고등학교 2학년 2학기
수학 II 중간고사 대비

어수강 수학

들어가며

1) 자료 소개

: 입시에서 대학의 'Needs'는 무엇일까? **단언컨대 대학의 유일한 Needs는 '우수한 학생을 선발하는 것'이다.** 최상위 대학에 진학하려면 우수한 학생이 되어야 한다.

그렇다면 어떤 학생이 우수한 학생일까? 많은 학생들이 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한다. **하지만 이유도 모른 채 기계적으로 답만 잘 맞히는 학생을 우수하다고 생각하는 대학은 없을 것이다.** 대학은 이와 같이 공부한 학생을 떨어뜨리려고 할 것이다. **때문에 상위권과 최상위권을 변별하기 위한 준킬러와 킬러 문항은 '생소한 형태'로 출제된다.**

문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한 학생이 시험에서 '생소한 유형'의 문제를 맞닥뜨리면 어떻게 될까? 아마도 제대로 풀지 못할 것이다. 시간만 뺏기고 답을 내지 못하면 멘탈이 무너질 수도 있다. 이렇게 되면 시험을 망칠 가능성이 높다.

그렇다면 어떻게 공부해야 할까? 3년간 공부한 것을 수능에서는 30문제로 평가한다. 때문에 핵심적인 개념과 아이디어 위주로 시험에 출제할 수 밖에 없다. 고난도 문제는 이를 생소한 형태로 출제하는 것일 뿐이다. 면접이나 논술에서도 마찬가지다. **따라서 문제와 그 풀이를 유형화할 것이 아니라, 학습목표에 해당하는 핵심적인 개념과 아이디어에 초점을 맞추고 공부해야 한다.** 핵심개념과 아이디어를 바탕으로 문제를 분석하고 해결함으로써, 이것들이 언제 어떻게 쓰이는지, 무엇을 주의해야 하는지 등을 신경 써서 공부하면 된다.

본 자료의 목적은 "핵심 개념과 아이디어를 바탕으로 다양한 문제를 체계적, 논리적으로 분석하고 해결함으로써, 이를 공부한 학생들이 '생소한 형태의 고난도 문제를 쉽고 정확하게 해결'할 수 있도록 하는 것"이다. 이를 통해 안정적인 1등급 달성하고 최상위권 대학 진학하길 바란다.

2) 누구를 위한 건가요?

□ 치열하게 공부하는데도 성적이 오르지 않는 학생
□ 생소한 형태의 문제가 두려운 학생
□ 안정적인 1등급을 원하는 학생
□ **최상위권 대학 진학이 목표인 학생**

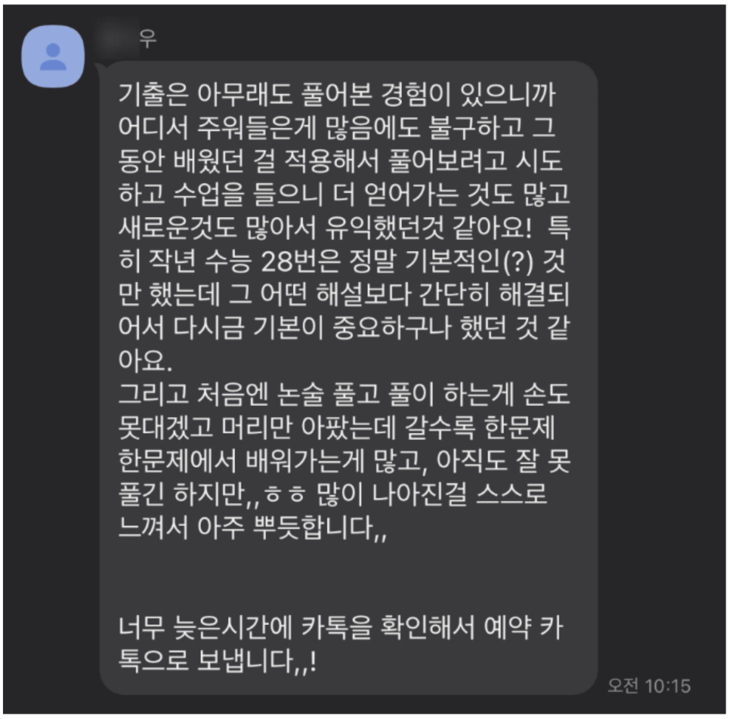
3) 얻을 수 있는 것은 무엇인가요?

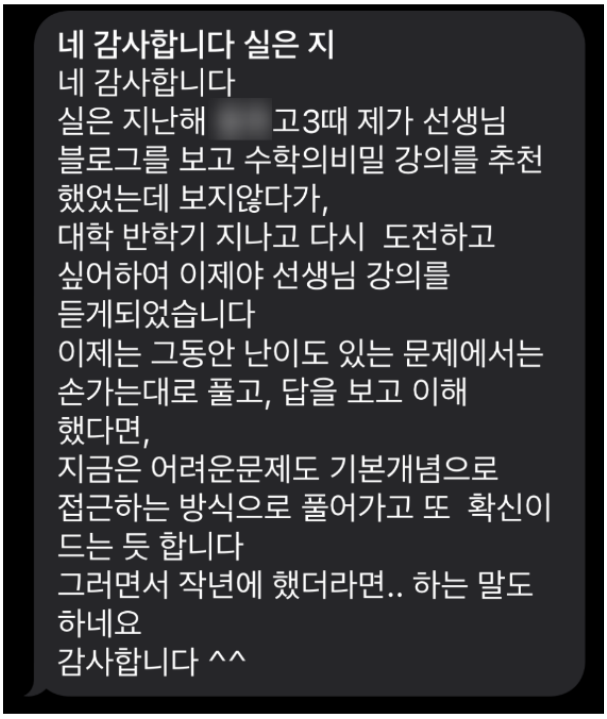
□ 핵심 개념과 아이디어에 대한 이해
□ 문제를 체계적이고 논리적으로 분석하는 방법
□ 생소한 형태의 고난도 문항에 대한 두려움 해소
□ **안정적인 1등급 및 최상위권 대학 진학**

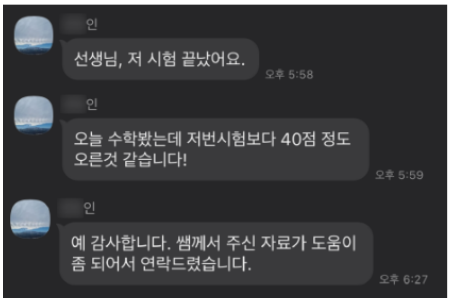
4) 어수강 수학

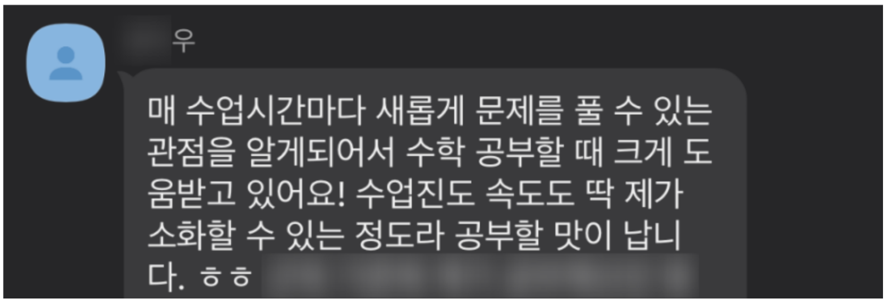
☐ 홈페이지 : www.soogangmath.com
☐ 블로그 : blog.naver.com/math-fish
☐ 유튜브 : www.youtube.com/@soogangmath
☐ 이메일 : mathfish@snu.ac.kr
☐ 전자도서 : 당신이 수학을 망치는 N가지 이유, 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀

5) 후기





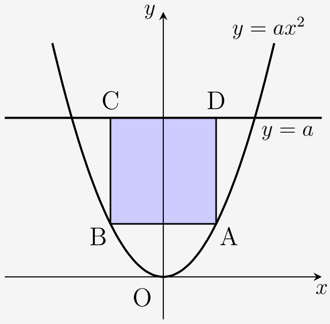




6) 온라인 교육상담 신청 및 온라인 강의 신청하기
: www.soogangmath.com/inquire

[강의록 예제]

[예제1-1] 함수 $y = ax^2\,(a > 0)$의 그래프 위의 두 점 A, B와 직선 $y = a$ 위의 두 점 C, D에 대하여 사각형 ABCD가 정사각형일 때, 정사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하자. 이때, $\lim\limits_{a\to\infty} S(a)$의 값을 구하시오. (단, A의 x좌표는 양수이고 y좌표는 a보다 작다.)[1]



[예제1-2] 두 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$과 실수 a가

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,\ \ \lim_{x\to a} g(x) = \infty\text{이고 } \lim_{x\to a} \frac{2f(x) - g(x)}{f(x) + 2g(x)} = \frac{7}{11}$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2f(x) + g(x)}{2f(x) - 3g(x)}$의 값을 구하시오.[2]

(단, 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, $f(x) + 2g(x) \neq 0$이고 $2f(x) - 3g(x) \neq 0$이다.)

[예제1-3] 두 실수 a, b와 최고차항의 계수가 1인 오차함수 $f(x)$에 대하여 두 집합 A, B를 각각

$$A = \left\{ a \;\middle|\; \lim_{x \to a} \frac{x^2(x-1)}{f(x)} \text{의 값이 존재한다.} \right\}$$
$$B = \left\{ b \;\middle|\; \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{x^2(x-1)^4} \text{의 값이 존재하지 않는다.} \right\}$$

라 하자. $0 \in (A-B)$, $1 \in (B-A)$이고 $\lim_{x \to 3} f(x) = 18$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.[3]

[예제1-4] 세 정수 a, b, c에 대하여 이차함수 $f(x)$를 $f(x) = a(x-b)^2 + c$라 하고, 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y = t$가 곡선 $y = g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(2) < h(-1) < h(0)$
(나) 함수 $y = (t^2 - t)h(t)$는 모든 실수 t에서 연속이다.

이때, $80 \times f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오.[4]

[예제1-5] 연속함수가 아닌 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+a & (|x|\le 1) \\ 2x^2+bx+c & (|x|>1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)f(2x)$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $6|a+b+c|$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [5]

[예제1-6] 다음 질문에 답하시오.[6]

(1) 함수 $f(x)$가 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{\sqrt[3]{h}}=1$을 만족할 때, $f(x)$는 $x=2$에서 연속인가?

(2) 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$을 만족할 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}=0$이 성립하는가?

(3) $f(x)=|x-2|$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}=0$이 성립하는가?

(4) 모든 실수 x, y에 대하여 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$를 만족하며 $f(0)=0$, $f'(0)=1$인 함수 $f(x)$를 구하시오.

[예제1-7] 함수 $f(x) = |x^2 - 3x + a|(x+3)(x+b)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a, b에 대하여 $a \times b$의 값을 구하시오. (단, $a < 0$)[7]

[예제1-8] 미분가능한 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 3$을 만족시킬 때,

$$\lim_{x\to\infty} \{f(2x+2) - f(2x-1)\}$$

의 값을 구하시오.[8]

[예제1-9] 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $y = f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

(가) $f(n) = 0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x) \geq 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.[9]

[2024학년도 성균관대 자연 2, 문제 1]

[예제1-10] 다항식

$$A(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 8$$
$$B(x) = -x^4 + 8x^3 - 22x^2 + 25x + 13$$
$$C(x) = x$$
$$D(x) = -x^2 + 6x$$

가 있다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $0 < x < 3.5$인 모든 x에 대하여 다음 부등식을 만족시킨다.

$$A(x) \le f(x) \le B(x)$$
$$C(x) \le g(x) \le D(x)$$

다음 물음에 답하시오.[10]

1. $0 < x < 3.5$인 모든 x에 대하여 $g(x) \le f(x)$가 성립함을 보이시오.
2. $f(1) = 8$일 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.
3. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+3h) - g(a+5h)}{h}$의 값이 존재할 때, a의 값과 극한값을 구하시오. (단, $0 < a < 3.5$)
4. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(b+4h) - g(b-3h) - 22}{h}$의 값이 존재할 때, 가능한 b의 값과 극한값을 모두 구하시오. (단, $0 < b < 3.5$)

[내신기출]

[예제1-11] 8 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x) = x^2 - 2ax + a^2 - a - 1, \quad g(x) = \begin{cases} x + b & (1 < x < 5) \\ 9 - b & (x \le 1 \text{ 또는 } x \ge 5) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.[11]

[예제1-12] 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = g(0) = -1$

(나) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{f(x) + g(x) + 2}{x - 1}$의 값이 존재한다.

(다) 다항식 $f(x)g(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $-7x + 8$이다.

(라) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - g(x)}{x^2} = 1$

이때, $f(-1) + g(2)$의 값을 구하시오.[12]

[예제1-13] 함수 $f(x) = x^2 - 2ax + 8$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} x - 7a & (x \geq a) \\ f(x + 2\sqrt{2}) & (x < a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, 양수 a의 값을 구하시오.[13]

(가) 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 두 실근 α, β에 대하여 $0 < \alpha < 2 < \beta$이다.
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x = a$에서 연속이다.

[예제1-14] 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $y = f(x)$, $y = g(x)$가 원점을 지나고

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{ax + 2f(x)}{ax + f(x)}, \quad g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{ax + 2g(x)}{ax + g(x)}$$

이다. $f'(0) \times g'(0) = -1$일 때, a의 값을 구하시오.[14]

어수강 수학

① 홈페이지 : www.soogangmath.com

② 유튜브 : www.youtube.com/@soogangmath

③ 블로그 : blog.naver.com/math-fish

④ 이메일 : mathfish@snu.ac.kr

⑤ 전자도서

1. 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀
2. 당신이 수학을 망치는 N가지 이유

⑥ **수업 및 교육상담 문의** : www.soogangmath.com/inquire

정답

[1] 4

[2] 13

[3]216

[4]60

[5] 24 또는 30

[6](1) 예, (2) 예, (3) 예, (4) $f(x) = x$

[7] 108

[8] 9

[9]3

[10]1. $0 < x < 3.5$인 모든 x에 대하여 $x^3 - 3x^2 + 2x + 8 \geq -x^2 + 6x$가 성립한다. 2. -1 3. $a = 2$이고 극한값은 -4 4. $b = 1$ 또는 $b = 3$이고 극한값은 7

[11]9

[12]10

[13]8

[14]1