_{a}^{0} f(t)dt=\int_{0}^{a} f(x)dx$$

예제 2

다음 명제들이 참임을 그래프를 이용하여 확인하시오. (단, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.)

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(-x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} -f(-x)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^a f(-x)dx$

$\displaystyle=\int_0^a \{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{-a}^0 \{f(x)+f(-x)\}dx$

(4) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_{2p-b}^{2p-a} f(2p-x)dx$

(5) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

$\displaystyle=\int_a^{\frac{a+b}{2}} \{f(x)+f(a+b-x)\}dx$

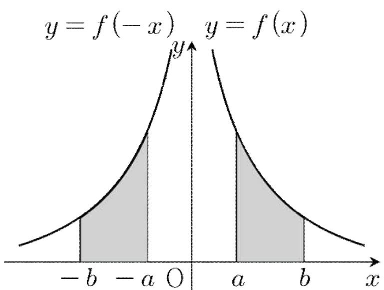
$\displaystyle=\int_{\frac{a+b}{2}}^b \{f(x)+f(a+b-x)\}dx$

(6) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_{2p-b}^{2p-a} \{2q-f(2p-x)\}dx$

$=2(b-a)q$

풀이

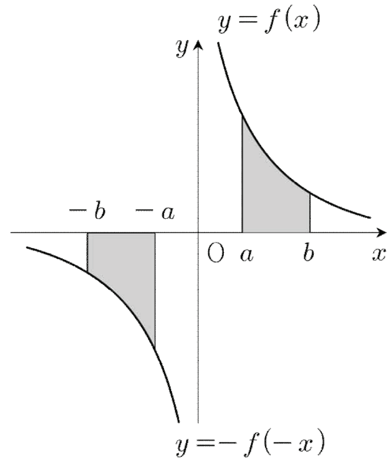
(1) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$\therefore \displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(-x)dx$

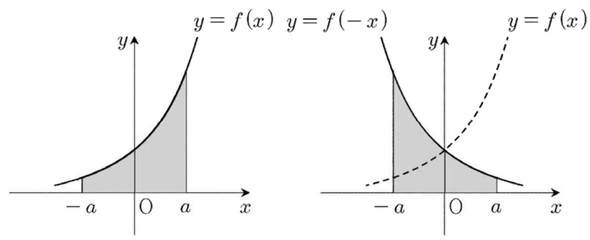
(2) (참)



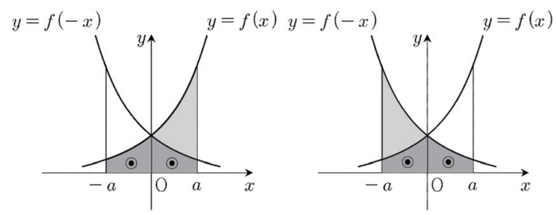
위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$\therefore \displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} -f(-x)dx$

(3) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.



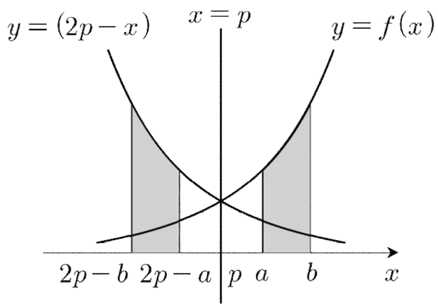
위의 그림에서 색칠된 네 도형(◉)은 모두 합동이므로 문제에서 주어진 등식이 성립함을 알 수 있다.

$\therefore \displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^a f(-x)dx$

$\displaystyle=\int_0^a \{f(x)+f(-x)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-a}^0 \{f(x)+f(-x)\}dx$

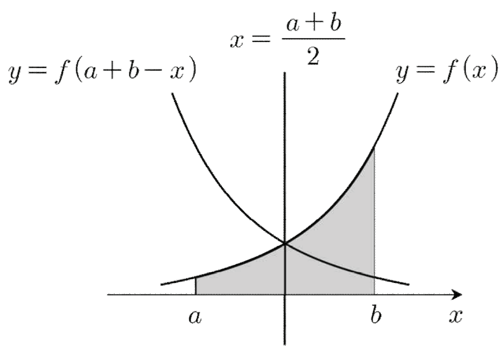
(4) (참)

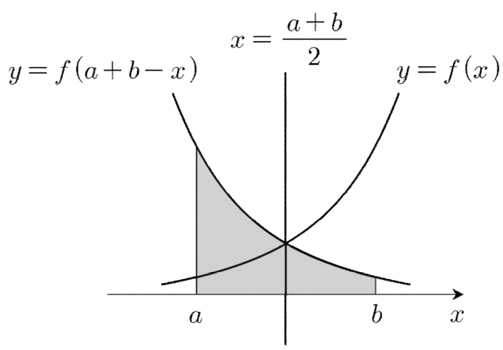


위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

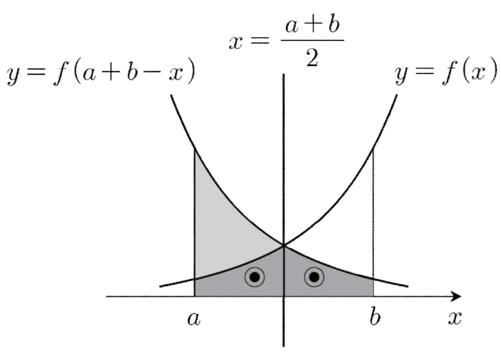
$$\int_a^b f(x)dx=\int_{2p-b}^{2p-a} f(2p-x)dx$$

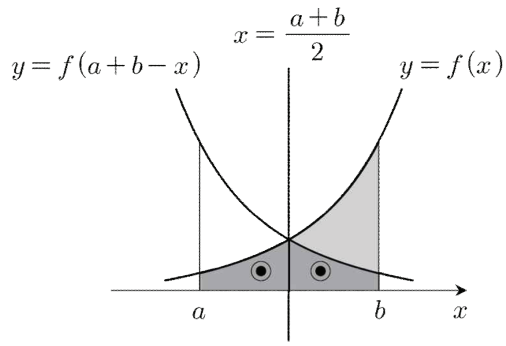
(5) (참)





위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.





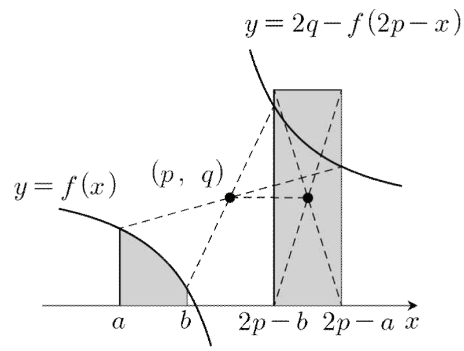
위의 그림에서 색칠된 네 도형(◉)은 모두 합동이므로 문제에서 주어진 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{f(x)+f(a+b-x)\}dx$$

$$=\int_{\frac{a+b}{2}}^b \{f(x)+f(a+b-x)\}dx$$

(6) (참)



위의 그림에서 색칠된 도형 을 점 $(p,\ q)$를 중심으로 180° 회전시켜서 색칠된 도형 의 위에 붙이면 직사각형이 만들어진다. 이때, 직사각형의 밑변과 높이는 각각 $b-a$, $2q$이다.

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{2p-b}^{2p-a}\{2q-f(2p-x)\}dx=2(b-a)q$$

답 풀이 참조

• **확대축소**

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(kx)dx=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x)dx \text{ (단, } k\neq 0)$$

정적분의 치환적분법을 이용하여 위의 명제가 참임을 증명하자.

$kx=t$로 두면, $kdx=dt$이고,

$x=a$일 때 $t=ka$, $x=b$일 때 $t=kb$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_a^b f(kx)dx=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(t)dt=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x)dx$$

예제 3

다음 명제가 참임을 증명하시오. (단, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.)

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^{b-a} f(x+a)dx$$

$$=(b-a)\int_0^1 f((b-a)x+a)dx$$

증명

$x+a=t$로 두면 $dx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=a$, $x=b-a$일 때 $t=b$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_0^{b-a} f(x+a)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$$

$(b-a)x+a=t$로 두면 $(b-a)dx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=a$, $x=1$일 때 $t=b$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$(b-a)\int_0^1 f((b-a)x+a)dx=\int_a^b f(t)dt$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

따라서 주어진 명제는 참이다.

답 풀이 참조

참고

ㄱ에서 적분구간 $[a,\ b]$: $\int_a^b f(x)dx$

ㄴ에서 적분구간 $[0,\ b-a]$: $\int_0^{b-a} f(x+a)dx$

ㄷ에서 적분구간 $[0,\ 1]$: $(b-a)\int_0^1 f((b-a)x+a)dx$

ㄱ을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 ㄴ이다.

ㄴ을 (원점을 기준으로) x축의 방향으로 $\frac{1}{b-a}$배 하면 ㄷ이다.

이므로 점 Q_n은 직선 $2x+y-2=0$ 위에 있다.
자연수 n에 대하여
$\angle Q_nP_nR_n = \angle P_nR_nR_{n-1} = \angle R_nR_{n-1}Q_n = 90^\circ$
사각형의 네 내각의 합은 360° 이므로
$\angle R_{n-1}Q_nP_n = 90^\circ$
직사각형의 정의에 의하여
$\square P_nR_nR_{n-1}Q_n$은 직사각형이다.
자연수 n에 대하여
$\overline{P_nQ_n} = b_n - b_{n-1} = a_n = \overline{P_nR_n}$
즉, 직사각형 $P_nR_nR_{n-1}Q_n$의 이웃하는 두 변의 길이가 같으므로
정사각형의 정의에 의하여
$\square P_nR_nR_{n-1}Q_n$은 정사각형이다.
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle P_nQ_{n+1}Q_n$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}\times\overline{P_nQ_n}\times\overline{P_nQ_{n+1}}$

$=\dfrac{1}{2}\times(b_n-b_{n-1})\times(a_n-a_{n+1})$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}\ (n\ge 1)$

$\dfrac{S_n}{2}=$(중심이 P_n이고 반지름의 길이가 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 인 사분원의 넓이)$-(\triangle P_nQ_{n+1}Q_n$의 넓이$)$

$=\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}=\dfrac{\pi-1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\ (n\ge 1)$

일반항 S_n은

$S_n=\dfrac{\pi-1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\ (n\ge 1)$

등비급수의 합을 구하는 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi-1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2(\pi-1)}{3}$$

답 ③

[참고]
닮음비를 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구할 수도 있다.

$\dfrac{S_1}{2}=$(중심이 P_1이고 반지름의 길이가 1인 사분원의 넓이)

$-(\triangle P_1Q_2Q_1$의 넓이$)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}$

이므로

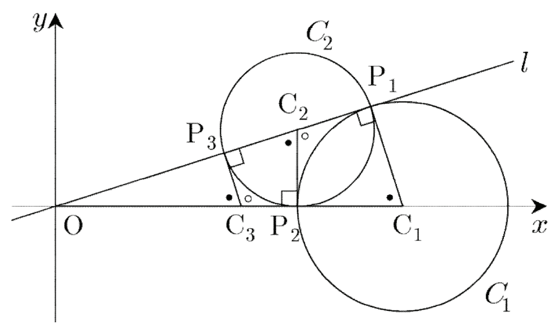
$S_1=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}$

두 정사각형 $P_1R_1R_0Q_1$, $P_2R_2R_1Q_2$의 닮음비가 $2:1$이므로
$S_1 : S_2 = 4:1$
수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}$이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이다.
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2(\pi-1)}{3}$$

G139 | 답 ③

[풀이1]
원의 접선은 접점을 지나는 반지름에 수직이므로 아래 그림과 같이 보조선을 그어야 한다.



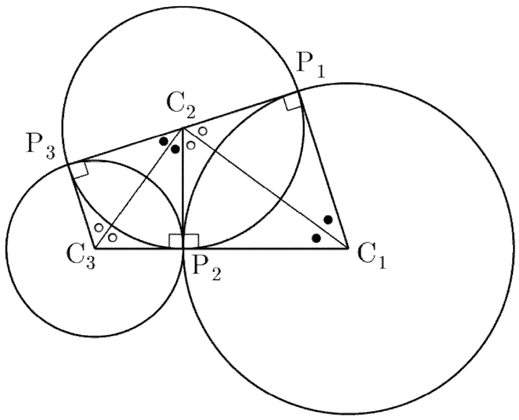
(단, ●+○$=180^\circ$)
위의 그림처럼 삼각형
OC_1P_1, OC_2P_2, $\cdots$, OC_nP_n, $\cdots$
은 모두 닮음이다.
삼각형 OC_1P_1의 각 변의 길이는
$\overline{OC_1}=4$, $\overline{C_1P_1}=1$, $\overline{OP_1}=\sqrt{15}$
이고, 삼각형 OC_2P_2에서 $\overline{OP_2}=3$이므로
두 삼각형 OC_1P_1, OC_2P_2의 닮음비는
$\overline{OP_1}:\overline{OP_2}=\sqrt{15}:3$
이는 두 원 C_1, C_2의 닮음비와 같다.
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{1-\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^2} = \frac{5}{2}\pi$$

답 ③

[풀이2]
자연수 n에 대하여 원 C_n의 중심을 C_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.
직선 l이 점 P_1에서 원 C_1에 접하므로 점 C_1에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_1이다. 마찬가지의 이유로 점 C_2에서 x축

에 내린 수선의 발은 P_2, 점 C_3에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_3이다.



직각삼각형의 RHS합동에 의하여

$\triangle \mathrm{C_1P_1C_2} \equiv \triangle \mathrm{C_1P_2C_2}$, $\triangle \mathrm{C_2P_3C_3} \equiv \triangle \mathrm{C_2P_2C_3}$

(여기서 두 사각형 $\mathrm{C_1P_1C_2P_2}$와 $\mathrm{C_2P_3C_3P_2}$는 서로 닮음임을 알 수 있다.)

삼각형의 AA닮음에 의하여

$\triangle \mathrm{C_1P_2C_2} \sim \triangle \mathrm{C_2P_2C_3}$

이므로

$\overline{\mathrm{C_1P_2}} : \overline{\mathrm{P_2C_2}} = \overline{\mathrm{C_2P_2}} : \overline{\mathrm{P_2C_3}}$ 즉, $r_1 : r_2 = r_2 : r_3$

정리하면 $r_2^2 = r_1 r_3$

등비중항의 정의에 의하여

r_2는 r_1과 r_3의 등비중항이므로

세 수 r_1, r_2, r_3은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

세 수 r_n, r_{n+1}, r_{n+2}는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

다시 말하면 $\{r_n\}$은 등비수열이다.

원 C_1의 방정식에서

$r_1 = 1$ …㉠

직선 l의 방정식을

l: $y = kx$ (단, k는 양의 상수)

점 $(4, 0)$과 직선 l 사이의 거리가 1이므로

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\dfrac{4k}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ 풀면 $k = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$

직선 l의 방정식은

l: $y = \dfrac{\sqrt{15}}{15}x$

점 P_2의 좌표는 $(3, 0)$이므로 직선 l의 방정식에 $x=3$을 대입하면

$y = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 즉, $r_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ …㉡

㉠, ㉡에 의하여 수열 $\{r_n\}$의 귀납적 정의는

$r_1 = 1$, $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{15}}{5} r_n$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 r_n은

$r_n = \left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)^{n-1}$ $(n \geq 1)$

일반항 S_n은

$S_n = \pi\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$ $(n \geq 1)$

등비급수의 합의 공식에 의하여

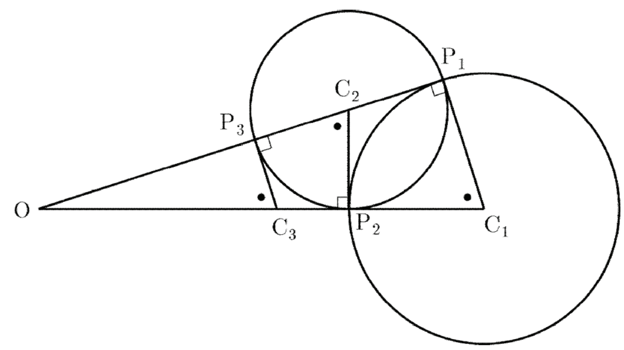
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}\pi$$

답 ③

[풀이3]

자연수 n에 대하여 원 C_n의 중심을 C_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.

직선 l이 점 P_1에서 원 C_1에 접하므로 점 C_1에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_1이다. 마찬가지의 이유로 점 C_2에서 x축에 내린 수선의 발은 P_2이다.



서로 닮음인 두 직각삼각형 $\mathrm{OC_1P_1}$과 $\mathrm{OC_2P_2}$에 대하여

$\overline{\mathrm{OC_1}} : \overline{\mathrm{C_1P_1}} = \overline{\mathrm{OC_2}} : \overline{\mathrm{C_2P_2}}$

대입하면

$4 : 1 = \sqrt{15} - r_2 : r_2$

풀면

$r_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

마찬가지의 방법으로

서로 닮음인 두 직각삼각형 $\mathrm{OC_2P_2}$과 $\mathrm{OC_3P_3}$에서

$r_3 = \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{r_3}{r_2} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$이므로 등비수열의 정의에서

세 수 r_1, r_2, r_3은 이 순서대로 공비가 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$인 등비수열을

이룬다.

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

세 수 r_n, r_{n+1}, r_{n+2}는 이 순서대로 공비가 $\frac{\sqrt{15}}{5}$인 등비수열을 이룬다.

수열 $\{r_n\}$의 귀납적 정의는

$$r_1 = 1,\ r_{n+1} = \frac{\sqrt{15}}{5}r_n$$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 r_n은

$$r_n = \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^{n-1}\ (n \ge 1)$$

일반항 S_n은

$$S_n = \pi\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\ (n \ge 1)$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}\pi$$

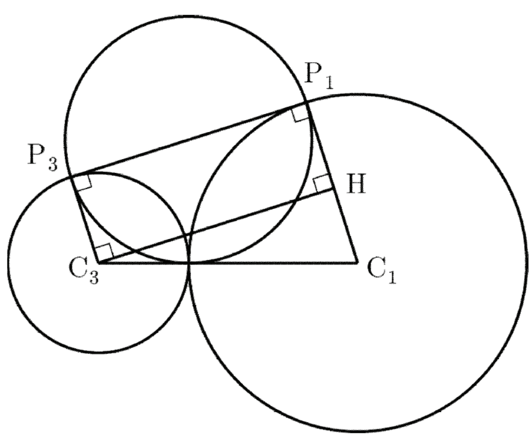
답 ③

[참고]

수열 $\{r_n\}$이 등비수열임을 다음과 같이 보여도 좋다.

자연수 n에 대하여 원 C_n의 중심을 C_n, 반지름의 길이를 r_n, 점 C_3에서 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

직선 l이 점 P_1에서 원 C_1에 접하므로 점 C_1에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_1이다. 마찬가지의 이유로 점 C_3에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_3이다.



직각삼각형 $\mathrm{C}_1\mathrm{HC}_3$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{C}_3\mathrm{C}_1}^2 = \overline{\mathrm{C}_1\mathrm{H}}^2 + \overline{\mathrm{HC}_3}^2$$

$$(r_1 + r_3)^2 = (r_1 - r_3)^2 + (2r_2)^2$$

정리하면

$$r_2^2 = r_1 r_3$$

등비중항의 정의에 의하여

r_2는 r_1과 r_3의 등비중항이므로

세 수 r_1, r_2, r_3은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

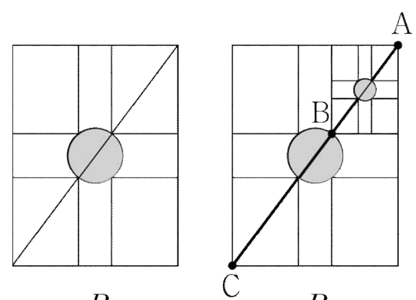
마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

세 수 r_n, r_{n+1}, r_{n+2}는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

다시 말하면 $\{r_n\}$은 등비수열이다.

G140 | 답 ⑤

[풀이1]



R_1 R_2

그림 R_1의 원의 지름의 길이는 2이므로, 넓이는 π이다.

그림 R_1의 원과 그림 R_2에서 새롭게 그려진 원의 닮음비는

$\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{AB}} = 10 : \frac{10-2}{2} = 5 : 2$이고, 각 단계마다 새롭게 그려지는 원의 개수는 4배가 되므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 4} = \frac{25}{9}\pi$$

답 ⑤

[풀이2]

자연수 n에 대하여 두 수열 $\{r_n\}$, $\{t_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$r_n =$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 원의 반지름의 길이)

$t_n =$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 원의 개수)

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$r_1 = \frac{1}{2}\times\left(6\times\frac{1}{3}\right) = 1$$

피타고라스의 정리에 의하여 그림 R_1의 직사각형의 대각선의 길이는

$$\sqrt{6^2+8^2} = 10$$

그림 R_2에서 새롭게 그려진 직사각형의 대각선의 길이는

$$\frac{10-2r_1}{2} = 4$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 도함수는

$y'=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프가 $x=q(\neq 0)$에서 극솟값을 가지므로

$\dfrac{f'(q)q-f(q)}{q^2}=0$

정리하면

$f'(q)=\dfrac{f(q)}{q}$ $\cdots$ ㉠

곡선 $y=f'(x)$는 곡선 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 위의 점 $\left(q,\ \dfrac{f(q)}{q}\right)$를 지난다.

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 이계도함수는

$y''=\dfrac{f''(x)}{x}-\dfrac{2}{x^2}\left(f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}\right)$

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프가 $x=q(\neq 0)$에서 아래로 볼록이므로

$y''=\dfrac{f''(q)}{q}-\dfrac{2}{q^2}\left(f'(q)-\dfrac{f(q)}{q}\right)>0$

㉠에 의하여

$\dfrac{f''(q)}{q}>0$

q는 양수이므로

$f''(q)>0$

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 $x=q$에서 증가한다.

이상에서 함수 $f'(x)$의 그래프는 ④와 같다.

답 ④

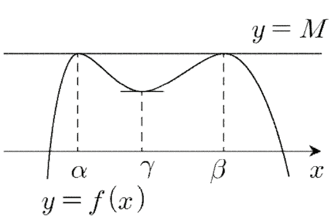
H206 | 답 216

[풀이1] 시험장

평행이동의 관점에서 $a=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. 다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.

(가) ⇒ $x>0$일 때, $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

(나) ⇒ 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



롤의 정리에 의하여

$f'(\gamma)=0\ \ (\alpha<\gamma<\beta)$

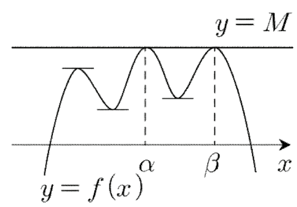
함수 $M-f(x)$의 방정식은

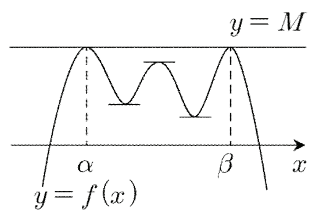
$M-f(x)=M-\dfrac{g(x)}{x}$

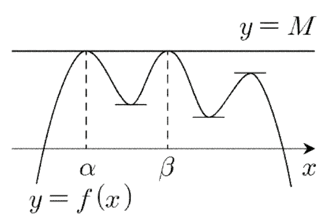
$=\dfrac{\underbrace{Mx-g(x)}_{4\text{차식}}}{x}=\dfrac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}$ $\cdots$ (*)

$(\because f(\alpha)=f(\beta)=M,\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0)$

만약 함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다면 $Mx-g(x)$가 사차함수일 수 없다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 처음에 그렸던 그림과 같다.







(다) ⇒ $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.

(*)에서 함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=Mx-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

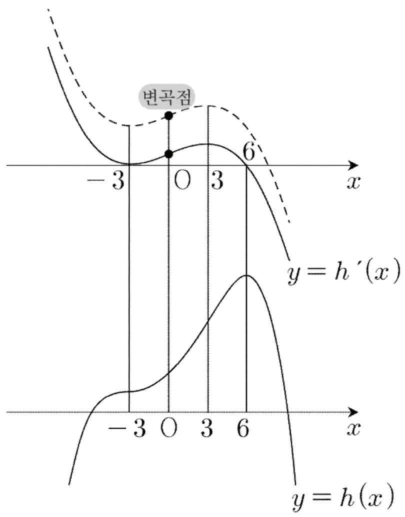
$g'(x)=\underbrace{-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}_{\text{점 }\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ 0\right)\text{에 대칭}}+M$

함수 $g(x)$를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시킨 함수를 $h(x)$라고 하면

$h'(x)=-4x\left(x+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$

$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$

$(\because \beta-\alpha=6\sqrt{3})$



$h'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하여야 하므로
$h(-3)=-216+M\geq 0$, 즉 $M\geq 216$
($\because$ 삼차함수의 비율관계)
따라서 M의 최솟값은 216이다.
답 216

[풀이2] ★
평행이동의 관점에서 $a=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. 다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.
문제에서 주어진 조건에서 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$(양수)이고,
조건 (나)에서 α, β는 모두 양수이므로 $0<\alpha<\beta$이다.
조건 (가)에 의하여

$$f(x)=\frac{g(x)}{x}(\text{단, } x>0) \qquad \cdots(*1)$$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 값 M을 가지므로
$f(\alpha)=f(\beta)=M$ 즉, $M-f(\alpha)=M-f(\beta)=0$
인수정리에 의하여
$M-f(x)$의 분자는 $x-\alpha$와 $x-\beta$를 인수로 가지므로

$$M-f(x)=\frac{Mx-g(x)}{x}=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}$$

(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.)
함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}+M(\text{단, } x>0)$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=-\frac{2x-\alpha-\beta}{x}Q(x)-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x}Q'(x)$$
$$+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x^2}Q(x) \qquad \cdots㉠$$

조건 (나)에 의하여 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가지므로
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$
이를 ㉠에 대입하면

$$f'(\alpha)=-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}Q(\alpha)=0 \text{ 즉, } Q(\alpha)=0$$
$$f'(\beta)=-\frac{\beta-\alpha}{\beta}Q(\beta)=0 \text{ 즉, } Q(\beta)=0$$

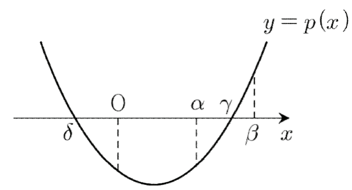
인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=-\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M(\text{단, } x>0) \qquad \cdots(*2)$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta)}{x^2}$$

(단, $x>0$)
$p(x)=3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$로 두자.
$p(0)=-\alpha\beta<0$, $p(\alpha)=2\alpha(\alpha-\beta)<0$,
$p(\beta)=2\beta(\beta-\alpha)>0$이므로 이차함수 $p(x)$의 그래프는 다음과 같다.



사이값 정리에 의하여 $p(\gamma)=p(\delta)=0$인 γ, δ가 존재한다.
(단, $\alpha<\gamma<\beta$, $\delta<0$)
함수 $f'(x)$의 방정식은

$$f'(x)=-\frac{3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}(\text{단, } x>0)$$

$f'(\gamma)=0$, $f''(\gamma)>0$(←[참고2])
이므로 함수 $f(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다.
함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로
사차함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.
(*1), (*2)에 의하여

$$\frac{g(x)}{x}=-\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M(\text{단, } x>0)$$

정리하면 $g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+Mx$
함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

계산을 줄이기 위하여 함수 $g(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 $-\frac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시켜서
함수 $h(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.
함수 $g(x)$가 극대점만을 가지므로 함수 $h(x)$도 극대점만을 가지면 된다. 함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=-4x\left(x+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$$
$$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M(\because \beta-\alpha=6\sqrt{3})$$

함수 $h(x)$의 이계도함수는

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx = 2\alpha_4 g(0)$임을 아래와 같이 보일 수도 있다.

함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0, g(0))$에 대하여 대칭이므로

$\frac{g(x)+g(-x)}{2} = g(0)$ ($\because$ [참고2])

이제 아래와 같은 등식을 생각하자.

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} \frac{g(x)+g(-x)}{2} dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(0)dx$$

정적분의 성질에 의하여

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(-x)dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(0)dx$$

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx - \frac{1}{2}\int_{-\alpha_1}^{-\alpha_4} g(t)dt = (\alpha_4 - \alpha_1)g(0)$$

($\because$ 정적분의 치환적분법)

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\alpha_4}^{-\alpha_1} g(t)dt = 2\alpha_4 g(0)$$

($\because -\alpha_1 = \alpha_4$)

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(t)dt = 2\alpha_4 g(0)$$

($\because -\alpha_1 = \alpha_4$, $-\alpha_4 = \alpha_1$)

$$\therefore \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx = 2\alpha_4 g(0)$$

I041 | 답 115

[풀이]

조건 (가)에서

$x \to 0$일 때, (분모)$\to 0$, (분수식)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\sin(\pi f(0)) = 0$

이때, $f(0)$이 가질 수 있는 값은 정수이다.

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\times f(x)) - \sin(\pi\times f(0))}{x-0}$$

$$= \pi f'(0)\cos(\pi\times f(0)) = 0$$

$f'(0) = 0$ ($\because \cos(\pi\times f(0)) \neq 0$)

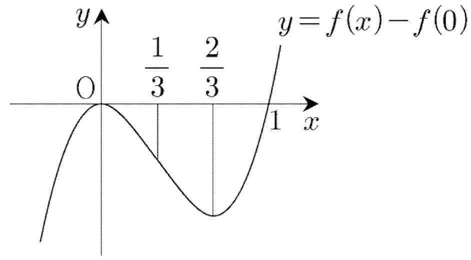
그런데 조건 (나)에 의하여

$f(1) = g(1) = g(0) = f(0)$이므로

($\because$ 함수 $g(x)$의 주기는 1이다.)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) - f(0) = 9x^2(x-1)$



삼차함수의 비율관계에 의하여

함수 $f(x)$는 $x = \frac{2}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

($f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 또는 $x = \frac{2}{3}$)

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은

$f(0) \times \left(f(0) - \frac{4}{3}\right) = 5$ ($\because$ (나))

풀면 $f(0) = 3$ ($\because f(0)$은 정수)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = 9x^2(x-1) + 3 = 9x^3 - 9x^2 + 3$

$(= g(x),\ 0 \le x \le 1)$

한편 정적분의 치환적분법에 의하여

모든 정수 n에 대하여

$$\int_n^{n+1} xg(x)dx = \int_n^{n+1} xg(x-n)dx$$

$$= \int_0^1 (t+n)g(t)dt$$

($x - n = t$로 두면 $dx = dt$이고,

$x = n$일 때 $t = 0$, $x = n+1$일 때 $t = 1$이다.)

이므로

$$\therefore \int_0^5 xg(x)dx$$

$$= \int_0^1 xg(x)dx + \int_1^2 xg(x)dx + \int_2^3 xg(x)dx$$

$$+ \int_3^4 xg(x)dx + \int_4^5 xg(x)dx$$

$$= \int_0^1 xg(x)dx + \int_0^1 (x+1)g(x)dx$$

$$+ \int_0^1 (x+2)g(x)dx + \int_0^1 (x+3)g(x)dx$$

$$+ \int_0^1 (x+4)g(x)dx$$

$$= \int_0^1 (5x+10)g(x)dx$$

$$= \int_0^1 (5x+10)(9x^3 - 9x^2 + 3)dx$$

$$= \int_0^1 (45x^4 + 45x^3 - 90x^2 + 15x + 30)dx$$

$= \left[9x^5 + \frac{45}{4}x^4 - 30x^3 + \frac{15}{2}x^2 + 30x\right]_0^1$

$= \frac{111}{4}$

$\therefore\ p+q=115$

답 115

I042 | 답 12

[풀이] ★

문제에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=t-f(x)$

함수 $F(x)$가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가지므로

$F'(\alpha)=0$, 즉 $f(\alpha)=t$에서 $f(g(t))=t$ $\cdots$ ㉠

정적분의 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하자.

$g(t)=x$로 두면 $g'(t)dt=dx$이고, $\cdots$ ㉡

$t=f(1)$일 때 $x=1$, $t=f(5)$일 때 $x=5$이다.

($\because$ ㉠에서 함수 f의 역함수는 g이므로,

㉡에서 $g(f(1))=1=x$, $g(f(5))=5=x$)

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(g(t))g'(t)=1$, 즉 $f'(x)g'(t)=1$에서

$f'(x)=\frac{1}{g'(t)}$, $f'(x)dx=dt$($\because$ ㉡) $\cdots$ ㉢

$\therefore\ \int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$

$= \int_1^5 \frac{x}{1+e^x}f'(x)dx$($\because g(t)=x$, ㉢)

$= \int_1^5 x dx$($\because f'(x)=e^x+1$)

$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5 = 12$

답 12

I043 | 답 ⑤

[풀이] ★

우선 함수

$y=\frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$ $\cdots$ (*)

의 그래프를 그리자.

모든 실수 x에 대하여

$\frac{((-x)^2-1)^2}{(-x)^4+1}=\frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$

함수 (*)의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$y=0$이면 $x=1$ 또는 $x=-1$이므로

함수 (*)의 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$을 지난다.

$x=0$이면 $y=1$이므로

함수 (*)의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(*)의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|y|=2\ln|x^2-1|-\ln(x^4+1)$

양변을 x에 대하여 미분하여 정리하면

$\frac{y'}{y}=\frac{4x(x^2+1)}{(x^2-1)(x^4+1)}$, $y'=\frac{4x(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x^4+1)^2}$

$y'=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

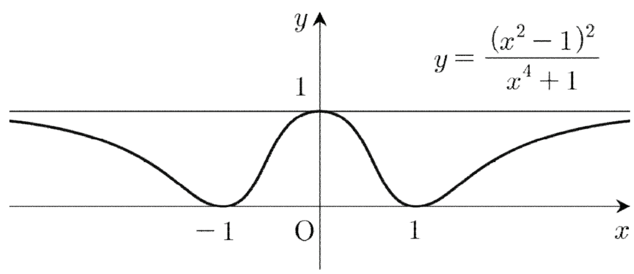
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗	1	↘	0	↗

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

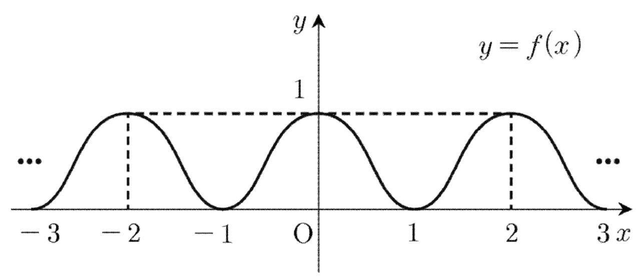
$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to-\infty} y = 1$

직선 $y=1$은 함수 (*)의 그래프의 점근선이다.

함수 (*)의 그래프를 그리면 다음과 같다.



조건 (가), (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는

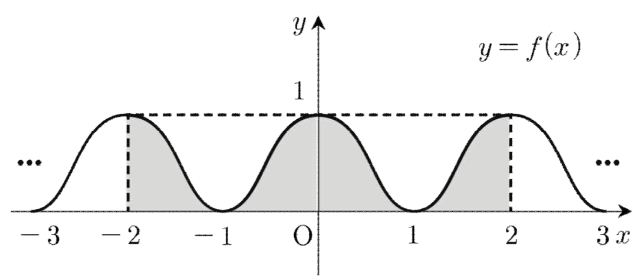


함수 $f(x)$의 그래프의 주기는 2이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 $x=n$(n은 정수)에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이며 미분가능하다.

▸ ㄱ. (참)



정적분의 성질에 의하여

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{2} f(x)dx$$
($\because$ 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)
$$= 2\int_{0}^{1} f(x)dx + 2\int_{1}^{2} f(x)dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} f(x)dx + 2\int_{-2}^{-1} f(x)dx$$
($\because$ 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)
$$= 2\int_{0}^{1} f(x)dx + 2\int_{0}^{1} f(x)dx$$
($\because$ 함수 $f(x)$의 주기는 2이다.)
$$= 4\int_{0}^{1} f(x)dx$$
▸ ㄴ. (참)
조건 (나)에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x+2) = f'(x)$
도함수 $f'(x)$의 주기는 2이다.
$-1 < x < 0$일 때,
$$f'(x) = \frac{4x(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x^4+1)^2} > 0$$
이므로
$1 < x < 2$일 때 $f'(x) > 0$이다.
▸ ㄷ. (참)
$1 < x < 2$일 때 $f'(x) > 0$이고
$2 < x < 3$일 때 $f'(x) < 0$이다.
정적분의 부분적분법에 의하여
$$\int_{1}^{3} x|f'(x)|dx$$
$$= \int_{1}^{2} xf'(x)dx - \int_{2}^{3} xf'(x)dx$$
$$= [xf(x)]_1^2 - \int_{1}^{2} f(x)dx$$
$$- [xf(x)]_2^3 + \int_{2}^{3} f(x)dx$$
$$= 2f(2) - f(1) - \int_{1}^{2} f(x)dx$$
$$- 3f(3) + 2f(2) + \int_{1}^{2} f(x)dx$$
($\because$ 함수 $f(x)$의 그래프는 $x = n$(n은 정수)에 대하여 대칭이다.)
$= 4$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

[참고1] ★
보기 ㄷ은 아래의 방법으로 참임을 증명해도 좋다.
▸ ㄷ. (참)
모든 실수 x에 대하여
$f(x) = f(-x)$
양변을 x에 대하여 미분하면
모든 실수 x에 대하여
$f'(x) = -f'(-x)$ $\cdots$ ㉠
모든 실수 x에 대하여
$f(x+2) = f(x)$
양변을 x에 대하여 미분하면
모든 실수 x에 대하여
$f'(x+2) = f'(x)$ $\cdots$ ㉡
정적분의 치환적분법에 의하여
$$\int_{1}^{3} x|f'(x)|dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (x+2)|f'(x+2)|dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (x+2)|f'(x)|dx \ (\because ㉡)$$
$$= \int_{-1}^{1} x|f'(x)|dx + 2\int_{-1}^{1} |f'(x)|dx$$
$$= 0 + 2\int_{-1}^{1} |f'(x)|dx$$
($\because$ ㉠에서 함수 $f'(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로
함수 $x|f'(x)|$는 원점에 대하여 대칭이다.)
$$= 4\int_{0}^{1} |f'(x)|dx$$
($\because$ ㉠에서 함수 $f'(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로
함수 $|f'(x)|$는 y축에 대하여 대칭이다.)
$$= -4\int_{0}^{1} f'(x)dx$$
$$= -4[f(x)]_0^1 = -4f(1) + 4f(0) = 4$$

[참고2]
보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 증명할 수 있다. (기하학적인 방법)
▸ ㄷ. (참)
$$\int_{1}^{3} x|f'(x)|dx$$
$$= \underbrace{\int_{1}^{2} xf'(x)dx}_{㉠} - \underbrace{\int_{2}^{3} xf'(x)dx}_{㉡}$$
• (1) ㉠의 값을 넓이로 하는 도형을 찾자.
구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 역함수를 $g_1(x)$라고 하면
역함수의 성질에 의하여

$f(g_1(t)) = t$이고,

$f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $g_1(0) = 1$, $g_1(1) = 2$

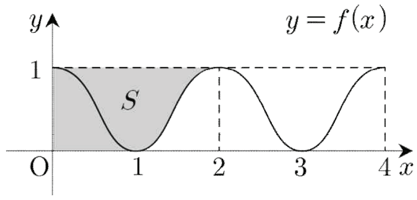
합성함수의 미분법에 의하여

$f'(g_1(t))g_1'(t) = 1$

이때, $g_1(t) = x$로 두면 $g_1'(t)dt = dx$에서

$xf'(x)dx = g_1(t)dt$이므로

$$\int_1^2 xf'(x)dx = \int_0^1 g_1(t)dt (= S)$$



• (2) ㉡의 값을 넓이로 하는 도형의 찾자.

구간 $[2, 3]$에서 함수 $f(x)$의 역함수를 $g_2(x)$라고 하면

역함수의 성질에 의하여

$f(g_2(t)) = t$이고,

$f(2) = 1$, $f(3) = 0$, $g_2(1) = 2$, $g_2(0) = 3$

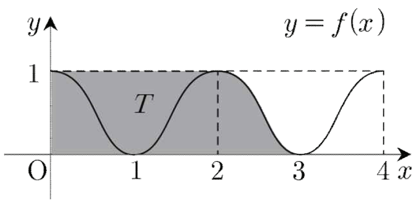
합성함수의 미분법에 의하여

$f'(g_2(t))g_2'(t) = 1$

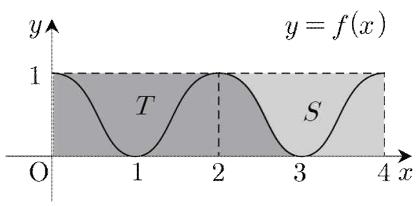
이때, $g_2(t) = x$로 두면 $g_2'(t)dt = dx$에서

$xf'(x)dx = g_2(t)dt$이므로

$$-\int_2^3 xf'(x)dx = \int_0^1 g_2(t)dt (= T)$$



(1), (2)에서 $S + T = 1 \times 4 = 4$이다. (아래 그림)



I044 | 답 12

[풀이]

우선 a, b의 값을 결정하자.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \times \frac{\sqrt{2}}{4} + b \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{a+2b}{4}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \times \frac{3\sqrt{3}}{8} + b \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3a+4b}{8}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

이므로

$a + 2b = 12$, $3a + 4b = 40$

연립방정식을 풀면

$a = 16$, $b = -2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = 16\sin^3 x - 2\sin x$

모든 실수 x에 대하여

$f(x + 2\pi) = f(x)$

이므로 함수 $f(x)$의 주기는 2π이다.

모든 실수 x에 대하여

$f(-x) = -f(x)$

이므로 곡선 $y = f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x에 대하여

$f(x) = f\left(2\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) - x\right)$ (단, n은 정수)

이므로 곡선 $y = f(x)$는 직선 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x에 대하여

$f(2n\pi - x) + f(x) = 0$ (단, n은 정수)

이므로 곡선 $y = f(x)$는 점 $(n\pi, 0)$에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 48\sin^2 x\cos x - 2\cos x$

$= 48\cos x\left(\sin^2 x - \frac{1}{24}\right)$

$= 48\cos x\left(\sin x + \frac{\sqrt{6}}{12}\right)\left(\sin x - \frac{\sqrt{6}}{12}\right)$

방정식 $f'(x) = 0$을 풀면

$\cos x = 0$ 또는 $\sin x = \pm\frac{\sqrt{6}}{12}$

구간 $[0, 2\pi)$에서

$\cos x = 0$: $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$

$\sin x = \pm\frac{\sqrt{6}}{12}$: $x = \alpha_1$ 또는 $x = \alpha_2$

또는 $x = \alpha_3$ 또는 $x = \alpha_4$

(단, $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$이고,

$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_4 = \frac{\sqrt{138}}{12}$,

$\cos\alpha_2 = \cos\alpha_3 = -\frac{\sqrt{138}}{12}$이다.)

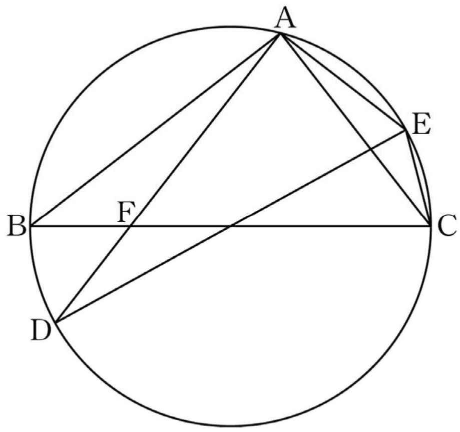
B148

(2023(10)고3-확률과통계21/미적분21/기하21)

그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$\overline{BC}=\overline{DE}=4$, $\overline{BF}=\overline{CE}$, $\sin(\angle CAE)=\frac{1}{4}$

이다. $\overline{AF}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

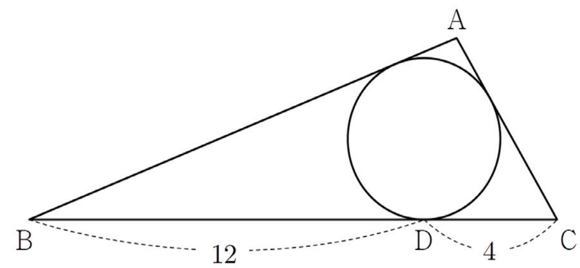


B. 코사인법칙: 원(외접삼각형)

B149

(2021(6)고2-공통18)

반지름의 길이가 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$인 원이 삼각형 ABC에 내접하고 있다. 원이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하고 $\overline{BD}=12$, $\overline{DC}=4$일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는? [4점]



① $\frac{71}{2}$ ② 36 ③ $\frac{73}{2}$

④ 37 ⑤ $\frac{75}{2}$

E108

●●● (2017(11)고2-가형30)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $t(t>1)$까지 변할 때 평균변화율을 $g(t)$라 정의할 때, 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 극댓값 0을 갖는다. 함수 $g(t)$의 최솟값이 존재할 때, 방정식 $f(x)=f(1)$의 서로 다른 실근의 합의 최솟값을 구하시오. [4점]

E109

★★★ (2021사관(1차)-나형30)

양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다. (나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

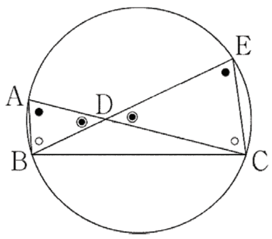
$f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

B147 | 답 191

[풀이]

원주각의 성질과 맞꼭지각의 성질에 의하여 아래 그림과 같이 각의 크기(●, ○, ◉)가 결정된다.

$\overline{CD}=a$, $\overline{CE}=b$로 두자.



삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2=5^2+b^2-2\times5\times b\times\frac{\sqrt{3}}{6}$$

위의 등식에 $a=5\sqrt{3}-b$를 대입하면

$$(5\sqrt{3}-b)^2=5^2+b^2-2\times5\times b\times\frac{\sqrt{3}}{6}$$

풀면

$b=2\sqrt{3}$, $a=3\sqrt{3}$

서로 닮음인 두 삼각형 ABD, ECD의 닮음비는

$\overline{AB}:\overline{EC}=1:\sqrt{3}$이므로 $\overline{AD}=\frac{5}{\sqrt{3}}$,

$\overline{AC}=\frac{14}{3}\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=2^2+\left(\frac{14}{\sqrt{3}}\right)^2-2\times2\times\frac{14}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$=60$, $\overline{BC}=2\sqrt{15}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{15}}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}=2R,\ R=\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$$

구하는 원의 넓이는

$$\pi R^2=\frac{180}{11}$$

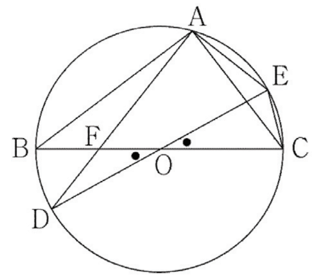
$\therefore\ p+q=191$

답 191

B148 | 답 6

[풀이]

원의 중심을 O라고 하자.



삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CE}}{\frac{1}{4}}=4,\ \overline{CE}=1(=\overline{BF}),\ \overline{FC}=3$$

삼각형 OCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle EOC)=\frac{2^2+2^2-1^2}{2\times2\times2}=\frac{7}{8}$$

이제 $\overline{FD}=x$로 두자.

삼각형 FDO에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle DOF)=\frac{1^2+2^2-x^2}{2\times1\times2}=\frac{7}{8}$$

($\because$ $\angle EOC=\angle DOF$(맞꼭지각의 성질))

$$x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$\overline{AF}\times\overline{FD}=\overline{BF}\times\overline{FC}$, 즉

$\overline{AF}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=1\times3$, $\overline{AF}=\sqrt{6}$

$\therefore\ k^2=6$

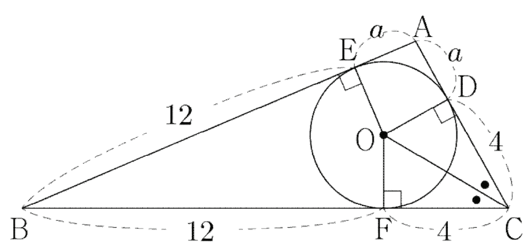
답 6

B149 | 답 ②

[풀이]

내접원의 중심을 O, 점 O에서 삼각형의 세 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자. (아래 그림)

그리고 $\overline{AD}=a$로 두자.



(단, ●$=30^\circ$)

직각삼각형 OCF에서 삼각비의 정의에 의하여

$\tan(\angle OCF)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 즉 $\angle OCF=30^\circ$ $(=●)$

내접원의 정의에 의하여

$\angle OCD=30^\circ$ $(=●)$이므로 $\angle ACB=60^\circ$

E108 | 답 8

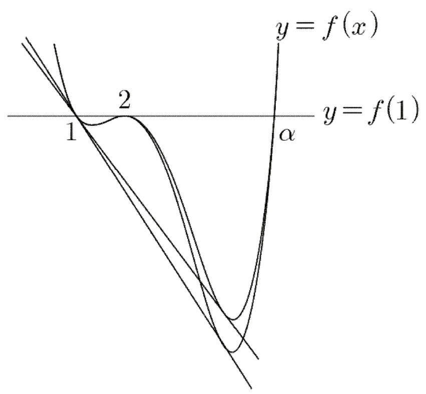
[풀이1] 시험장

▸ 함수 $g(t)$가 $t=2$에서 극댓값 0을 가지므로 $f(1)=f(2)$이고, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가져야 한다.

▸ 함수 $g(t)$가 최솟값을 가지므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$과 '점 $(1,\ f(1))$이 아닌 점' 에서 만나야 한다. (접하거나, 서로 다른 두 개의 점에서 만난다.)

위의 두 조건을 모두 만족시키도록

함수 $f(x)$의 그래프를 그리면



(단, $\alpha>2$, $f(\alpha)=f(1)$)

인수정리에 의하여

$f(x)-f(1)=k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)$

(단, $k>0$)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=k(1-\alpha)(x-1)+f(1)$

이 직선과 곡선 $y=f(x)$의 방정식을 연립하면

$x=1$ 또는 $(x-2)^2(x-\alpha)=1-\alpha$

구간 $(2,\ \infty)$에서 곡선 $y=(x-2)^2(x-\alpha)$와

직선 $y=1-\alpha$가 만나야 하므로

(삼차함수의 극솟값) $\le 1-\alpha$

즉, $4\left(\dfrac{2-\alpha}{3}\right)^3 \le 1-\alpha$

$4\alpha^3-24\alpha^2+21\alpha-5\ge 0$

$(\alpha-5)(2\alpha-1)^2\ge 0$

풀면 $\alpha\ge 5\ (\because \alpha>2)$

방정식 $f(x)=f(1)$을 다시 쓰면

$k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)=0$

풀면 $x=1$ 또는 2 또는 α

α가 최소일 때, $1+2+\alpha$의 값은 최솟값 8을 갖는다.

답 8

[풀이2] (이과생을 위한 풀이)

함수 $g(t)$는

$g(t)=\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}$ $\cdots(*)$

함수 $g(t)$의 도함수는

$g'(t)=\dfrac{f'(t)(t-1)-f(t)}{(t-1)^2}$

함수 $g(t)$는 $t=2$에서 극댓값 0을 가지므로

$g(2)=f(2)-f(1)=0$

$g'(2)=f'(2)-f(2)=0$

즉, $f(2)=f'(2)=f(1)$

인수정리에 의하여

$f(x)-f(1)=k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)$

(단, $k>0$, α는 상수)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)+f(1)$

이를 (*)에 대입하면

$g(t)=k(t-2)^2(t-\alpha)$ (단, $k>0$)

삼차함수 $g(t)$가 $t=2$에서 극댓값을 가져야 하므로 $\alpha>2$이다.

함수 $g(t)$의 도함수는

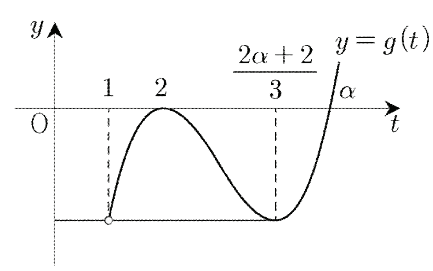
$g'(t)=k(t-2)(3t-2\alpha-2)$

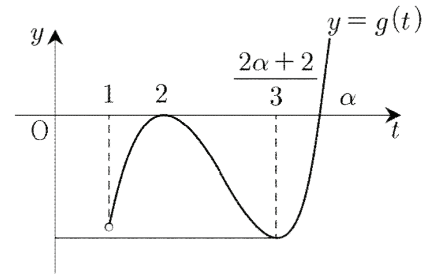
방정식 $g'(t)=0$을 풀면

$t=2$ 또는 $t=\dfrac{2\alpha+2}{3}$

$t=\dfrac{2\alpha+2}{3}$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{2\alpha+2}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $g(t)$의 그래프는





위의 그림처럼 정의역이 열린구간 $(1,\ \infty)$인

함수 $g(t)$가 최솟값을 갖기 위해서는

$g(1)\ge$ (함수 $g(t)$의 극솟값) $=g\left(\dfrac{2\alpha+2}{3}\right)$

H. 그래프 개형: 합성함수

H185

○○○
(2018(7)고3-가형19)

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 $f(x)=x^n-1$, $g(x)=\log_3(x^4+2n)$이다.

함수 $h(x)$가 $h(x)=g(f(x))$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

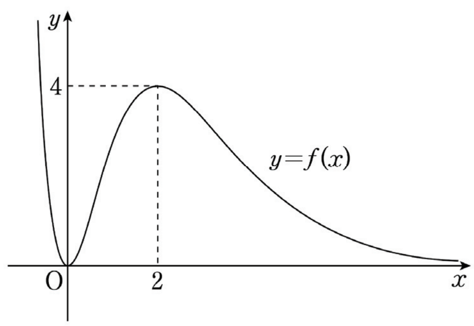
ㄱ. $h'(1)=0$ ㄴ. 열린구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $h(x)$는 증가한다. ㄷ. $x>0$일 때, 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H186

●●●
교육청 기출

그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.



함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의 교점의 개수는? (단, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

H187

●●●
(2021사관(1차)-가형30)

두 함수 $f(x)=x^2-ax+b(a>0)$, $g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(0)<h(4)$ (나) 방정식 $\lvert h(x)\rvert=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그 중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\dfrac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오.

(단, $\dfrac{5}{2}<e<3$이고, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$이다.) [4점]

H187 | 답 6

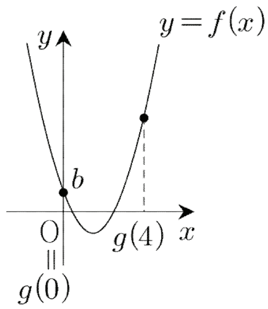
[풀이] ★

이차함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=\frac{a}{2}(>0)$이므로 아래 그림과 같이 그려진다. (이 이차함수의 꼭짓점의 y좌표는 음수인데, 이는 문제풀이 과정에서 밝혀진다.)

이때, 조건 (가)에서

$h(0)=f(0)<f(g(4))=h(4)$

이므로 $f(g(4))>b=f(0)$

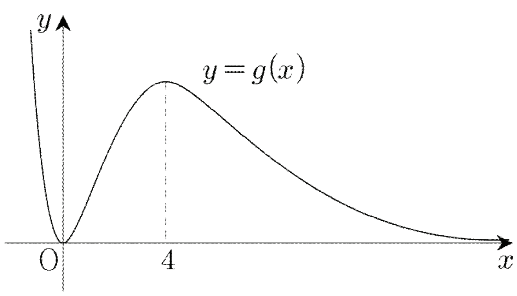


함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-\frac{1}{2}x(x-4)e^{-\frac{x}{2}}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고, $x=4$에서 극댓값을 가지므로 함수 $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



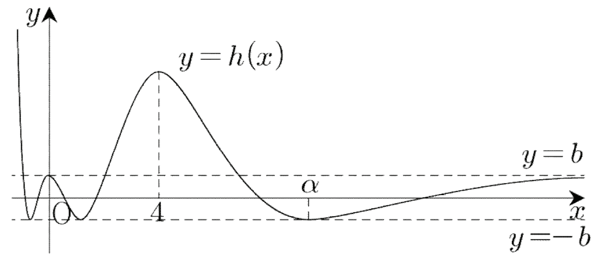
x의 값의 변화에 따른 함수 $h(x)$의 값의 변화를 관찰하면 다음과 같다.

x: $-\infty$ ⇨ 0 ⇨ 4 ⇨ ∞

$g(x)$: ∞ ⇨ 0 ⇨ $g(4)$ ⇨ (0)

$h(x)=f(g(x))$: ∞ ⇨ $f\left(\frac{a}{2}\right)$(극솟값) ⇨ b(극댓값) ⇨ $f\left(\frac{a}{2}\right)$(극솟값) ⇨ $f(g(4))$(극댓값) ⇨ $f\left(\frac{a}{2}\right)$(극솟값) ⇨ (b) (점근선)

함수 $h(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



조건 (나)에서 주어진 방정식의 실근의 개수가 7이기 위해서는 $k=b$이어야 한다. (위의 그림)

극솟값: $f\left(\frac{a}{2}\right)=-b$, $\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+b=-b$

정리하면 $a^2=8b$

그리고 $f(1)=1-a+b=-\frac{7}{32}$이므로

위의 두 등식을 연립하면

$a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{32}$

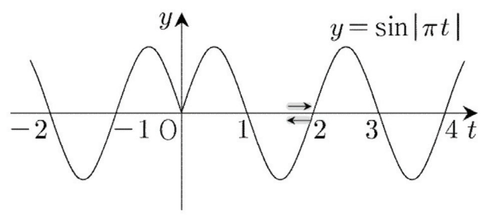
$\therefore\ a+16b=6$

답 6

H188 | 답 208

[풀이]

함수 $y=\sin|\pi t|$(단, $t=f(x)$)의 그래프는



위의 그림처럼

$t(=f(x))$가 $2-$, 2, $2-$의 값을 가질 때,

$g(x)$는 극댓값 0을 갖는다. (이때, $0-$ ⇨ 0 ⇨ $0-$)

이때, 함수 $f(x)$의 극댓값은 2이다.

한편

$g(x)=0 \Leftrightarrow \sin|\pi f(x)|=0$

$\Leftrightarrow f(x)=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$

그리고 조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 극값은 정수이다.

(가): 함수 $f(x)$는 $x=a_4$에서 극댓값을 갖고, $x=a_8$에서 극솟값을 갖는다.

이때, $f(a_4)-f(a_8)=4$이다.

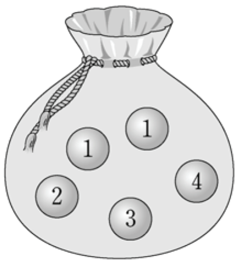
$(f(a_4),\ f(a_8))=\cdots,\ \underbrace{(-1,\ -5)}_{㉠},\ \underbrace{(2,\ -2)}_{㉡},\ \underbrace{(4,\ 0)}_{㉢},\ (6,\ 2),\ \cdots$

㉠: 함수 $g(x)$는 $x=a_8$에서 극소이다. (×)

K125

★★★ (2016(9)−B형15)

주머니에 1, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c, d라 할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률은? [4점]



① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

K126

●●● (2020(9)−가형18/나형20)

빨간색 공 6개, 파란색 공 3개, 노란색 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 하여, 다음 규칙에 따라 세 사람 A, B, C가 점수를 얻는다. (단, 한 번 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

- 빨간색 공이 나오면 A는 3점, B는 1점, C는 1점을 얻는다.
- 파란색 공이 나오면 A는 2점, B는 6점, C는 2점을 얻는다.
- 노란색 공이 나오면 A는 2점, B는 2점, C는 6점을 얻는다.

이 시행을 계속하여 얻은 점수의 합이 처음으로 24점 이상인 사람이 나오면 시행을 멈춘다. 다음은 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐일 확률을 구하는 과정이다.

꺼낸 빨간색 공의 개수를 x, 파란색 공의 개수를 y, 노란색 공의 개수를 z라 할 때, 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐이기 위해서는 x, y, z가 다음 조건을 만족시켜야 한다.

$x=6$, $0<y<3$, $0<z<3$, $y+z \ge 3$

이 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는

$(6, 1, 2)$, $(6, 2, 1)$, $(6, 2, 2)$

이다.

(i) $(x, y, z)=(6, 1, 2)$인 경우의 확률은

$\boxed{(가)}$이다.

(ii) $(x, y, z)=(6, 2, 1)$인 경우의 확률은

$\boxed{(가)}$이다.

(iii) $(x, y, z)=(6, 2, 2)$인 경우는 10번째 시행에서 빨간색 공이 나와야 하므로 그 확률은 $\boxed{(나)}$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은

$2\times\boxed{(가)}+\boxed{(나)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? [4점]

① $\frac{13}{110}$ ② $\frac{27}{220}$ ③ $\frac{7}{55}$

④ $\frac{29}{220}$ ⑤ $\frac{3}{22}$

예제 3

(1) 서로 다른 6권의 책을 세 사람에게 나누어주는 방법의 수 (단, 책을 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)
(2) 서로 다른 6권의 책을 세 사람에게 나누어주는 방법의 수 (단, 책을 받지 못하는 사람은 없다.)

풀이

서로 다른 6권의 책을 각각
◓, ◒, ◐, ◑, ⦿, ◍
세 사람을 각각
A, B, C
라고 하자.

(1) 중복순열의 수에 의하여 $_3\Pi_6=3^6=729$이다.

(2)
이전 문제의 풀이에서
책을 2권, 2권, 2권으로 나누어 세 사람에게 나누어주는 방법의 수:

$$_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}\times3!=90$$

책을 3권, 2권, 1권으로 나누어 세 사람에게 나누어주는 방법의 수:

$$_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times3!=360$$

책을 4권, 1권, 1권으로 나누어 세 사람에게 나누어주는 방법의 수:

$$_6C_4\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}\times3!=90$$

따라서 구하는 방법의 수는 $90+360+90=540$이다.
이제 여집합의 관점에서 방법의 수를 구해보자.
세 사람에게 6권의 책을 나누어줄 때, 다음의 세 경우만이 가능하다.
(경우1) 책을 받지 못하는 사람의 수가 2인 경우
(경우2) 책을 받지 못하는 사람의 수가 1인 경우
(경우3) 책을 받지 못하는 사람이 없는 경우 (←구해야 하는 방법의 수)
(경우1)+(경우2)+(경우3)$={}_3\Pi_6=3^6=729$이므로
여집합의 관점에서 (경우3)$=729-$(경우1)$-$(경우2)이다.
(경우1)

A	B	C
◓◒◐ ◑⦿◍		
	◓◒◐ ◑⦿◍	
		◓◒◐ ◑⦿◍

방법의 수는 3이다.
(경우2)
예를 들어 아래의 표와 같이 나누어 줄 수 있다.

A	B	C
◓◒◐◑⦿	◍	
◓◒◐◑	⦿◍	
◓◒◐	◑⦿◍	
◓◒	◐◑⦿◍	
◓	◒◐◑⦿◍	
⋮	⋮	⋮

방법의 수는 $3\times(2^6-2)$이다.
이때, 3은 책을 받지 못하는 사람을 선택하는 방법의 수, 2^6-2는 나머지 두 사람에게 책을 나누어주는 방법의 수이다. 2^6은 아래 표와 같이 책을 받아야 하는 사람이 책을 받지 못하게 되는 두 경우를 포함하고 있다. 따라서 방법의 수는 3×2^6이 아닌 $3\times(2^6-2)$이다.

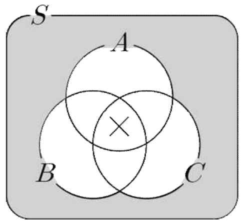
A	B	C
◓◒◐ ◑⦿◍	B가 받지 못한다.	
A가 받지 못한다.	◓◒◐ ◑⦿◍	

따라서 구하는 방법의 수는 $729-3-3\times(2^6-2)=540$이다.

답 (1) 729 (2) 540

포함배제의 원리를 이용하여 방법의 수를 구해보자.

A가 책을 받지 못하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 A,
B가 책을 받지 못하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 B,
C가 책을 받지 못하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 C
라고 하자. (그리고 전체 집합을 S라고 하자.)
구하는 방법의 수는 집합
$S-(A\cup B\cup C)$
의 원소의 개수와 같다.



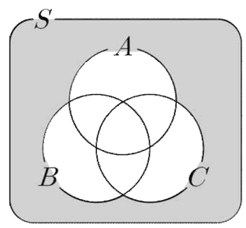
$n(S)={}_3\Pi_6=3^6=729$
포함 배제의 원리에 의하여
$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$
$+n(A\cap B\cap C)$
$={}_2\Pi_6+{}_2\Pi_6+{}_2\Pi_6-1-1-1+0$
$=2^6+2^6+2^6-1-1-1-0$
$=189$
이므로 구하는 방법의 수는
$n(S-(A\cup B\cup C))$
$=n(S)-n(A\cup B\cup C)$
$=729-189=540$

포함과 배제의 원리에 대한 문제를 더 풀어보자.

예제 4

6개의 문자 A, A, B, B, C, C를 같은 문자끼리 이웃하지 않도록 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하여라.

풀이
포함과 배제의 원리를 이용하여 문제를 풀어보자.
두 문자 A, A가 서로 이웃하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 A,
두 문자 B, B가 서로 이웃하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 B,
두 문자 C, C가 서로 이웃하는 경우만을 원소로 갖는 집합을 C
라고 하자. (그리고 전체 집합을 S라고 하자.)
구하는 방법의 수는 집합
$S-(A\cup B\cup C)$
의 원소의 개수와 같다.



$n(S)=\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$
포함 배제의 원리에 의하여
$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$
$+n(A\cap B\cap C)$
$=\dfrac{5!}{2!2!}+\dfrac{5!}{2!2!}+\dfrac{5!}{2!2!}-\dfrac{4!}{2!}-\dfrac{4!}{2!}-\dfrac{4!}{2!}+3!$
$=60$
이므로 구하는 방법의 수는
$n(S-(A\cup B\cup C))$
$=n(S)-n(A\cup B\cup C)$
$=90-60=30$

답 30

(경우1)에 대하여 문제의 조건을 모두 만족하도록
철수와 영희가 구슬을 꺼낼 확률을 구하자.

철수가 주머니 A에서 임의의 구슬을 꺼낼 확률은 $1\left(=\frac{5}{5}\right)$이다.

예를 들어 3이 적힌 구슬을 꺼냈다고 하자.

	1	2	3	4	5
철수			A		
영희			×		

영희가 주머니 B에서 3이 적히지 않은 구슬을 꺼낼 확률은 $\frac{4}{5}$이다.

예를 들어 5가 적힌 구슬을 꺼냈다고 하자.

	1	2	3	4	5
철수			A		×
영희			×		B

철수가 주머니 A에서 5가 적히지 않은 구슬을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{4}$이다.

예를 들어 2가 적힌 구슬을 꺼냈다고 하자.

	1	2	3	4	5
철수		A	A		×
영희		○	×		B

영희가 주머니 B에서 2가 적힌 구슬을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

	1	2	3	4	5
철수		A	A		×
영희		B	×		B

(경우1)에 대하여 문제의 조건을 모두 만족하도록
철수와 영희가 구슬을 꺼낼 확률은

확률의 곱셈정리에 의하여 $\frac{1}{4}\times 1\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{80}$이다.

(경우2)~(경우4)에 대해서도 확률은 $\frac{3}{80}$이다.

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\frac{3}{80}+\frac{3}{80}+\frac{3}{80}+\frac{3}{80}=\frac{3}{20}$$

답 ①

K125 |답 ①

[풀이1] ★

주어진 주머니에서 공을 임의로 한 개씩 4번 꺼내고, 꺼낸 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c, d라 할 때,
$a\le b\le c\le d$일 확률을 구하면 된다. (단, 꺼낸 공을 다시 넣지 않는다.)

비둘기집의 원리에 의하여 a, b, c, d 중에서 적어도 하나의 수는 1이다.

• (1) 임의로 꺼낸 4개의 공에 1이 두 개 포함될 경우
확률의 곱셈정리에 의하여
($a=b=1$이고 $2\le c<d\le 4$일 확률)

$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{20}$$

왜냐하면 $a=b=1$일 때, $c<d$일 확률과 $c>d$일 확률은 각각 $\frac{1}{2}$로 같기 때문이다.

• (2) 임의로 꺼낸 4개의 공에 1이 한 개 포함될 경우
확률의 곱셈정리에 의하여
($a=1$이고 $2\le b<c<d\le 4$일 확률)
$=$($a=1$이고 $b=2$이고 $c=3$이고 $d=4$일 확률)

$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{60}$$

(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로
확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{60}=\frac{1}{15}$$

답 ①

[풀이2] ★

• (1) 임의로 꺼낸 4개의 공에 1이 두 개 포함될 경우
주머니에서 임의로 꺼낸 4개의 공에 1이 두 개 포함될 확률은

$$\frac{{}_2C_2\times{}_3C_2}{{}_5C_4}=\frac{3}{5}$$

예를 들어 아래와 같이 꺼냈다고 하자.
$\{1,\ 1,\ 2,\ 3\}$
이 네 수를 일렬로 나열하였을 때, 1, 1, 2, 3의 순서대로 나열할 확률은

$$\frac{1}{\frac{4!}{2!}}=\frac{1}{12}\ (\because \text{같은 것이 있는 순열의 수})$$

확률의 곱셈정리에 의하여 이 경우의 확률은

$$\frac{3}{5}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{20}$$

• (2) 임의로 꺼낸 4개의 공에 1이 한 개 포함될 경우
주머니에서 임의로 꺼낸 4개의 공에 1이 한 개 포함될 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_3}{{}_5C_4}=\frac{2}{5}$$

혹은 여사건의 확률에 의하여
$1-$(임의로 꺼낸 4개의 공에 1이 두 개 포함될 확률)

$$=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

와 같이 확률을 구해도 좋다.

예를 들어 아래와 같이 꺼냈다고 하자.

$\{1, 2, 3, 4\}$

이 네 수를 일렬로 나열하였을 때, 1, 2, 3, 4의 순서대로 나열할 확률은

$$\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$$

확률의 곱셈정리에 의하여 이 경우의 확률은

$$\frac{2}{5}\times\frac{1}{24}=\frac{1}{60}$$

(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로

확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{60}=\frac{1}{15}$$

답 ①

[풀이3]

1이 적힌 두 개의 공을 구별하기 위하여

1, 1을 각각 1_α, 1_β로 두자.

• (1) $a=b=1$인 경우

순서쌍 (a, b, c, d)는 다음과 같다.

$(1_\alpha, 1_\beta, 2, 3)$, $(1_\alpha, 1_\beta, 2, 4)$, $(1_\alpha, 1_\beta, 3, 4)$,

$(1_\beta, 1_\alpha, 2, 3)$, $(1_\beta, 1_\alpha, 2, 4)$, $(1_\beta, 1_\alpha, 3, 4)$

• (2) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$인 경우

순서쌍 (a, b, c, d)는 다음과 같다.

$(1_\alpha, 2, 3, 4)$, $(1_\beta, 2, 3, 4)$

순서쌍 (a, b, c, d)의 전체 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{P}_4$이다.

따라서 구하는 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여

$$\frac{6+2}{{}_5\mathrm{P}_4}=\frac{8}{5\times4\times3\times2}=\frac{1}{15}$$

답 ①

[풀이4]

주머니에서 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 1이 적힌 공은 적어도 하나 이상 나올 수밖에 없다. 그러므로 $a=1$이다.

$1\le b\le c\le d$ $\cdots(*)$

(단, b, c, d에는 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 세 수가 한 번씩만 온다.)

$(*)$에서 a가 1일 확률은 $\frac{2}{5}$, b, c, d에 올 숫자를 결정할 확률은 $\frac{4}{{}_4\mathrm{P}_3}$이므로

($\because$ 분자에 오는 4는

$(b, c, d)=(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$,

$(1, 3, 4)$, $(2, 3, 4)$

의 네 가지의 경우를 의미한다.)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{2}{5}\times\frac{4}{{}_4\mathrm{P}_3}=\frac{1}{15}$$

답 ①

K126 | 답 ②

[풀이]

〈과정〉

꺼낸 빨간색 공의 개수를 x, 파란색 공의 개수를 y, 노란색 공의 개수를 z라 할 때, 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐이기 위해서는 x, y, z가 다음 조건을 만족시켜야 한다.

$x=6$, $0<y<3$, $0<z<3$, $y+z\ge3$ $\cdots(*)$

이 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는

$(6, 1, 2)$, $(6, 2, 1)$, $(6, 2, 2)$

이다.

($\because$ y, z가 가질 수 있는 값은 1 또는 2인데

$1+1=2<3$이므로

$(y, z)=(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$이다.)

(ⅰ) $(x, y, z)=(6, 1, 2)$인 경우의 확률은 $\boxed{\frac{9}{220}}$이다.

이유는 다음과 같다.

A가 얻는 점수: $6\times3+1\times2+2\times2=24$

B가 얻는 점수: $6\times1+1\times6+2\times2=16(<24)$

C가 얻는 점수: $6\times1+1\times2+2\times6=20(<24)$

시행을 9번 하였을 때(즉, 공을 9개 꺼냈을 때), 빨간색 공이 6개, 파란색 공이 1개, 노란색 공이 2개가 나올 확률은

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_6\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_9}=\frac{9}{220}$$

이때, 각각의 경우의 수는 다음과 같다.

${}_6\mathrm{C}_6$: 6개의 빨간색 공 중 6개를 꺼낼 경우의 수

${}_3\mathrm{C}_1$: 3개의 파란색 공 중 1개를 꺼낼 경우의 수

${}_3\mathrm{C}_2$: 3개의 노란색 공 중 2개를 꺼낼 경우의 수

${}_{12}\mathrm{C}_9$: $12(=6+3+3)$개의 빨간색+파란색+노란색 공 중 9개를 꺼낼 경우의 수

(ⅱ) $(x, y, z)=(6, 2, 1)$인 경우의 확률은 $\boxed{\frac{9}{220}}$이다.

이유는 다음과 같다.

A가 얻는 점수: $6\times3+2\times2+1\times2=24$

B가 얻는 점수: $6\times1+2\times6+1\times2=20(<24)$

C가 얻는 점수: $6\times1+2\times2+1\times6=16(<24)$

시행을 9번 하였을 때(즉, 공을 9개 꺼냈을 때), 빨간색 공이 6개, 파란색 공이 2개, 노란색 공이 1개가 나올 확률은

N015

●●● (2024-기하30)

좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 $1:3$으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{DP}| = |\overrightarrow{EQ}| = |\overrightarrow{FR}| = 1$

(나) $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{RA}$

$|\overrightarrow{AX}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오. [4점]

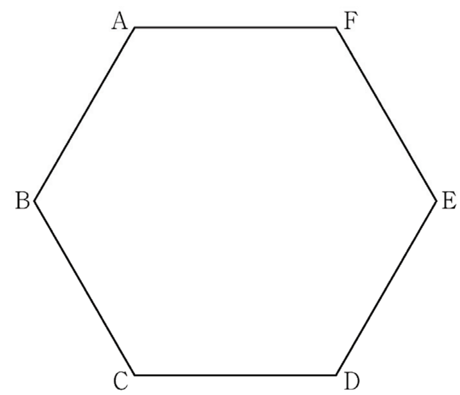
N016

★★★ (2023(6)-기하30)

좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$

(나) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD} = k\overrightarrow{CD}$



$\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하시오. [4점]

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BH} = \vec{a} \cdot (k\vec{a} - \vec{b}) = 0$

정리하면

$k = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}$이므로 $\overrightarrow{OH} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

직각삼각형 BOH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{|\vec{b}|^2 - \left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}\right)^2}$$

구하는 넓이를 S라고 하면

$$\therefore \ S = \dfrac{1}{2}\overline{OA}\,\overline{BH} = \dfrac{1}{2}|\vec{a}|\sqrt{|\vec{b}|^2 - \left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}\right)^2}$$

$$= \dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

위의 공식은 θ가 직각, 둔각인 경우에도 성립한다.

(2)

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

$= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2,$

$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_1b_1 + a_2b_2)^2$

$= a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_2^2$

위의 두 식을 변변히 빼면

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$= a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2$

$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2$

이므로

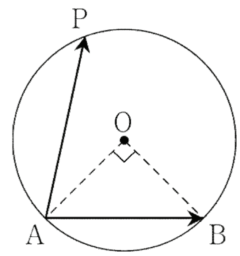
$$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} = \dfrac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

답 풀이참조

N. 벡터의 내적: 최대최소(상수변수)

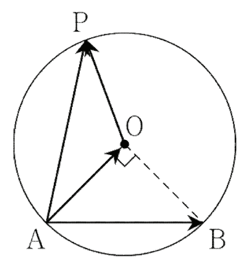
예제 1

반지름의 길이가 1인 원 O 위의 두 정점 A, B에 대하여 $\angle AOB = 90^\circ$이다.



원 O 위의 동점 P에 대하여 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풀이1



벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}$

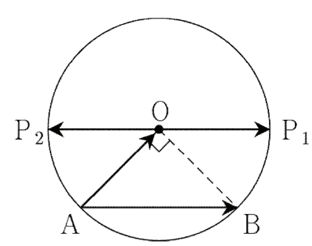
벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP})$

$= \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}}_{\text{일정한 값}} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP}}_{\text{변하는 값}}$

$= 1 + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP}}_{\text{변하는 값}}$ $\cdots(*)$

아래 그림처럼 점 O를 지나고 직선 AB에 평행한 직선이 원 O와 만나는 두 점을 각각 P_1, P_2라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

$-\sqrt{2} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP_2} \leq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} \leq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \sqrt{2}$

이를 (*)에 대입하면

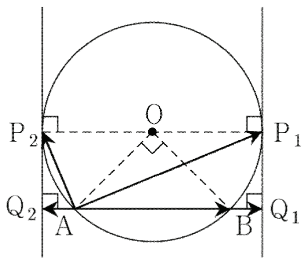
$1 - \sqrt{2} \leq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} \leq 1 + \sqrt{2}$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때 성립한다.)

답 최댓값: $1+\sqrt{2}$, 최솟값 $1-\sqrt{2}$

풀이2

아래 그림처럼 원 O에 접하면서 직선 AB에 수직인 두 직선을 그린다. 이때, 두 접점을 각각 P_1, P_2, 두 접선이 직선 AB와 만나는 두 점을 각각 Q_1, Q_2라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_2}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}$

그런데

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ_1}=\sqrt{2}\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_2}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ_2}=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=1-\sqrt{2}$$

이므로

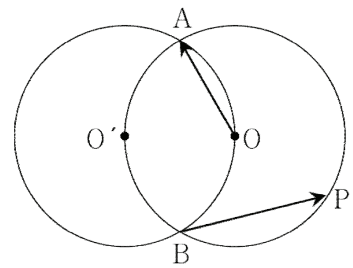
$1-\sqrt{2}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\le1+\sqrt{2}$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때 성립한다.)

답 최댓값: $1+\sqrt{2}$, 최솟값 $1-\sqrt{2}$

예제 2

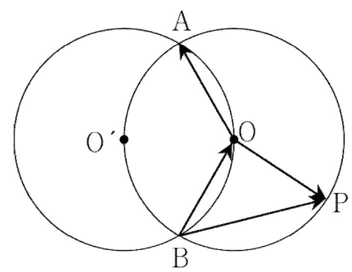
아래 그림처럼 반지름의 길이가 1로 같은 두 원 O, O'이 서로의 중심을 지날 때 생기는 두 교점을 각각 A, B라고 하자.



점 P가 두 원 O, O'의 둘레 위를 움직일 때, 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BP}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풀이1

(1) 점 P가 원 O 위에 있을 경우



벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}$

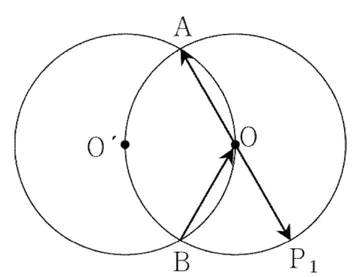
벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP})$

$=\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BO}}_{\text{일정한 값}}+\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}_{\text{변하는 값}}$

$=\frac{1}{2}+\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}_{\text{변하는 값}}$ $\cdots(*1)$

아래 그림처럼 직선 OA가 원 O와 만나는 두 점 중에서 A가 아닌 점을 P_1라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

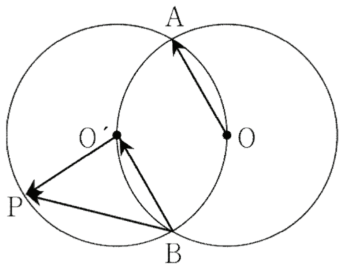
$-1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=1$

이를 (*1)에 대입하면

$-\frac{1}{2} \le \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} \le \frac{3}{2}$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 A 위에 올 때 성립한다.)

(2) 점 P가 원 O' 위에 있을 경우



벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BO'} + \overrightarrow{O'P}$

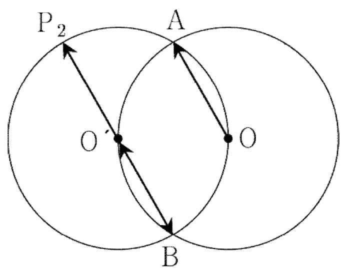
벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{BO'} + \overrightarrow{O'P})$

$= \underbrace{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO'}}_{\text{일정한 값}} + \underbrace{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O'P}}_{\text{변하는 값}}$

$= 1 + \underbrace{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O'P}}_{\text{변하는 값}}$ $\cdots(*2)$

아래 그림처럼 직선 $O'B$가 원 O'과 만나는 두 점 중에서 B가 아닌 점을 P_2라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

$-1 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O'B} \le \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O'P} \le \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{O'P_2} = 1$

이를 (*2)에 대입하면

$0 \le \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} \le 2$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 B 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때 성립한다.)

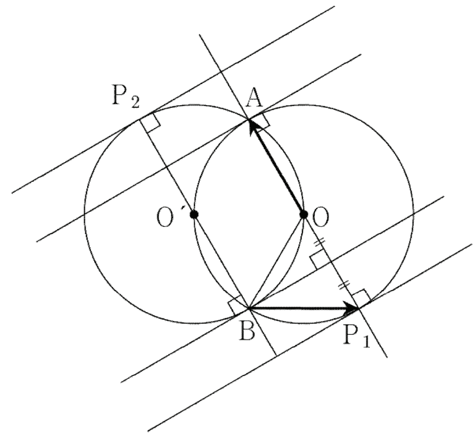
(1), (2)에 의하여

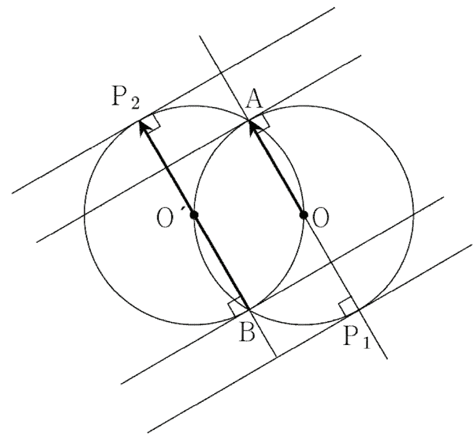
$\therefore\ -\frac{1}{2} \le \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} \le 2$

답 최댓값: 2, 최솟값 $-\frac{1}{2}$

풀이2

아래 그림처럼 원 O에 접하면서 직선 OA에 수직인 두 직선을 그린다. 이때, 점 A는 접점이 되고, 나머지 한 접점을 P_1이라고 하자. 그리고 원 O'에 접하면서 직선 OA에 수직인 두 직선을 그린다. 이때, 점 B는 접점이 되고, 나머지 한 접점을 P_2라고 하자.





벡터의 내적의 정의에 의하여

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP_1} \le \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} \le \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP_2}$

그런데

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP_2} = 1 \times 2 = 2$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP_1} = -1 \times 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

이므로

$-\frac{1}{2} \le \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BP} \le 2$

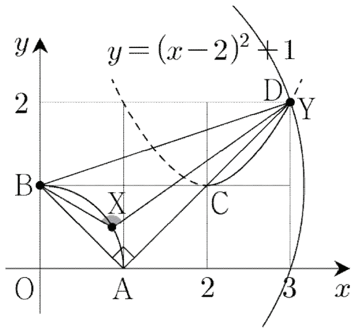
(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때 성립한다.)

답 최댓값: 2, 최솟값 $-\frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{XD}} \le \overline{\mathrm{BD}}$

(단, 등호는 점 X가 점 B 위에 있을 때 성립한다.)

이 성립함을 다음과 같이 증명해도 좋다.



점 X는 '점 A' 또는 '점 B' 또는 '$\angle \mathrm{BAD}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 BAD의 내부의 점' 이므로

$\angle \mathrm{BXD} \ge \angle \mathrm{BAD}\left(=\frac{\pi}{2}\right)$

(단, 등호는 점 X가 점 A 위에 있을 때 성립한다.)

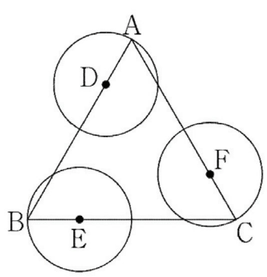
즉, $\angle \mathrm{BXD}$가 직각 또는 둔각이므로

$\overline{\mathrm{XD}} \le \overline{\mathrm{BD}}$

(단, 등호는 점 X가 점 B 위에 있을 때 성립한다.)

N015 | 답 147

[풀이]



(가): 점 P는 중심이 D이고, 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.

점 Q는 중심이 E이고, 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.

점 R는 중심이 F이고, 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.

(나): $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\overrightarrow{\mathrm{QE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{RA}}=\overrightarrow{\mathrm{RF}}+\overrightarrow{\mathrm{FA}}$

위의 세 등식을 변변히 더하면

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{RA}}$

$=(\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{QE}}+\overrightarrow{\mathrm{RF}})+(\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{FA}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{QE}}+\overrightarrow{\mathrm{RF}}(=\overrightarrow{\mathrm{AX}})$

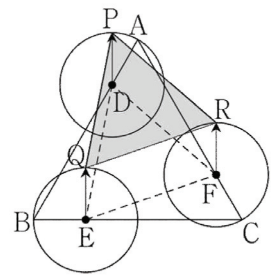
$(\because \overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{FA}}=\vec{0})$

이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{QE}}+\overrightarrow{\mathrm{RF}}|$

$=|\overrightarrow{\mathrm{DP}}+\overrightarrow{\mathrm{EQ}}+\overrightarrow{\mathrm{FR}}| \le 3$

(단, 등호는 세 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{DP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{FR}}$의 방향이 모두 같을 때 성립한다.(아래 그림))



위의 그림처럼 두 삼각형 DEF, PQR은 서로 합동이다.

삼각형 ADF에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DF}}^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos60^\circ$

$=7$, $\overline{\mathrm{DF}}=\sqrt{7}$

$\therefore\ 16S^2=16\times\left(\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)^2=147$

답 147

N016 | 답 8

[풀이]

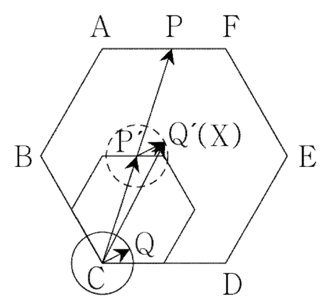
(가):

두 점 P′, Q′에 대하여

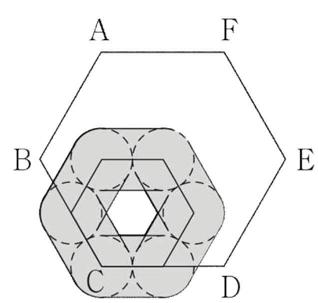
$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{CP'}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$

라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\overrightarrow{\mathrm{CQ'}}$



점 X의 자취는 아래 그림과 같다.



(나): 시점이 C가 되도록 식을 정리하자.

$(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CX})-\overrightarrow{CX}+2(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CX})=k\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CX}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$

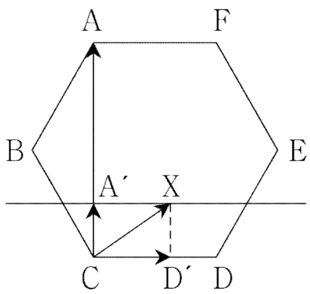
두 점 A′, D′에 대하여

$\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA'}$, $\dfrac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD'}$

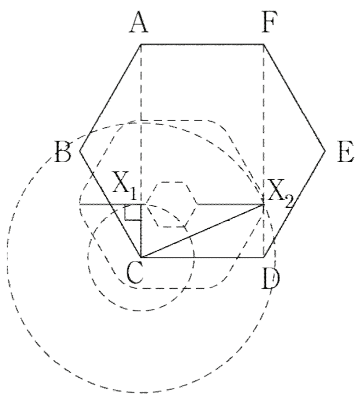
라고 하면

$\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{CD'}$

점 X의 자취는 아래 그림과 같이 직선이다. (선분 AC의 3 : 1 내분점을 지나고 직선 CD에 평행한 직선)



(가), (나)를 모두 만족시키는 점 X의 자취는 두 개의 선분이다.



위의 그림에서

$\overline{CX_1}\le|\overrightarrow{CX}|\le\overline{CX_2}$

이때, $\overline{CX_1}=\sqrt{3}$, $\overline{CX_2}=\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{19}$

(점 X_1은 선분 AC의 3 : 1 내분점이고,

점 X_2는 선분 FD의 3 : 1 내분점이다.)

$\alpha=2$, $\beta=-2$ $\left(\because \dfrac{2-k}{4}=1\right)$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=8$

답 8

N017 | 답 ⑤

[풀이]

벡터의 내적의 성질에 의하여

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=2^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times3^2$

$=40-4\vec{a}\cdot\vec{b}=36$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

답 ⑤

N018 | 답 ③

[풀이]

주어진 조건에서

$|\vec{b}|=1$

벡터의 내적의 정의에 의하여

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{|\vec{a}|}{2}$

주어진 조건에서

$|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{13}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|+9=13$

정리하면

$|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|-4=0$

좌변을 인수분해하면

$(|\vec{a}|-4)(|\vec{a}|+1)=0$

$|\vec{a}|$는 양수이므로

$\therefore\ |\vec{a}|=4$

답 ③

N019 | 답 ④

[풀이]

주어진 조건에 의하여 $\vec{a}\perp\vec{b}$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$|3\vec{a}-2\vec{b}|^2=(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$

$=9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=9\times2^2-12\times0+4\times3^2$

$=72$

$\therefore\ |3\vec{a}-2\vec{b}|=6\sqrt{2}$

답 ④