서 문

★ 스포일러: 2025 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2025 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통(수학1+수학2) 〉

15. 삼차함수의 그래프의 개형(극값 유무)에 대한 문제.
이차방정식의 근과 계수와의 관계에서 두 근의 곱이 양수임을 파악했어야 함.
최근 수능은 이처럼 고1 연계가 강화되고 있습니다.

20. 교점을 처리할 때, 방정식과 연립 & 사잇값 정리를 활용할 수 있는가를 평가하는 문제.
직선 $y=x$와 합성함수가 주어졌으므로 거미줄 도형을 그려서 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(f(\alpha),\ 3\alpha)$를 찍을 수 있어야 함. (이때, $\alpha>3$)
경곗값 1, 3을 찾아야 하는 이유를 명확하게 이해하고 있어야 함.(+곡선과 점의 이동에 대한 완벽한 이해!)
그리고 문제에서 항등식이 주어졌다면 '대입' 할 생각을 해야 함.

21. 삼차함수의 그래프의 개형(사잇값 정리)+분수함수의 극한+해집합의 상등(귀류법+거미줄 도형)+삼차방정식의 해법(+이차방정식의 근의 분리)이 화학적으로 결합 된 문제. 수능을 기준으로 거의 5년 만에 출제된 문제. 이처럼 수능은 변별력 확보를 위하여 출제된 지 시간이 꽤 지난 주제를 다시 출제합니다.

22. 수열의 귀납적 정의(주기성)+수형도에 대한 전형적인 문제.
수형도를 그리는 것은 어렵지 않았지만, $m=1$, 2일 때, 문제에서 주어진 등식이 성립하지 않음을 따지는 것을 까먹었을 가능성이 있음.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 수준
○○ : 교과서 연습문제 수준
○○○ : 비킬러(중에서 난이도 상)
●●● : 준킬러 (실전개념 필요성 비교적 높음)
★★★ : 킬러 (실전개념 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

▸ 문제집 본문에서 '문제 풀이에 직접적으로 도움이 되는 주제명'은 빈 상자로 두었습니다.

A. 지수함수의 그래프

주제:

빈 상자로 처리된 주제명은 각 단원의 시작 페이지의 맨 아래에 적어두었습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념'과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론'과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

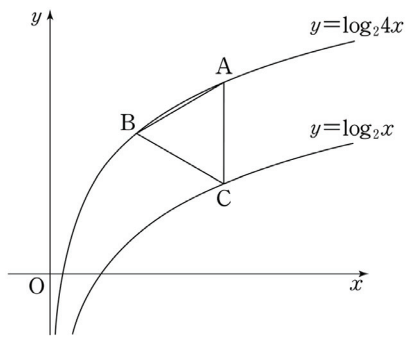
모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 출제 의도에 가장 가깝고, 빠른 풀이입니다.
<u>**따라서 [풀이] 또는 [풀이1]만을 읽어도 학습에 아무런 지장이 없습니다.**</u>

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

A071

○○○
(2011(9)−가형15/나형15)

함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $p^2\times 2^q$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

A072

○○○
(2023−확률과통계21/미적분21/기하21)

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

A073

★★★
(2024(6)−확률과통계21/미적분21/기하21)

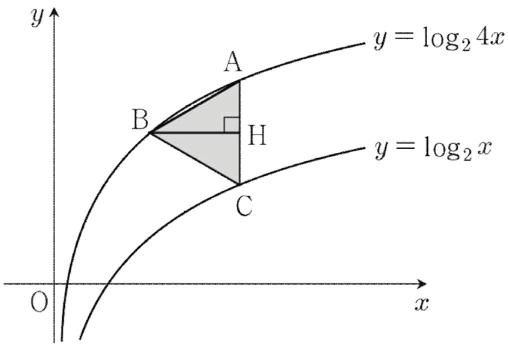
실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
보기의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오.
(단, $A+B+C\neq 0$) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

A와 일치한다.

점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 2이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}$

점 B를 x축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 점 A와 일치하므로

$\mathrm{A}(p+\sqrt{3},\ q+1)$

두 점 A, B는 곡선 $y=\log_2 4x$ 위에 있으므로

$q=\log_2 4p$ …㉠

$q+1=\log_2 4(p+\sqrt{3})$ …㉡

㉡−㉠을 하면 로그의 성질에 의하여

$1=\log_2 \dfrac{p+\sqrt{3}}{p}$

로그의 정의에 의하여

$\dfrac{p+\sqrt{3}}{p}=2$ 풀면 $p=\sqrt{3}$

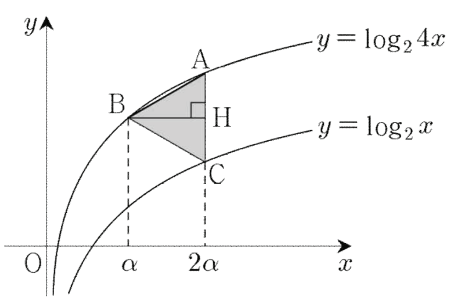
이를 ㉠에 대입하면 $q=\log_2 4\sqrt{3}$

로그의 정의에 의하여 $2^q=4\sqrt{3}$

$\therefore\ p^2\times 2^q=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

답 ③

[풀이2] 시험장



곡선 $y=\log_2 x$를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 곡선 $y=\log_2 4x(=2+\log_2 x)$와 일치한다. 즉, $\overline{\mathrm{AC}}=2$

$\overline{\mathrm{AH}}=1$에서 두 점 A, B의 y좌표의 차가 1이므로 두 점 A(C), B의 x좌표를 각각 2α, α로 둘 수 있다.

$\overline{\mathrm{BH}}=2\alpha-\alpha=\alpha=\sqrt{3}$

점 B의 좌표는

$(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$

$\therefore\ p^2\times 2^q=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

답 ③

A072 | 답 33

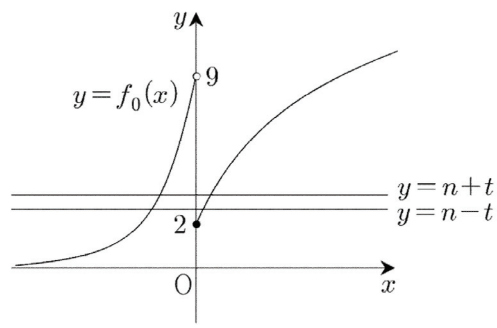
[풀이]

$f(x)=t \Leftrightarrow$

$3^{x+2}=n\pm t(x<0)$ 또는

$\log_2(x+4)=n\pm t(x\ge 0)$

$f_0(x)=\begin{cases}3^{x+2} & (x<0)\\ \log_2(x+4) & (x\ge 0)\end{cases}$으로 두자.



예를 들어 $n=3$일 때, 곡선 $y=f_0(x)$와 두 직선 $y=n\pm t$의 교점의 개수의 최댓값은 4이다. 즉, $g(t)\le 4$

마찬가지 방법으로 $n=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$일 때, 함수 $g(t)$의 최댓값은 4이다.

(참고로 $n=1$일 때 $g(t)\le 2$, $n\ge 9$일 때, $g(t)\le 3$)

따라서 구하는 값은

$3+4+5+6+7+8=33$

답 33

A073 | 답 110

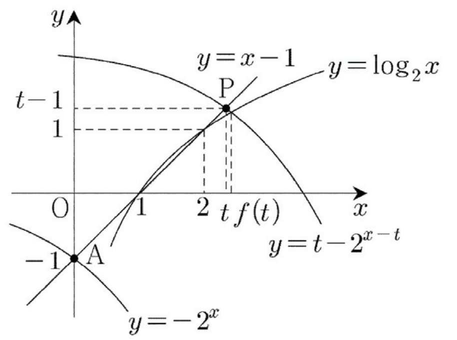
[풀이]

$t-\log_2 x=2^{x-t} \Leftrightarrow \log_2 x=t-2^{x-t}$

이므로 $f(t)$는 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=t-2^{x-t}(\cdots(*))$의 교점의 x좌표이다.

곡선 $y=-2^x$를 x축의 방향으로 t만큼, y축의 방향으로 t만큼 평행이동시키면 곡선 (*)와 일치한다.

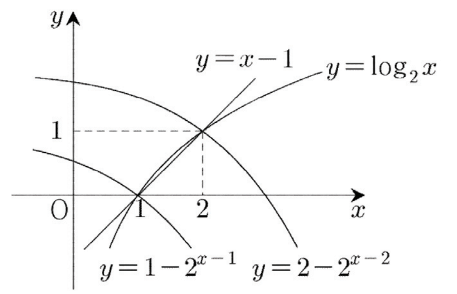
이때, 점 A는 점 P로 평행이동 된다.



(단, $A(0,\ -1)$, $P(t,\ t-1)$이다.)

위의 그림은 $t>1$일 때의 t, $f(t)$의 값을 x축 위에 나타낸 것이다.

▶ ㄱ. (참)



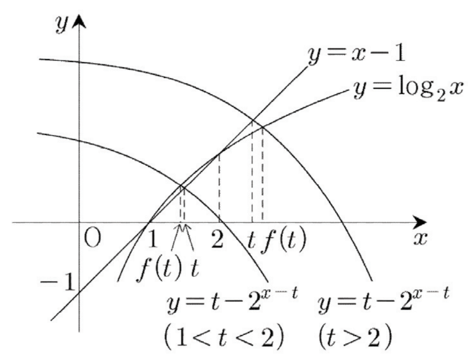
위의 그림에서 $f(1)=1$, $f(2)=2$이다.

▶ ㄴ. (참)

t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

(해설의 맨 처음 그려진 그림에서 알 수 있다.)

▶ ㄷ. (거짓)



위의 그림처럼

$1<t<2$일 때, $f(t)<t$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ뿐이다.

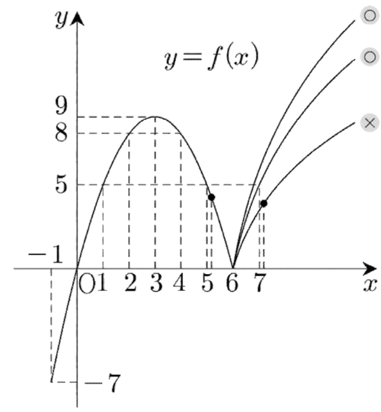
$\therefore\ A+B+C=100+10+0=110$

답 110

A074 |답 10

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는



만약 $f(7)<5$이면 위의 그림처럼 아주 작은 양수 h에 대하여

구간 $[5+h,\ 7+h]$에서 $f(x)$의 최댓값은 5 보다 작다.

즉, $g(6+h)$의 값은 5 보다 작다.

$f(7)\geq 5$이면 위의 그림에서 $t\geq 6$일 때, $g(t)\geq 5$이다.

(그리고 $0\leq t\leq 6$일 때, $g(t)\geq 5$이다.)

$f(7)=a\log_4 2\geq 5$, $a\geq 10$

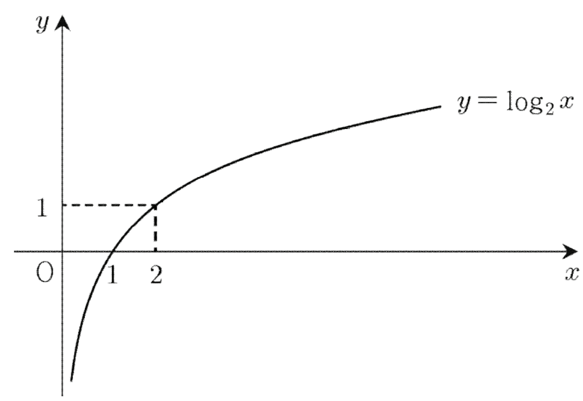
따라서 a의 최솟값은 10이다.

답 10

A075 |답 ⑤

[풀이]

▶ ㄱ. (거짓)



집합 A에 대하여 $n=1$일 때

$\log_2 x\leq 1=\log_2 2$

밑이 1보다 크므로

$x\leq 2$

진수의 조건에서 $x>0$이므로

$0<x\leq 2$

집합 $A(1)$은 $A(1)=\{x\mid 0<x\leq 2\}$

▶ ㄴ. (참)

A. 로그함수의 그래프: 직선

▸ 기출 문제 p.30

두 개 이상의 직선의 기울기의 대소 관계에 관련된 문제들을 풀어보자.

예제 1

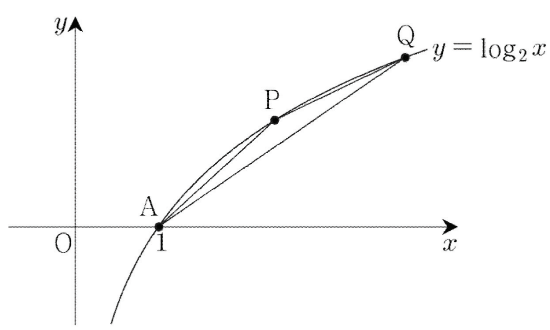
로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 $1<p<q$일 때, 세 수

$\dfrac{\log_2 p}{p-1}$, $\dfrac{\log_2 q}{q-1}$, $\dfrac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}$

의 대소 관계를 밝히시오.

풀이

곡선 $y=\log_2 x$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{P}(p,\ \log_2 p)$, $\mathrm{Q}(q,\ \log_2 q)$를 생각하자.



$\dfrac{\log_2 p}{p-1}$=(두 점 A, P를 잇는 직선의 기울기)

$\dfrac{\log_2 q}{q-1}$=(두 점 A, Q를 잇는 직선의 기울기)

$\dfrac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}$=(두 점 P, Q를 잇는 직선의 기울기)

위의 그림에서 아래의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}<\frac{\log_2 q}{q-1}<\frac{\log_2 p}{p-1}$$

답 풀이 참조

곡선 $y=\log_2 x$가 양의 실수 전체의 집합에서 위로 볼록이므로 위의 부등식이 성립하는 것이다.

지수함수와 로그함수의 참, 거짓 판단 문제는 부등식의 성질과 자주 내적 연계된다.

• 부등식의 성질

실수 $a,\ b,\ c$에 대하여

❶ $a>b,\ b>c$이면 $a>c$

❷ $a>b$이면 $a+c>b+c,\ a-c>b-c$

❸ $a>b,\ c>0$이면 $ac>bc,\ \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

❹ $a>b,\ c<0$이면 $ac<bc,\ \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

다음의 필요충분조건이 성립함을 알 수 있다.

양수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여

$ab>cd \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{d}{b}$ (∵❸) …㉠

양수 $a,\ b,\ d$와 음수 c에 대하여

$ab>cd \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}<\dfrac{d}{b}$ (∵❹) …㉡

증명

㉠($\Rightarrow$):

양변을 $bc(>0)$로 나누면

$\dfrac{ab}{bc}>\dfrac{cd}{bc}$, 즉 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{d}{b}$

㉠($\Leftarrow$):

양변에 $bc(>0)$를 곱하면

$\dfrac{a}{c}bc>\dfrac{d}{b}bc$, 즉 $ab>cd$

㉡($\Rightarrow$):

양변을 $bc(<0)$로 나누면

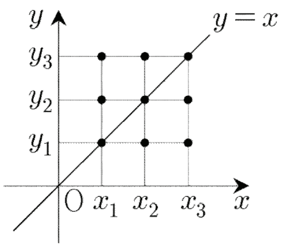
$\dfrac{ab}{bc}<\dfrac{cd}{bc}$, 즉 $\dfrac{a}{c}<\dfrac{d}{b}$

㉡($\Leftarrow$):

양변에 $bc(<0)$를 곱하면

$\dfrac{a}{c}bc>\dfrac{d}{b}bc$, 즉 $ab>cd$

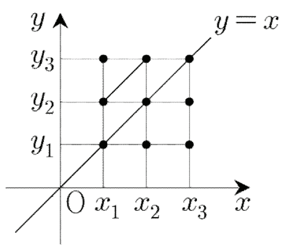
좌표평면 위에 아래 그림과 같이 9개의 점이 있다고 하자.



(단, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$)

다음과 같은 등식들이 성립한다.

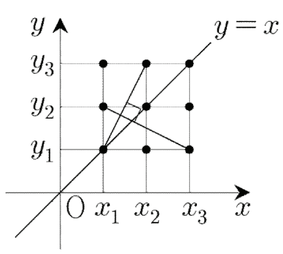
- 평행:



$$\frac{y_3-y_2}{x_2-x_1}=1$$

(두 점 $(x_1,\ y_2)$, $(x_2,\ y_3)$을 잇는 직선과 직선 $y=x$는 서로 평행하다.)
이때, 위의 등식과 등식 $y_3-y_2=x_2-x_1$(두 선분의 길이가 같다.)는 필요충분조건이다.

- 수직:



$$\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}\times\frac{y_3-y_1}{x_2-x_1}=-1$$

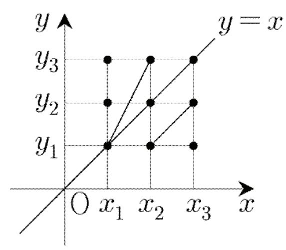
(두 점 $(x_1,\ y_2)$, $(x_3,\ y_1)$을 잇는 직선과 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_3)$을 잇는 직선은 서로 수직이다.)

다음의 부등식이 성립한다. (두 직선의 기울기가 모두 음수일 때, 대소 관계를 주의하자!)

- 두 직선의 기울기의 대소 관계: 기울기가 양수인 경우

$$\frac{y_3-y_1}{x_2-x_1}>\frac{y_2-y_1}{x_3-x_2}$$

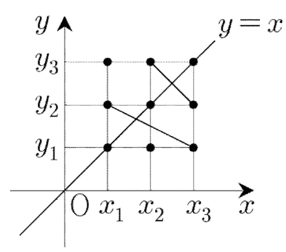
$\Leftrightarrow (y_3-y_1)(x_3-x_2)>(y_2-y_1)(x_2-x_1)$



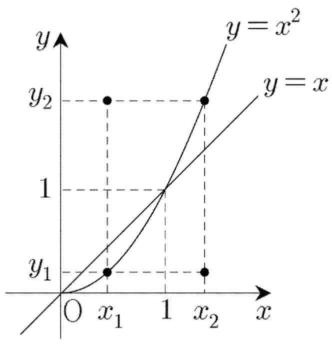
- 두 직선의 기울기의 대소 관계: 기울기가 음수인 경우

$$\frac{y_2-y_3}{x_3-x_2}<\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}$$

$\Leftrightarrow (y_2-y_3)(x_3-x_1)<(y_1-y_2)(x_3-x_2)$



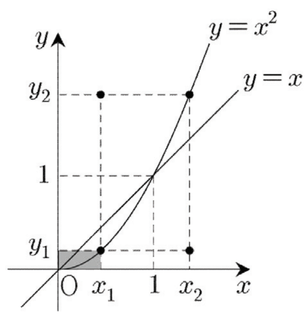
아래의 예를 생각해보자.

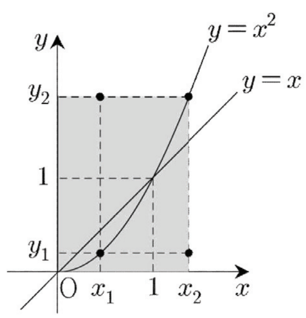


위의 그림에서 아래의 부등식이 성립한다.

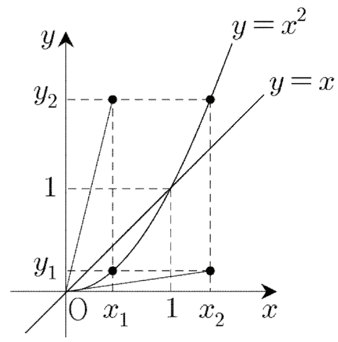
$x_1y_1 < x_2y_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_2} < \dfrac{y_2}{x_1}$

(즉, 두 직사각형의 넓이의 대소 비교 ⇔ 두 직선의 기울기의 대소 비교)





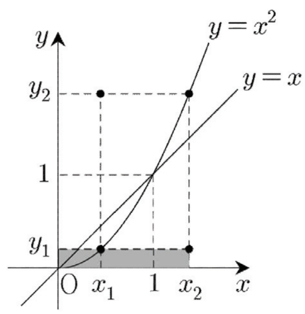
위의 두 직사각형의 넓이를 비교해보면 $x_1y_1 < x_2y_2$이다.

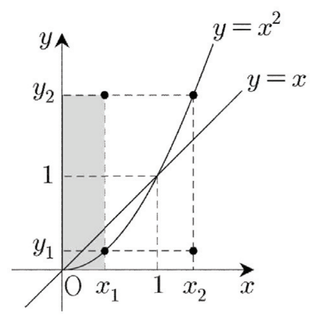


위의 두 직선의 기울기를 비교해보면 $\dfrac{y_1}{x_2} < \dfrac{y_2}{x_1}$이다.

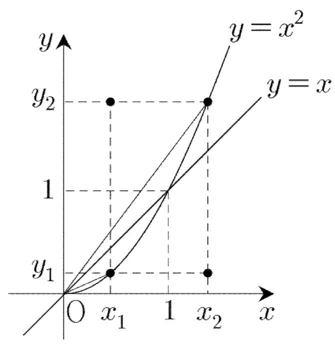
$x_2y_1 < x_1y_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_1} < \dfrac{y_2}{x_2}$

(즉, 두 직사각형의 넓이의 대소 비교 ⇔ 두 직선의 기울기의 대소 비교)



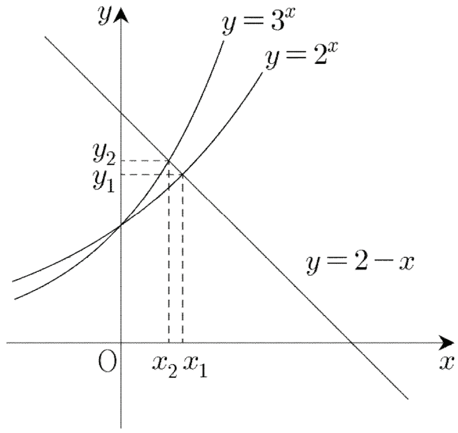


위의 두 직사각형의 넓이를 비교해보면 $x_2y_1 < x_1y_2$이다.



위의 두 직선의 기울기를 비교해보면 $\dfrac{y_1}{x_1} < \dfrac{y_2}{x_2}$이다.

직선 $y=2-x$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$과 만나는 두 교점의 좌표가 아래 그림과 같다고 하자.



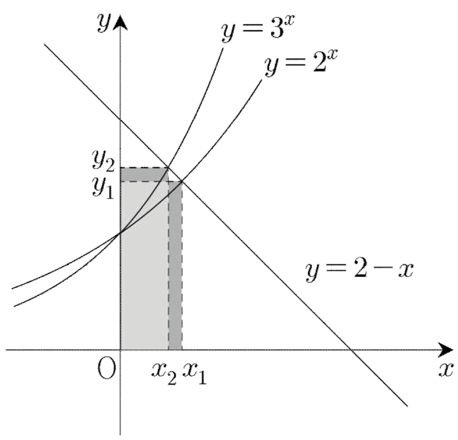
다음이 등식과 부등식이 성립한다.

교점: $0<x_2<x_1<2$, $1<y_1<y_2<2$

기울기: $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$ $(\Leftrightarrow x_1-x_2=y_2-y_1)$

기울기 대소 비교: $\dfrac{y_1}{x_1}<\dfrac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow x_2y_1<x_1y_2$

$x_1y_1>x_2y_2$(넓이) $\Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_2}>\dfrac{y_2}{x_1}$(기울기)



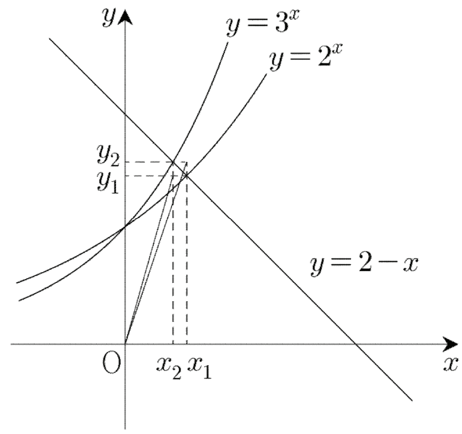
위의 그림에서 두 직사각형의 공통부분의 넓이를 제외한 나머지 두 직사각형의 넓이는 각각

$y_1(x_1-x_2)$, $x_2(y_2-y_1)$

이다. 이때, $x_1-x_2=y_2-y_1$

이므로 $y_1(x_1-x_2)>x_2(y_2-y_1)$

그러므로 $x_1y_1>x_2y_2$



위의 그림에서 두 직선의 기울기를 비교하면

$\dfrac{y_1}{x_2}>\dfrac{y_2}{x_1}$

임을 알 수 있다.

이 문제의 경우 두 직사각형의 넓이의 대소관계가 두 직선의 기울기의 대소관계보다 명확하게 보인다.

A. 점에 대한 해석

• 점에 대한 해석

함수의 방정식을 유도하거나 그래프를 그려야 할 때, 막연할 때가 있다. (주로 어려운 문제에서 그렇다.) 이 경우에는 함수의 그래프가 지나는 점을 몇 개 찍는 것으로 풀이를 시작하면 된다.

예를 들어 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 처음 그릴 때, $\cdots$, $(-2,\ 4)$, $(-1,\ 1)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 4)$, $\cdots$ 을 먼저 찍고 나서 부드럽게 곡선으로 연결한 것을 기억하라. 이는 교육과정상 매우 중요한 개념이며, 수능에서 매년 출제되고 있다. (특히 난문으로)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 정의된다고 하자.

$f(a)=b \Leftrightarrow$ 곡선 $y=f(x)$는 점 $(a,\ b)$를 지난다.
(그리고 좌표평면에서 점 $(a,\ b)$를 지나는 곡선 $y=f(x)$를 그려야 한다!)

위의 명제는 어렵지 않다. 하지만 아래의 명제들은 간혹 어렵게 느껴진다.
(즉, 시험 시간에 잘 떠오르지 않는다.)

$f(g(a))=b$
$\Leftrightarrow$ 곡선 $y=f(x)$는 점 $(g(a),\ b)$를 지난다.
$f(a)=g(b)$
$\Leftrightarrow$ 곡선 $y=f(x)$는 점 $(a,\ g(b))$를 지난다.

확대축소와 관계된 문제에서 다음을 생각할 수 있어야 한다.

$f(2x)=2f(x)$
$\Leftrightarrow$ 곡선 $y=f(x)$는 점 $(2x,\ 2f(x))$를 지난다.
$f(2g(x))=3x$
$\Leftrightarrow$ 곡선 $y=f(x)$는 점 $(2g(x),\ 3x)$를 지난다.
(이때, 세 점 $(x,\ g(x))$, $(3x,\ 2g(x))$, $(2g(x),\ 3x)$를 순서대로 찍어야 하고, 이 점을 지나는 곡선 $y=f(x)$를 그리면 된다!)

역함수와 관계된 문제에서 다음을 생각할 수 있어야 한다.

$f(g(x))=x$
$\Leftrightarrow$ 곡선 $y=f(x)$는 점 $(g(x),\ x)$를 지난다.
(이때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수이다.)
곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=t$와 만나는 교점의 x좌표를 $g(t)$라고 하면 곡선 $y=f(x)$는 점 $(g(t),\ t)$를 지난다.

접선의 기울기(미분계수)와 관계된 문제에서 다음을 생각할 수 있어야 한다.

$f'(a)=b$
$\Leftrightarrow$ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 b이다.
$f'(g(x))=h(x)$
$\Leftrightarrow$ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(g(x),\ f(g(x)))$에서의 접선의 기울기는 $h(x)$이다.

함수를 이론적 기반으로 하는 문제들은 위의 사실들을 물어보는 경우가 많다. 특히 난문일수록 그러하니, 잘 익혀두어야 한다.

예제 1

모든 실수 x에 대하여

$f(2x)=2f(x)$

일 때, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리시오.

풀이

주어진 항등식에 $x=0$을 대입하면

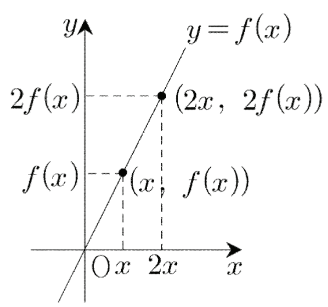
$f(0)=2f(0)$, $f(0)=0$

즉, 곡선 $y=f(x)$는 원점을 지난다.

곡선 $y=f(x)$는 점 $(2x,\ 2f(x))$를 지나므로

점 $(2x,\ 2f(x))$는 점 $(x,\ f(x))$를 원점을 중심으로 2배 확대한 것이다.

따라서 (아래 그림처럼) $f(x)=2x$이다.



답 풀이 참조

참고

만약 함수 $f(x)$가 다항함수라는 조건이 주어지면

$f(x)$를 n차식 $a_nx^n+\cdots+a_0$(단, $a_n\neq0$)으로 두고

방정식을 구하면 된다.

수능에서는 항등식에 대한 '기하적 해석', '산술적 해석' 모두를 이해하는지를 평가하는 경향이 있다.

A. 지수함수와 로그함수의 그래프:

주제: 합성함수(거미줄도형)

▸ 기출 문제 p.32

• 합성함수 (거미줄 도형)

예제 1

지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 세 실수 a, 2^a, 2^{2^a}의 대소 관계를 밝히시오.

접근법

합성함수가 주어졌으므로 아래의 전형적인 풀이를 따른다.

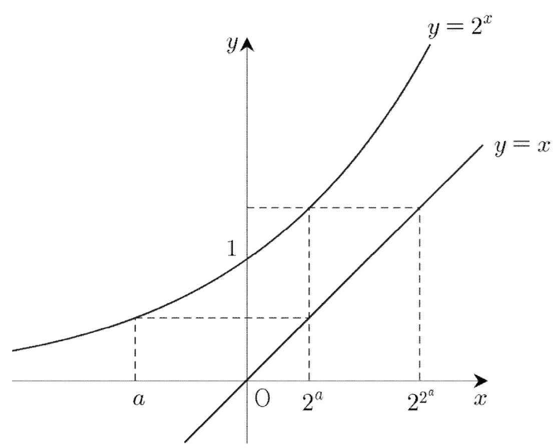
❶ 좌표평면에 직선 $y=x$를 그린다.

❷ 직선 $y=x$를 이용하여 y축 위의 $f(a)$를 x축 위에 나타낸다.

❸ 직선 $y=x$를 이용하여 y축 위의 $f(f(a))$를 x축 위에 나타낸다.

❹ x축 위의 세 수 a, $f(a)$, $f(f(a))$의 대소를 비교한다.

풀이1



$f(x)=2^x$로 두면 세 수 a, 2^a, 2^{2^a}은 각각 a, $f(a)$, $f(f(a))$이다.

위의 그림에서 $a<2^a<2^{2^a}$임을 알 수 있다.

답 풀이 참조

풀이2

다음과 같은 대수적 풀이도 가능하다.

실수 전체의 집합에서 $2^x>x$이므로 $2^a>a$이다.

실수 전체의 집합에서 함수 $y=2^x$은 증가하므로

E083

★★★ (2022(6)-확률과통계22/미적분22/기하22)

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\dfrac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

E084

★★★ (2020-나형30)

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

E085

★★★

(2023-확률과통계22/미적분22/기하22)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

E. 삼차함수의 그래프: 교점의 개수

E086

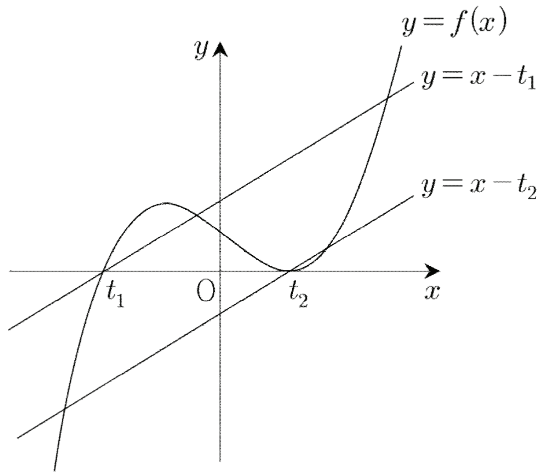
●●●

(2023(9)-확률과통계22/미적분22/기하22)

최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

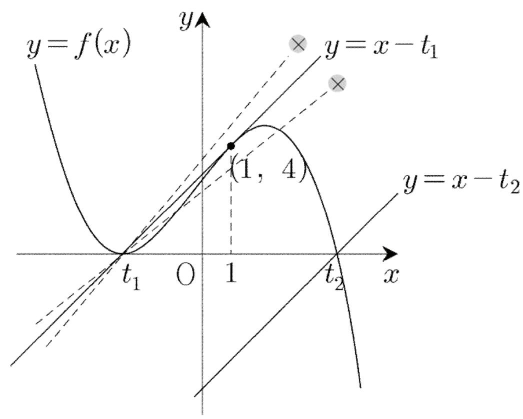
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]



위의 그림처럼 방정식 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 6이다. 이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

- (2) 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우



위의 그림처럼 직선 $y=x-t_1$이 점 $(1,\ 4)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접하면 조건 (나)를 만족시킨다. (만약 접하지 않으면 방정식 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 2 또는 4이다.)

직선 $y=x-t_1$이 점 $(1,\ 4)$를 지나므로 $t_1=-3$이다.

$f(x)-(x+3)$

$=k(x+3)(x-1)^2$ (단, $k<0$)

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-1=k(x-1)^2+2k(x+3)(x-1)$

$f'(-3)=0$이므로

$f'(-3)-1=16k$에서 $k=-\dfrac{1}{16}$

$\therefore\ f(0)=\dfrac{45}{16},\ p+q=61$

답 61

E084

| 답 51

[풀이1]

조건 (가)와 $f(0)=0$에 의하여

$f(x)-x=x(ax^2+bx+c)\ (a>0)$

으로 둘 수 있다.

$f'(x)-1=ax^2+bx+c+x(2ax+b)$

그런데 $f'(1)=1$이므로

$f'(1)-1=3a+2b+c=0$ …㉠

두 조건 (가), (나)에서 주어진 방정식을 다시 쓰면

(가): $x(ax^2+bx+c)=0$ …㉡

(나): $x(ax^2+bx+c+2)=0$

만약 ㉡에서

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2(\alpha\neq 0)$

이면, 즉 0이 중근이 아니면

(나): $x\{(a(x-\alpha)^2+2\}=0 \Leftrightarrow x=0$

이므로 (나)에서 주어진 방정식의 실근의 개수는 1이다.

이는 가정에 모순이므로 ㉡에서 이차방정식

$ax^2+bx+c=0$

은 0을 한 실근으로 갖는다.

즉, $c=0$ …㉢

㉠, ㉢을 (가)에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$f(x)=ax^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+x$

방정식 $f(x)+x=0$을 정리하면

$ax^3-\dfrac{3}{2}ax^2+2x=0$

$\Leftrightarrow ax\left(x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{2}{a}\right)=0$

$\Leftrightarrow ax(x-\beta)^2=0$ ($\because$ (나))

(단, β는 0이 아닌 상수)

이차방정식

$x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{2}{a}=0$ …㉣

은 중근을 가져야 한다.

(이때, 중근은 0일 수 없다. 왜냐하면 위의 등식에 $x=0$을 대입하면 $a=0$인데, 이는 가정에 모순이기 때문이다.)

㉣의 판별식을 D라고 하면

$D=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-4\times\dfrac{2}{a}=0,\ a=\dfrac{32}{9}$

$\therefore\ f(3)=\dfrac{32}{9}\times 3^2\times\dfrac{3}{2}+3=51$

답 51

[풀이2] 시험장

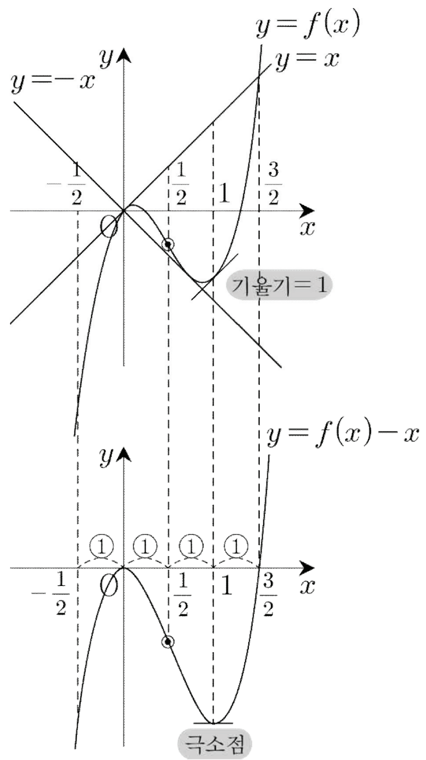
삼차함수의 비율관계를 이용하여 문제를 빠르게 해결하자.

조건 (가)에 의하여

'곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$에 접하고, 접점이 아닌 점에서 다시 만난다.'

조건 (나)에 의하여

'곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=-x$에 접하고, 접점이 아닌 점에서 다시 만난다.'
조건 $f(0)=0$에 의하여
'곡선 $y=f(x)$는 원점을 지난다.'
조건 $f'(1)=1$에 의하여
'곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기는 1이다.'
이제 문제에서 주어진 모든 조건을 만족하도록
두 함수 $f(x)$, $f(x)-x$의 그래프를 그리면 다음과 같다.
이때, 삼차함수 그래프의 비율 관계$(1:1:1:1)$을 이용하자.



(단, ⦿은 접선의 기울기가 최소가 되는 점, 즉 '변곡점' 이다.)
인수정리에 의하여

$$f(x)-x=kx^2\left(x-\frac{3}{2}\right)\ (\text{단, } k>0)$$

방정식 $f(x)+x=0$을 정리하면

$$kx^3-\frac{3}{2}kx^2+2x=0$$

$$\Leftrightarrow kx\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{2}{k}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow kx(x-\alpha)^2=0\ (\because (\text{나}))$$

(단, α는 0이 아닌 상수)
이차방정식

$$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{2}{k}=0 \qquad \cdots ㉠$$

은 중근을 가져야 한다.
(이때, 중근은 0일 수 없다. 왜냐하면 위의 등식에 $x=0$을 대입하면 $k=0$인데, 이는 가정에 모순이기 때문이다.)

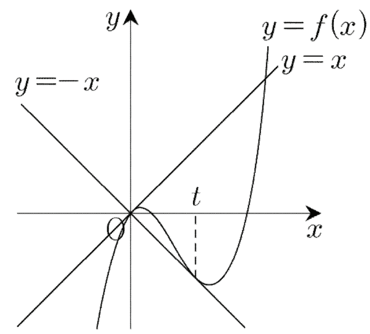
㉠의 판별식을 D라고 하면

$$D=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4\times\frac{2}{k}=0,\ k=\frac{32}{9}$$

$$\therefore\ f(3)=\frac{32}{9}\times 3^2\times\frac{3}{2}+3=51$$

답 51

[참고]
k의 값을 다음과 같이 결정할 수도 있다.
직선 $y=-x$ 위의 접점의 x좌표를 t로 두자.



$f(t)=-t$이므로

$$f(t)=kt^2\left(t-\frac{3}{2}\right)+t=-t$$

즉, $2kt^2-3kt+4=0 \qquad \cdots ㉡$
함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=2kx\left(x-\frac{3}{2}\right)+kx^2+1$$

$$f'(t)=2kt\left(t-\frac{3}{2}\right)+kt^2+1=-1$$

즉, $3kt^2-3kt+2=0 \qquad \cdots ㉢$
㉢$-$㉡을 하면

$$kt^2-2=0$$

$kt^2=2$, $kt=\frac{2}{t}$을 ㉡에 대입하여 t의 값을 구하면

$$t=\frac{3}{4},\ k=\frac{32}{9}$$

E085 | 답 13

[풀이]
조건 (가)에서 주어진 항등식을 변형하면

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))\ (\text{단, } x\neq 1) \qquad \cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}f'(g(x)),\ \text{즉}$$

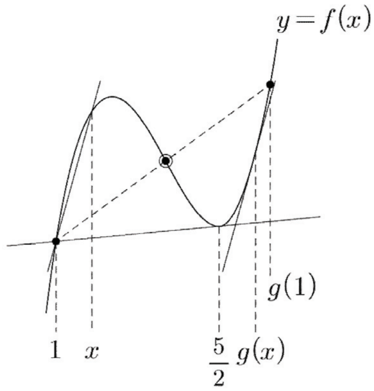
$$f'(1)=f'(g(1)) \qquad \cdots ㉡$$

이때, $g(1)\neq 1$ ($\because$ (나): $g(x)\geq 2.5$)
㉠: 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(1,\ f(1))$, $(x,\ f(x))$를

잇는 직선의 기울기와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(g(x),\ f(g(x)))$에서의 접선의 기울기는 같다.

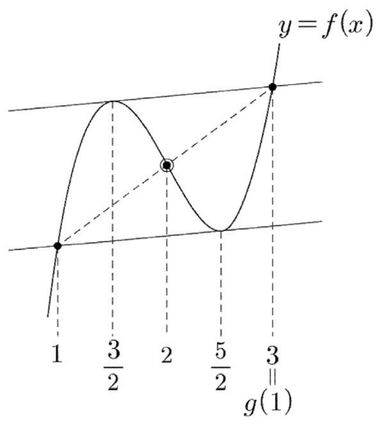
㉡: 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(g(1),\ f(g(1)))$에서의 접선의 기울기는 같다.

㉠, ㉡을 만족시키는 함수 $f(x)$의 여러 그래프 중에서 가장 간단한 것을 하나 그려보자.



(단, ◉는 $f'(x)$가 최솟값을 갖는 점이다.(즉, 변곡점))

위의 그림에서 x의 값을 $-\infty$에서 ∞까지 변화시키면 $g(x)$의 값은 ∞에서 $\frac{5}{2}$까지 변하고, 다시 $\frac{5}{2}$에서 ∞로 변함을 알 수 있다. 이때, 두 점 $(1,\ f(1))$, $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 잇는 직선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접한다.



삼차함수의 비율관계에 의하여

$g(1)=3$이므로 $f(3)=6$ $(\because$ (다))

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ $(\because$ (다))

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(3)=27+9a+3b-3=6$,

$27+6a+b=3+2a+b$ $(\because f'(3)=f'(1))$

a, b에 대한 방정식을 연립하면

$a=-6$, $b=12$

$\therefore\ f(4)=13$

답 13

E086

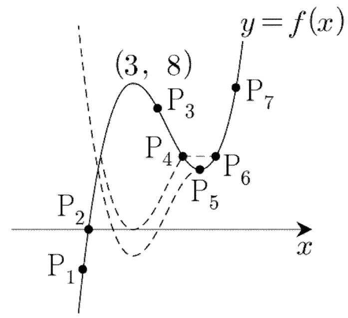
| 답 58

[풀이]

$\frac{f(x)+\{-f(x)+2f(t)\}}{2}=f(t)$이므로

구간 $(-\infty,\ t]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 직선 $y=f(t)$에 대하여 대칭이다.

- (1) 함수 $f(x)$의 극솟값이 4보다 작은 경우 (×)



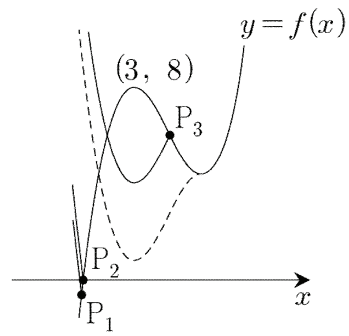
점 P_1, P_2, $\cdots$, P_7의 x좌표가 t일 때,

함수 $h(t)$의 값은 각각

2, 1(불연속), 0, 1(불연속), 2, 1(불연속), 0

이므로 함수 $h(t)$의 불연속 점의 개수는 3 이상이다.

- (2) 함수 $f(x)$의 극솟값이 4보다 큰 경우 (×)



점 P_1, P_2, P_3의 x좌표가 t일 때,

함수 $h(t)$의 값은 각각

2, 1(불연속), 0

이므로 함수 $h(t)$의 불연속 점의 개수는 1이다.

- (3) 함수 $f(x)$의 극솟값이 4인 경우 (○)

함수 $f(x)$가 $x=p$에서 극솟값 4를 갖는다고 하자.

t의 값을 $-\infty$에서 ∞까지 변화시키면서 함수 $g(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

F. 정적분의 계산: 이차함수

▸ 기출 문제 p.100

● 정적분의 평균값 정리

〈정적분의 평균값 정리〉
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나 존재한다.

증명
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 상수함수이면 주어진 명제는 명백하다.
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 상수함수가 아닌 경우를 생각하자.
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이므로 최대최소의 정리에 의하여 최댓값과 최솟값이 존재한다. 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 하면

$m \le f(x) \le M$에서 $\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$

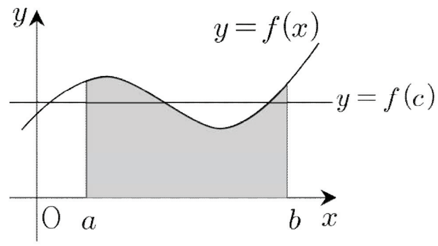
즉, $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

이때, $\int_a^b f(x)dx = K(b-a)$로 두면 $m \le K \le M$이고,
사잇값 정리에 의하여 $f(c) = K$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나 존재한다.
다시 말하면

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나 존재한다. ■

위의 정리에 대한 기하학적 해석은 다음과 같다.
예를 들어 아래 그림과 같이 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \ge 0$이라고 하자.



위의 그림과 같이 정적분
$\int_a^b f(x)dx$의 값(어둡게 색칠된 도형의 넓이)
과 직사각형 $(b-a)f(c)$의 넓이가 같아지는
상수 $f(c)$는 반드시 존재한다.

예제 1

실수 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n에 대하여

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

일 때, 방정식

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$$

은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 실근을 가짐을 증명하시오.

증명

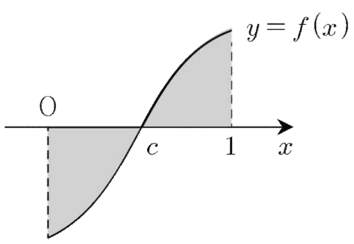
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0)$으로 두자.

$$\int_0^1 f(x)dx=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

이므로, 정적분의 평균값 정리에 의하여

$$\int_0^1 f(x)dx=f(c)$$

인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 문제에서 주어진 방정식은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 실근을 갖는다.
아래 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0,\ 1)$에서 x축과 만날 수밖에 없다.

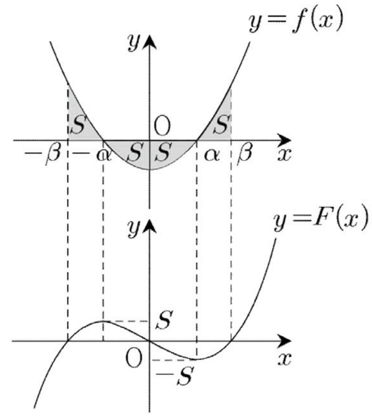


답 풀이 참조

참고

기하적인 관점에서 위의 그림을 재해석 하자. (귀류법)
구간 $[0,\ 1]$에서 연속함수 $f(x)$의 정적분 값은 0이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 x축의 아래에만 있거나, x축의 위에만 있을 수 없다.(전자의 경우에 정적분의 값은 음$(-)$이고, 후자의 경우에 정적분의 값은 양$(+)$이다.) 따라서 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 x축과 적어도 하나 이상의 점에서 만나야 한다. 이 관점이 녹아든 문제는 수능에서도 빈번하게 출제되고 있으므로, 위의 상황을 반드시 눈과 손에 익혀 두도록 하자.

y축이 대칭축인 이차함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다고 하자. (단, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$)



(단, $F(\beta)=0$, $\beta=\sqrt{3}\alpha$)

위의 그림에서 다음의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_{-\beta}^{\beta} f(x)dx=0,$$

$$\int_{-\beta}^{0} f(x)dx=0,\ \int_{0}^{\beta} f(x)dx=0$$

$$\int_{-\beta}^{\alpha} f(x)dx=-S,\ \int_{-\alpha}^{\beta} f(x)dx=-S$$

F. 정적분의 계산

주제: 그래프가 지나는 영역과 점

▸ 기출 문제 p.101

• 절댓값이 포함된 정적분

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$는 연속함수이다.
모든 실수 x에 대하여
$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$
임을 이용하여, 부등식
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$
가 성립함을 증명하시오.

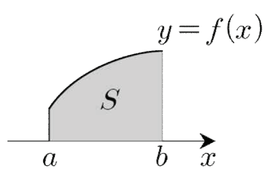
이때, 등호가 성립할 조건은 다음과 같다.
$f(x) \ge 0$ $(\Leftrightarrow |f(x)| = f(x))$
또는 $f(x) \le 0$ $(\Leftrightarrow |f(x)| = -f(x))$

증명

모든 실수 x에 대하여
$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$
이므로
$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$
$$\therefore \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$
($\because$ 두 실수 A, B에 대하여
$-B \le A \le B$이면 $|A| \le B$이다.) ■

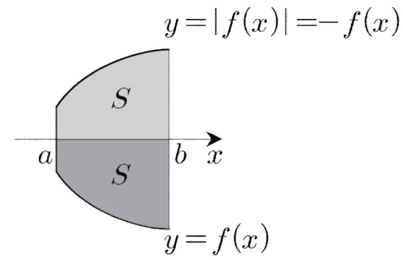
위의 성질을 그래프의 개형을 이용하여 재해석하자.

함수 $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이다.
❶ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \ge 0$인 경우



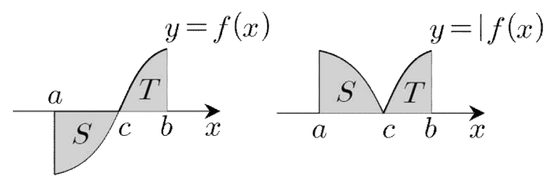
위의 그림에서
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx \quad (\because |S| = S)$$

❷ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \le 0$인 경우



위의 그림에서
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx \quad (\because |-S| = S)$$

❸ 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x) \le 0$이고,
구간 $[c,\ b]$에서 $f(x) \ge 0$인 경우
(단, $a < c < b$)



위의 그림에서
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |T-S|$$
$$\int_a^b |f(x)|dx = S+T$$
$S \ge T$이면 $|T-S| = S-T$이므로
$S+T-|T-S| = 2T \ge 0$
$S < T$이면 $|T-S| = T-S$이므로
$S+T-|T-S| = 2S \ge 0$
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

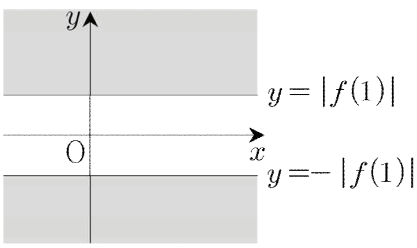
❶, ❷, ❸에 의하여 다음의 부등식이 항상 성립한다.
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

• **함수의 정의역, 공역(치역)**

아래의 예를 생각해 보자.

삼차함수 $f(x)$가 다음을 만족시킨다.
모든 실수 x에 대하여 $|f(x)| \geq |f(1)|$이다.
이때, $f(1)$의 값을 구해보자.

$f(x) \geq |f(1)|$ 또는 $f(x) \leq -|f(1)|$
만약 $f(1) \neq 0$이면 함수 $f(x)$는 어둡게 색칠하지 않은 영역을 지날 수 없다.
하지만 삼차함수의 치역은 실수 전체의 집합이므로 이는 가정에 모순이다.



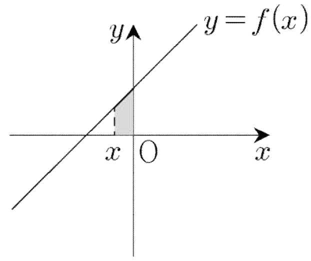
$\therefore\ f(1) = 0$

• **정적분으로 주어진 함수**

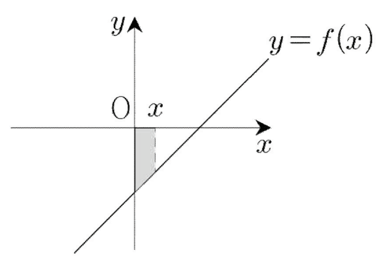
아래의 예를 생각해 보자.

모든 실수 x에 대하여 연속함수 $f(x)$가 증가함수이고,
$\int_0^x f(t)dt \geq 0$
이면 함수 $f(x)$는 제1사분면과 제3사분면을 지나고,
제2사분면과 제4사분면을 지나지 않는다.

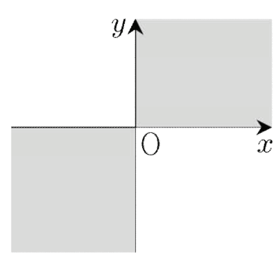
만약 $f(0) > 0$이면 $|x|$가 매우 작은 음수 x에 대하여
$\int_0^x f(t)dt < 0$이다.



만약 $f(0) < 0$이면 $|x|$가 매우 작은 양수 x에 대하여
$\int_0^x f(t)dt < 0$이다.



따라서 귀류법에 의하여 $f(0) = 0$이다.
함수 $f(x)$는 증가하므로
$x > 0$일 때, $f(x) > 0$이고,
$x < 0$일 때, $f(x) < 0$이다.



다음과 같은 방법으로 이 문제를 해결할 수도 있다.

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$로 두자.

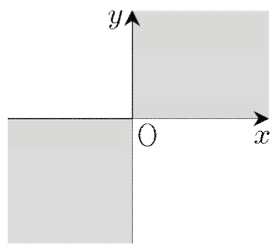
$g(0)=0$, $g'(x)=f(x)$ (이때, $g'(x)$는 증가함수)

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0을 가져야 한다.

따라서 $g'(0)=f(0)=0$이고,

$x=0$의 좌우에서 $g'(x)(=f(x))$의 부호는 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌어야 한다.

따라서 함수 $f(x)$는 제1사분면과 제3사분면을 지나고,
재2사분면과 제4사분면을 지나지 않는다.



이제 아래의 명제에 대하여 생각해 보자.

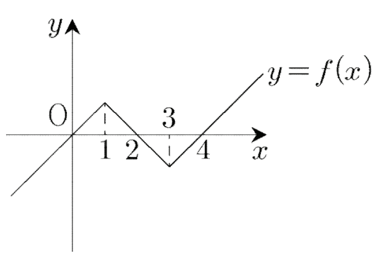
연속함수 $f(x)$에 대하여

$\int_0^x f(t)dt \geq 0$이면 함수 $f(x)$는

제1사분면과 제3사분면을 지나고,
제2사분면과 제4사분면을 지나지 않는다. (거짓)

다음과 같은 반례가 존재한다.

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \leq 1) \\ 2-x & (1 < x \leq 3) \\ x-4 & (x \geq 3) \end{cases}$$



몇 가지의 경우를 더 생각해 보자.

$g(x)=\int_0^x |f(t)|dt$이면 함수 $g(x)$는 원점을 지나고,

$g'(x)=|f(x)|\geq 0$이므로 함수 $g(x)$는 증가함수이다.

따라서 함수 $g(x)$는 제1사분면과 제3사분면을 지나고,
제2사분면과 제4사분면을 지나지 않는다.

$g(x)=\int_0^x \{f(t)\}^2 dt$이면 함수 $g(x)$는 원점을 지나고,

$g'(x)=\{f(x)\}^2 \geq 0$이므로 함수 $g(x)$는 증가함수이다.

따라서 함수 $g(x)$는 제1사분면과 제3사분면을 지나고,
제2사분면과 제4사분면을 지나지 않는다.

H176

★★★ (2017－가형30)

$x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

> (가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다.
> (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
> (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

H. 그래프 개형: 그 외

▸ 유형별 개념 p.346

H177

○○○ (2009－가형28)

함수 $f(x)=4\ln x+\ln(10-x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

> ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $13\ln 2$이다.
> ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
> ㄷ. 함수 $y=e^{f(x)}$의 그래프는 구간 $(4,\ 8)$에서 위로 볼록하다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H178

●●● (2018(6)－가형20)

양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

> (가) $x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.
> (나) 구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\frac{80}{9}$이다.

① -15　② -12　③ -9
④ -6　⑤ -3

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $g(x)$가 증가함수임을 증명하면

보기 ㄴ의 $c(a)$의 값이 유일함을 증명하는 것이다.
함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x) = \sec^2 x + \frac{1}{x^2}$

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $g'(x) > 0$이므로

함수 $g(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가한다.

따라서 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $c(a)$의 값은 유일하다.

H175 | 답 11

[풀이]

$g(x) = \frac{x}{x^2+36}$로 두고

함수 $g(x)$의 그래프를 그리자.
함수 $g(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
모든 실수 x에 대해서
$g(-x) = -g(x)$
이므로, 함수 $g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
$g(0) = 0$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 원점을 지난다.
함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x) = \frac{-(x+6)(x-6)}{(x^2+36)^2}$

$g'(x) = 0$에서 $x = 6$ 또는 $x = -6$
함수 $g(x)$의 이계도함수는

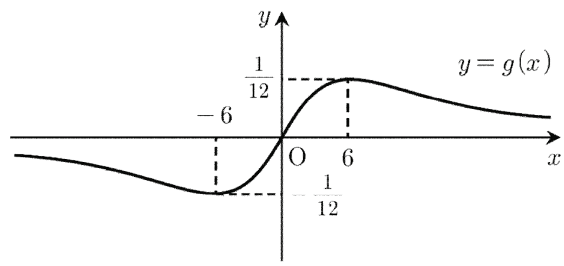
$g''(x) = \frac{2x(x+6\sqrt{3})(x-6\sqrt{3})}{(x^2+36)^3}$

$g''(x) = 0$에서
$x = 0$ 또는 $x = 6\sqrt{3}$ 또는 $x = -6\sqrt{3}$

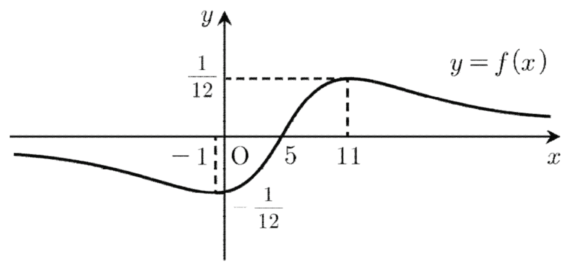
x	0	$\cdots$	6	$\cdots$	$6\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{24}$	$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+36} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{36}{x^2}} = 0$$

이므로, 함수 $g(x)$의 그래프는 x축을 점근선으로 갖는다.
이상에서 함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동시키면 함수 $f(x)$의 그래프와 일치한다.



• (1) $0 < a \leq 5$인 경우
닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 $f(x) \leq 0$이므로
$M + m < 0$
• (2) $a > 5$인 경우
닫힌구간 $[-a,\ a]$에서

함수 $f(x)$는 $x = -1$일 때 최솟값 $-\frac{1}{12}$을 갖는다.

$M + m = 0$이 되려면

함수 $f(x)$는 최댓값으로 $\frac{1}{12}$을 가져야 한다.

닫힌구간 $[-a,\ a]$에 실수 11이 포함되어야 하므로
$\therefore\ a \geq 11$
답 11

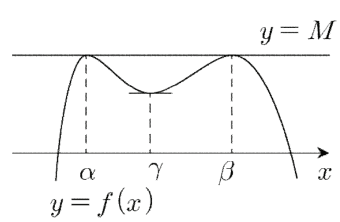
H176 | 답 216

[풀이1] 시험장

평행이동의 관점에서 $a = 0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. 다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.

(가) ⇒ $x > 0$일 때, $f(x) = \frac{g(x)}{x}$

(나) ⇒ 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



롤의 정리에 의하여
$f'(\gamma) = 0\ (\alpha < \gamma < \beta)$

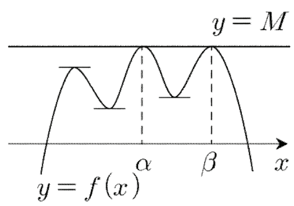
함수 $M-f(x)$의 방정식은

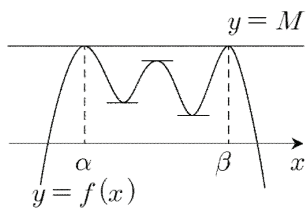
$$M-f(x)=M-\frac{g(x)}{x}$$

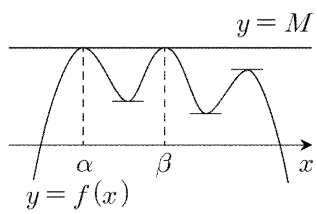
$$=\frac{\overbrace{Mx-g(x)}^{4\text{차식}}}{x}=\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x} \qquad \cdots(*)$$

$(\because f(\alpha)=f(\beta)=M,\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0)$

만약 함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다면 $Mx-g(x)$가 사차함수일 수 없다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 처음에 그렸던 그림과 같다.







(다) ⇒ $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.

(*)에서 함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=Mx-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

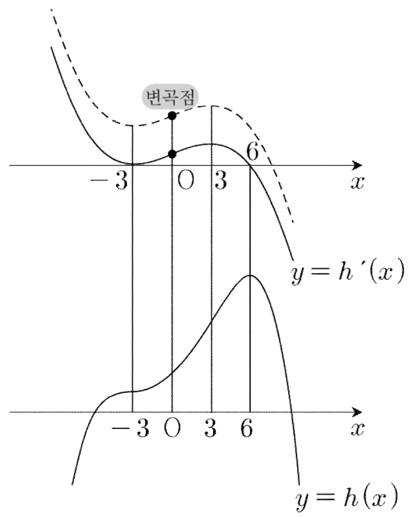
$$g'(x)=\underbrace{-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}_{\text{점 }\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ 0\right)\text{에 대칭}}+M$$

함수 $g(x)$를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시킨 함수를 $h(x)$라고 하면

$$h'(x)=-4x\left(x+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$$

$$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$$

$(\because \beta-\alpha=6\sqrt{3})$



$h'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하여야 하므로

$h(-3)=-216+M\geq 0$, 즉 $M\geq 216$

($\because$ 삼차함수의 비율관계)

따라서 M의 최솟값은 216이다.

답 216

[풀이2] ★

평행이동의 관점에서 $a=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. 다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.

문제에서 주어진 조건에서 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$(양수)이고,

조건 (나)에서 α, β는 모두 양수이므로 $0<\alpha<\beta$이다.

조건 (가)에 의하여

$$f(x)=\frac{g(x)}{x}\ (\text{단, } x>0) \qquad \cdots(*1)$$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 값 M을 가지므로

$f(\alpha)=f(\beta)=M$ 즉, $M-f(\alpha)=M-f(\beta)=0$

인수정리에 의하여

$M-f(x)$의 분자는 $x-\alpha$와 $x-\beta$를 인수로 가지므로

$$M-f(x)=\frac{Mx-g(x)}{x}=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}$$

(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.)

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}+M(\text{단, } x>0)$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=-\frac{2x-\alpha-\beta}{x}Q(x)-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x}Q'(x)$$

$$+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x^2}Q(x) \qquad \cdots ㉠$$

조건 (나)에 의하여 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

이를 ㉠에 대입하면

$f'(\alpha)=-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}Q(\alpha)=0$ 즉, $Q(\alpha)=0$

$f'(\beta)=-\dfrac{\beta-\alpha}{\beta}Q(\beta)=0$ 즉, $Q(\beta)=0$

인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-\dfrac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M$(단, $x>0$) $\cdots$(*2)

함수 $f(x)$의 도함수는

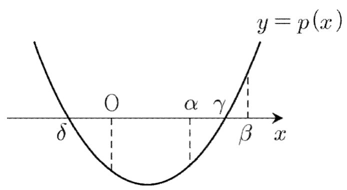
$f'(x)=-\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)(3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta)}{x^2}$

(단, $x>0$)

$p(x)=3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$로 두자.

$p(0)=-\alpha\beta<0$, $p(\alpha)=2\alpha(\alpha-\beta)<0$,

$p(\beta)=2\beta(\beta-\alpha)>0$이므로 이차함수 $p(x)$의 그래프는 다음과 같다.



사잇값 정리에 의하여 $p(\gamma)=p(\delta)=0$인 γ, δ가 존재한다.

(단, $\alpha<\gamma<\beta$, $\delta<0$)

함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=-\dfrac{3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$(단, $x>0$)

$f'(\gamma)=0$, $f''(\gamma)>0$(←[참고2])

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로

사차함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.

(*1), (*2)에 의하여

$\dfrac{g(x)}{x}=-\dfrac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M$(단, $x>0$)

정리하면 $g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+Mx$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$

계산을 줄이기 위하여 함수 $g(x)$의 그래프를

x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시켜서

함수 $h(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.

함수 $g(x)$가 극대점만을 가지므로 함수 $h(x)$도 극대점만을 가지면 된다. 함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=-4x\left(x+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$

$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M(\because \beta-\alpha=6\sqrt{3})$

함수 $h(x)$의 이계도함수는

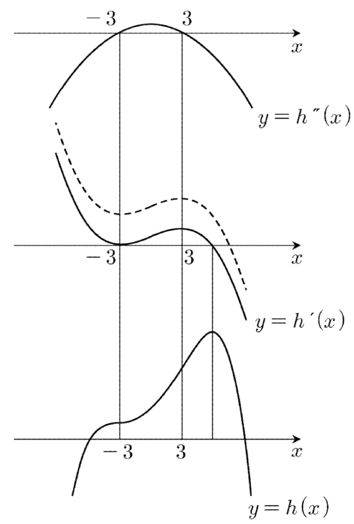
$h''(x)=-12(x+3)(x-3)$

$h''(x)=0$이면 $x=-3$ 또는 $x=3$

$x=-3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=-3$에서 극솟값을 갖는다.

$x=3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

조건 (다)를 만족시키는 세 함수 $h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$가 극대점만을 가지기 위해서는

$h'(-3)=-216+M\geq 0$

$\therefore$ $M\geq 216$

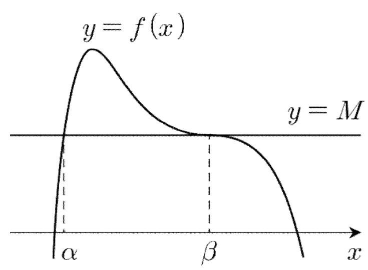
답 216

[참고1] ★

만약 $M-f(x)=\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)^3}{x}$이면

함수 $f(x)$의 그래프는 $x=\alpha$에서

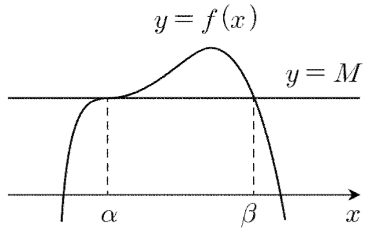
극댓값을 갖지 않는다. 이는 가정에 모순이다.



만약 $M-f(x)=\dfrac{(x-\alpha)^3(x-\beta)}{x}$이면

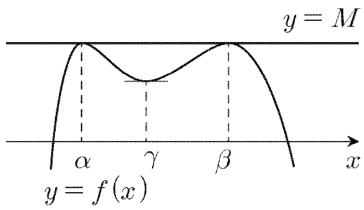
함수 $f(x)$의 그래프는 $x=\beta$에서

극댓값을 갖지 않는다. 이는 가정에 모순이다.



따라서 $M-f(x)=\dfrac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}$이므로

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



한편 위의 그림처럼 함수 $f(x)$는

닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고

열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하고

$f(\alpha)=f(\beta)(=M)$이므로

롤의 정리에 의하여

$f'(\gamma)=0$ (단, $\alpha<\gamma<\beta$)

인 γ가 적어도 하나 이상 존재한다.

[참고2]

$$f'(x)=\frac{-3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$$

(단, $0<\alpha<\gamma<\beta,\ \delta<0$)

$\ln|f'(x)|=\ln3+\ln|x-\alpha|+\ln|x-\beta|+\ln|x-\gamma|$
$+\ln|x-\delta|-2\ln|x|$

양변을 미분하면

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x}$$

정리하면

$$f''(x)=\frac{-3(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}-\frac{3(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$$
$$-\frac{3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)}{x^2}-\frac{3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}{x^2}$$
$$+\frac{6(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^3}$$

$$f''(\gamma)=\frac{-3(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}{\gamma^2}>0$$

$f'(\gamma)=0,\ f''(\gamma)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다. 혹은 $x=\gamma$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$가 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다고 해도 좋다.

[참고3] ★

함수 $g(x)$의 극점의 개수가 1임을 다음과 같이 보여도 좋다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\dfrac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$(단, $x>0$)

방정식 $f'(x)=0$의 필요충분조건은

방정식 $xg'(x)-g(x)=0$이다.

이제 $k(x)=xg'(x)-g(x)$로 두자.(단, $x>0$)

함수 $k(x)$의 도함수는

$k'(x)=xg''(x)$

x는 양수이므로 방정식 $k'(x)=0$과 필요충분조건은

방정식 $g''(x)=0$이다.

이차방정식 $g''(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수의

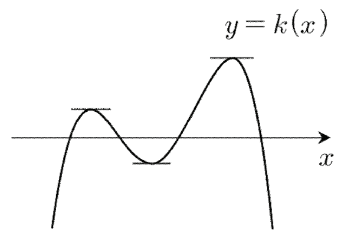
최댓값은 2이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow k(x)=0$

$k'(x)=0 \Leftrightarrow g''(x)=0$

사차방정식 $k(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4라고 가정하자.



함수 $k(x)$의 극점의 개수는 3이므로

방정식 $k'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

그런데 이차방정식 $g''(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을

가질 수 없으므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 방정식 $k(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3 이하이다.

필요충분조건에 의하여

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3 이하이다.

함수 $f(x)$의 극점의 개수가 3 이하이므로

조건 (다)에 의하여 사차함수 $g(x)$의 극점의 개수는 1이다.

[참고4]

M의 범위를 다음과 같이 구해도 좋다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

계산을 줄이기 위하여 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=k$로 두자.

문제에서 주어진 식 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$과 연립하면

$\alpha=k-3\sqrt{3},\ \beta=k+3\sqrt{3}$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-4(x-k+3\sqrt{3})(x-k-3\sqrt{3})(x-k)+M$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=-12(x-k-3)(x-k+3)$

$g''(x)=0$에서 $x=k+3$ 또는 $x=k-3$

$g'(k-3)=-216+M\geq 0$

$\therefore\ M\geq 216$

[참고5]

M의 범위를 다음과 같이 구해도 좋다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$

$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\alpha-6\sqrt{3})(x-\alpha-3\sqrt{3})+M$

$(\because \beta=\alpha+6\sqrt{3})$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=-12(x-\alpha-3\sqrt{3}+3)(x-\alpha-3\sqrt{3}-3)$

$g''(x)=0$에서 $x=\alpha+3\sqrt{3}-3$ 또는 $x=\alpha+3\sqrt{3}+3$

$g'(\alpha+3\sqrt{3}-3)=-216+M\geq 0$

$\therefore\ M\geq 216$

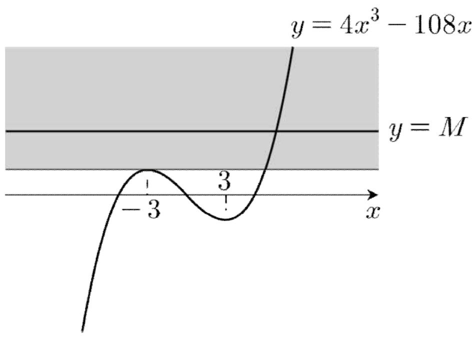
[참고6]

$h'(x)=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$에 대하여

방정식 $h'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로

곡선 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$과 직선 $y=M$의

교점의 개수가 1 또는 2인 M의 범위를 구해도 좋다.



위의 그림에서 색칠된 부분에 직선 $y=M$이 포함되면 된다.

(단, 경계포함) $M\geq 216$

[풀이3]

평행이동의 관점에서 $a=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.

문제에서 주어진 조건에서 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$ (양수)이고,

조건 (나)에서 $\alpha,\ \beta$는 모두 양수이므로 $0<\alpha<\beta$이다.

조건 (가)에 의하여

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ (단, $x>0$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\dfrac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$ (단, $x>0$) $\cdots$(*)

조건 (나)에 의하여

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha)=\dfrac{\alpha g'(\alpha)-g(\alpha)}{\alpha^2}=0$,

$f'(\beta)=\dfrac{\beta g'(\beta)-g(\beta)}{\beta^2}=0$

위의 두 식을 정리하면

$g'(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{\alpha},\ g'(\beta)=\dfrac{g(\beta)}{\beta}$ $\cdots$㉠

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서

동일한 값 M을 가지므로

$f(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{\alpha}=M,\ f(\beta)=\dfrac{g(\beta)}{\beta}=M$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의하여

$g'(\alpha)=M,\ g'(\beta)=M$ $\cdots$㉢

㉠, ㉢에 의하여

$g'(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)-0}{\alpha-0}=M=\dfrac{g(\beta)-0}{\beta-0}=g'(\beta)$

두 점 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$를 잇는 직선의 기울기와

두 점 $(0,\ 0)$, $(\beta,\ g(\beta))$를 잇는 직선의 기울기는

M으로 같으므로, 세 점

$(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$

는 한 직선 위에 있다. 이 직선을 l이라고 하자.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선의 기울기와

두 점 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$를 잇는 직선의 기울기는

M으로 같으므로, 원점은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점

$(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선 위에 있다. 이때, 접선은 l이다.

마찬가지의 이유로 점 $(\beta,\ g(\beta))$에서의 접선은 l이다.

따라서 직선 l은 두 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$에서

곡선 $y=g(x)$에 각각 접한다.

한편 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고

함수 $f(x)$는 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하고

$f(\alpha)=f(\beta)(=M)$이므로 롤의 정리에 의하여

$f'(\gamma)=0$ (단, $\alpha<\gamma<\beta$)

인 γ가 적어도 하나 이상 존재한다.

방정식 $f'(x)=0$과 필요충분조건은

사차방정식 $xg'(x)-g(x)=0$(즉, ((*)의 분자)$=0$)

이므로 인수정리에 의하여 (*)는

$f'(x)=\dfrac{-3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$ (단, $x>0$)

(단, $0<\alpha<\gamma<\beta$, δ는 0이 아닌 실수이다.)

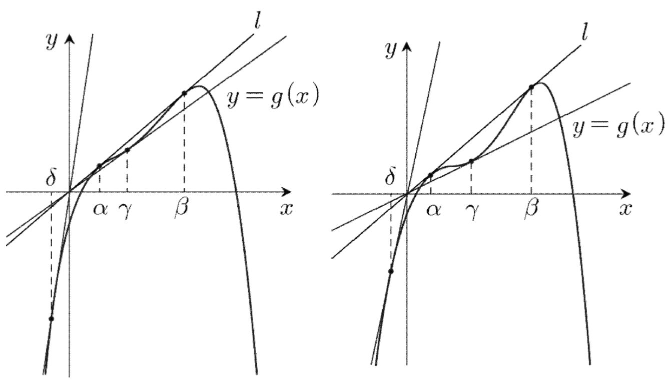
$f'(\gamma)=0$, $f'(\delta)=0$이므로 (*)에서

$g'(\gamma)=\dfrac{g(\gamma)-0}{\gamma-0}$, $g'(\delta)=\dfrac{g(\delta)-0}{\delta-0}$

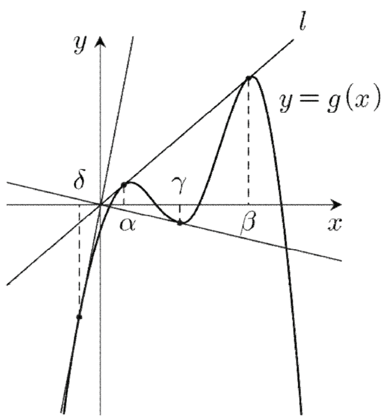
곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 $(\gamma,\ g(\gamma))$, $(\delta,\ g(\delta))$에서의 각각의 접선은 모두 원점을 지난다.

최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $g(x)$의 그래프의 개형으로 아래의 2가지의 경우가 가능하다.

▸ (경우1) 함수 $g(x)$가 극소점을 갖지 않는 경우



▸ (경우2) 함수 $g(x)$가 극소점을 갖는 경우



위의 두 경우 모두에 대해서 δ는 음수이다.

$f'(\gamma)=0$, $f''(\gamma)>0$(←[참고2])

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로

사차함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.

따라서 (경우2)는 제외된다.

(경우1)에서 직선 l은 두 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$에서 곡선 $y=g(x)$에 각각 접하므로

$Mx-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

정리하면

$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+Mx$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$

계산을 줄이기 위하여 함수 $g(x)$의 그래프를

x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시켜서

함수 $h(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.

함수 $g(x)$가 극대점만을 가지므로

함수 $h(x)$도 극대점만을 가지면 된다.

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=-4x\left(x+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$

$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$ ($\because \beta-\alpha=6\sqrt{3}$)

함수 $h(x)$의 이계도함수는

$h''(x)=-12(x+3)(x-3)$

$h''(x)=0$이면 $x=-3$ 또는 $x=3$

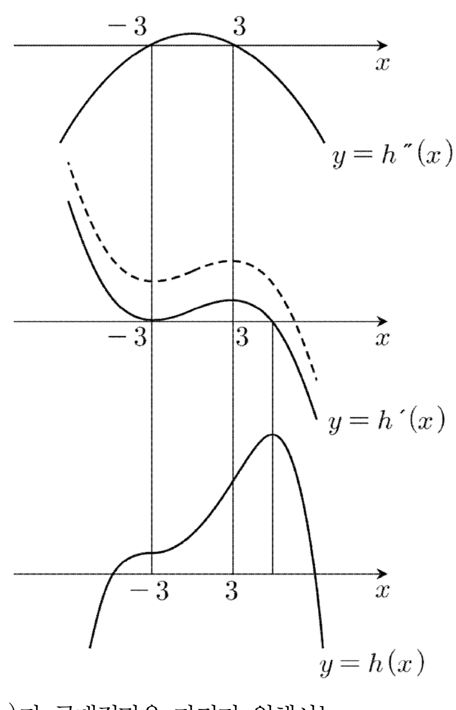
$x=-3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=-3$에서 극솟값을 갖는다.

$x=3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

조건 (다)를 만족시키는 세 함수

$h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$

의 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$가 극대점만을 가지기 위해서는

$h'(-3)=-216+M\geq 0$

$\therefore\ M\geq 216$

답 216

[참고7]

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선을 l_1이라고 하면

l_1: $y=g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$

조건 (나)에서 $g(\alpha)=M\alpha$, $g'(\alpha)=M$이므로

l_1: $y=M(x-\alpha)+M\alpha$

정리하면

l_1: $y=Mx$ (원점을 지난다.)

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\beta,\ g(\beta))$에서의 접선을 l_2라고 하면 마찬가지의 방법으로

l_2: $y=Mx$ (원점을 지난다.)

두 직선 l_1, l_2가 일치하므로 세 점

$(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$

는 한 직선 위에 있다.

그리고 직선 l_1(그리고 l_2)는 두 점

$(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$

에서 곡선 $y=g(x)$에 각각 접한다.

[참고8]

a을 0으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는 이유는 다음과 같다.

▸ x축의 방향으로 $-a$만큼 모든 함수와 점을 평행이동하자.

(문제) $x>0$에서 정의된 함수 $f(x+a)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x+a)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$xf(x+a)=g(x+a)$이다.

(나) 서로 다른 두 실수 $\alpha-a$, $\beta-a$에 대하여

함수 $f(x+a)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta-a$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)

(다) 함수 $f(x+a)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x+a)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오.

$(\because (\beta-a)-(\alpha-a)=\beta-\alpha=6\sqrt{3})$

▸ $f(x+a)=f_0(x)$, $g(x+a)=g_0(x)$,

$\alpha-a=\alpha_0$, $\beta-a=\beta_0$로 두자.

(문제) $x>0$에서 정의된 함수 $f_0(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g_0(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$xf_0(x)=g_0(x)$이다.

(나) 서로 다른 두 실수 α_0, β_0에 대하여

함수 $f_0(x)$는 $x=\alpha_0$, $x=\beta_0$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)

(다) 함수 $f_0(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g_0(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta_0-\alpha_0=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오.

H177 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

진수의 조건에서

$0<x<10$

함수 $f(x)$의 정의역은

$\{x\,|\,0<x<10\}$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{5(x-8)}{x(x-10)}$$

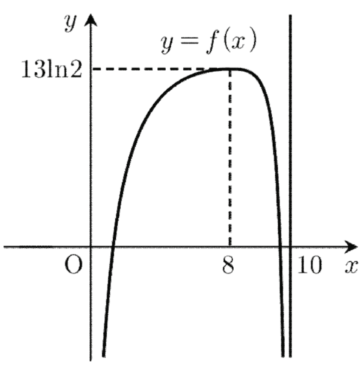
$f'(x)=0$에서 $x=8$

$x=8$의 좌우에서 함수 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 극댓값(최댓값)을 갖는다. 이때, 극댓값(최댓값)은

$f(8)=13\ln 2$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 10-} f(x)=-\infty$

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄴ. (참)

연속함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$이고 $f(8)>0$이므로

사잇값 정리에 의하여 구간 $(0,\ 8)$에서

방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 갖는다.

그런데 구간 $(0,\ 8)$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

연속함수 $f(x)$에 대하여

$f(8)>0$이고 $\lim_{x\to 10-} f(x)=-\infty$이므로

사잇값 정리에 의하여 구간 $(8,\ 10)$에서

방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 갖는다.

그런데 구간 $(8,\ 10)$에서 함수 $f(x)$가 감소하므로 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

이상에서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 10)$에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

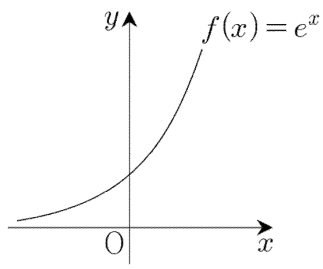
H. 음함수의 미분법

▸ 기출 문제 p.114

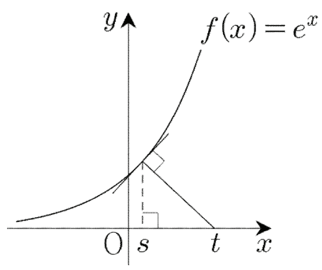
음함수의 미분법에 대한 전형적인 계산과정을 담은 문제를 하나 풀어보자.

예제 1

함수 $f(x)=e^x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t,\ 0)$과 점 $(x,\ f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. $g'(1)$의 값을 구하시오.



풀이



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의
접선이 점 $(t,\ 0)$을 지나면
두 점 $(t,\ 0)$, $(x,\ f(x))$ 사이의 거리가 최소가 된다.
(점 $(s,\ f(s))$에서의 접선의 기울기)
×(두 점 $(s,\ f(s))$, $(t,\ 0)$을 잇는 직선이 기울기)$=-1$,
즉

$$e^s\times\frac{e^s}{s-t}=-1,\ \text{즉 } t-s=e^{2s}=\{g(t)\}^2 \quad \cdots ㉠$$

$g'(1)$의 값을 구해야 하므로 $t=1$일 때의 s의 값을 구하자.
㉠에 $t=1$을 대입하면
$1-s=e^{2s} \Leftrightarrow s=0$
(곡선 $y=e^{2x}$와 직선 $y=1-x$의 교점은 $(0,\ 1)$이 유일하다.)
㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$1-\frac{ds}{dt}=2e^{2s}\frac{ds}{dt},\ 1-\frac{ds}{dt}=2g(t)g'(t)$$

위의 두 등식 중 왼쪽 등식에 $s=0$을 대입하면

$$1-\frac{ds}{dt}=2\frac{ds}{dt},\ \frac{ds}{dt}=\frac{1}{3}$$

$t=1$, $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{1}{3}$을 오른쪽 등식에 대입하면

$$1-\frac{1}{3}=2g(1)g'(1)$$

그런데 ㉠에 $t=1$, $s=0$을 대입하면
$1-0=\{g(1)\}^2$, $g(1)=1$이므로
$\therefore\ g'(1)=\dfrac{1}{3}$

답 $\dfrac{1}{3}$

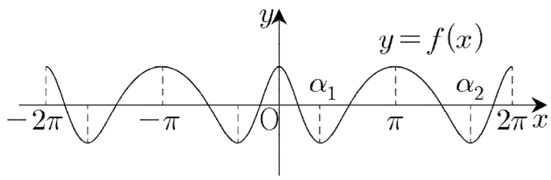
위의 문제를 풀 때, 다음의 유의해야 한다.

(1) 두 문자 t, s는 서로 종속이다.
왜냐하면 점 $(t,\ 0)$의 위치가 변할 때, 점 $(s,\ f(s))$의 위치도 바뀌기 때문이다.

(2) 두 문자 t, s가 모두 포함된 관계식을 유도해야 한다.
이 문제의 경우에는 접선, 법선의 기울기의 곱이 -1임을 이용하여 관계식을 얻을 수 있다.

(3) t의 값을 이용하여 s의 값을 구하거나, s의 값을 이용하여 t의 값을 구한다.
이 문제의 경우에는 $t=1$에서 $s=0$이다.

(4) (2)에서 유도한 등식의 양변을 t에 대하여 미분한다. (여전히 항등식이다.)
이때, 유도된 등식에 t의 값, s의 값을 대입하여 $\dfrac{ds}{dt}$의 값을 구하고,
t의 값, s의 값, $\dfrac{ds}{dt}$의 값을 대입하여 원하는 값을 구한다.



또는 실수 전체의 집합에서
함수 $y=\sin x+2x$는 증가하고,
$(\because y'=\cos x+2>0)$
이 함수의 그래프는 점
$(0,\ 0)$, $(\pi,\ 2\pi)$, $(2\pi,\ 4\pi)$, $\cdots$
를 지나므로
x: $0 \Rightarrow \pi$, $\sin x+2x$: $0 \Rightarrow 2\pi$, $f(x)$: $1 \Rightarrow -1 \Rightarrow 1$
즉, 구간 $[0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=\pi$에서 극댓값을 갖고, $x=\alpha_1$에서 극솟값을 갖는다.
이와 같이 합성함수의 그래프의 개형을 그리는 관점에서 접근해도 좋다.
답 풀이 참조

H. 그래프 개형

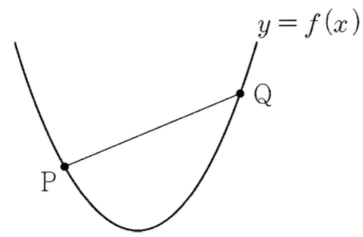
주제: 볼록성

▸ 기출 문제 p.137

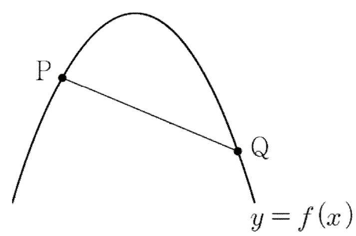
교과서 본문에서는 함수의 오목과 볼록을 다음과 같이 정의하고 있다.

• 곡선의 오목과 볼록의 정의

어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다고 한다.



어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록(또는 아래로 오목)하다고 한다.



✪ 극점은 변곡점이 아니고, 변곡점은 극점이 아니다.

다음의 두 명제를 생각해보자.
함수가 연속인 이계도함수를 가질 때,
❶ 변곡점은 극점일 수 없다. (참)
❷ 극점은 변곡점일 수 없다. (참)
위의 두 명제를 대수적으로 증명할 필요는 없다.(어렵진 않다.) 기하적 관점에서 기억해두면 된다.

함수 $f(x)$가 이계도함수를 가질 때, 이 함수의 오목과 볼록은 이계도함수의 부호로 판단할 수 있다.

• 이계도함수를 이용한 곡선의 오목과 볼록의 판단

함수 $f(x)$가 이계도함수를 가질 때,
함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서
(1) $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
(2) $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

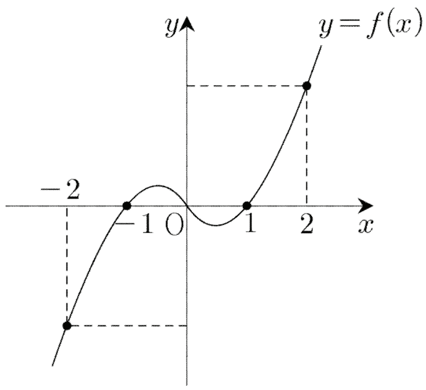
예제 1

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(가) $f(-2)=-2$, $f(1)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$이다.
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]
ㄱ. $f'(-1)=f'(1)$
ㄴ. 열린구간 $(-2,\ 0)$에서 함수 $f(x)$의 그래프가 위로 볼록하면 열린구간 $(0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.
ㄷ. 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수의 최솟값은 2이다.

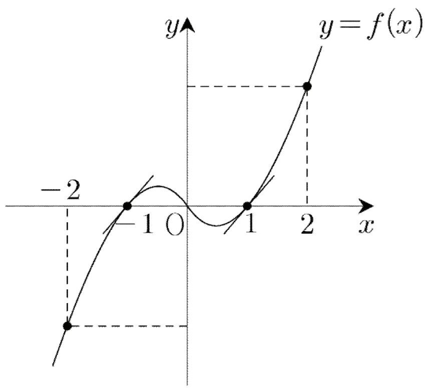
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

✪ 이 문제는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 아예 그리지 않고 대수적으로만 풀 수도 있고, 계산을 최소로 줄이고 그래프의 개형에 의존하여 풀 수도 있다. 실전에서는 아무래도 후자로 접근해야 빠르게 답을 구할 수 있겠으나, (이 문제와 달리) 대수적으로 엄밀하게 참, 거짓을 판단해야 하는 문제도 종종 출제되므로(즉, 그래프의 개형에만 의존하면 오판할 가능성이 커지는 문제들), 전후 두 가지의 방법을 모두 알아두어야 한다.
이제 풀이를 시작하자.
조건 (가)에 의하여
곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(-2,\ -2)$, $(1,\ 0)$을 지난다.
조건 (나)에서 주어진 항등식을 변형하면
$f(-x)=-f(x)$
이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
그러므로 곡선 $y=f(x)$는
두 점 $(2,\ 2)$, $(-1,\ 0)$을 지난다.
문제에서 주어진 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형 중 하나를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. (참)



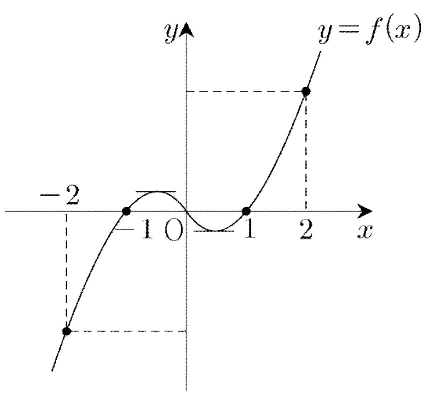
함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 원점에 대하여 서로 대칭인 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 서로 같다.

$\therefore\ f'(-1)=f'(1)$

ㄴ. (참)

함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$의 그래프가 열린구간 $(-2,\ 0)$에서 위로 볼록하면 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0,\ 2)$에서 아래로 볼록이다.

ㄷ. (참)



함수 $f(x)$가

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고

열린구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하므로

롤의 정리에서

$\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=f'(c_1)$ 즉, $f'(c_1)=0$

인 c_1이 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 적어도 하나 존재한다.

마찬가지의 방법으로

$f'(c_2)=0$

인 c_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간

$(-2,\ 2)$에서 적어도 두 개 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

ㄱ, ㄴ이 참임을 산술적으로 증명하면 다음과 같다.

ㄱ. (참)

조건 (나)에서 주어진 항등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-f'(-x)=0$

모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=f'(-x)$ $\cdots(*)$

$x=1$을 대입하면

$f'(1)=f'(-1)$

ㄴ. (참)

(*)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)=-f''(-x)$

곡선 $y=f''(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

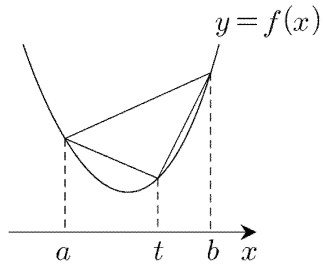
열린구간 $(-2,\ 0)$에서 $f''(x)<0$이면

열린구간 $(0,\ 2)$에서 $f''(x)>0$이다.

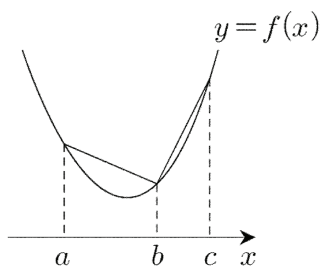
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0,\ 2)$에서 아래로 볼록이다.

이계도함수와 관련된 다음의 두 정리를 알아보자.

(1) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.
$a<t<b$인 임의의 세 수 a, t, b에 대하여
$\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(b)-f(t)}{b-t}$
이면 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다.



(2) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $a<b<c$인 모든 a, b, c에 대하여
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$
일 필요충분조건은 $x_1<x_2$인 모든 x_1, x_2에 대하여
$f'(x_1)<f'(x_2)$ ($\Leftrightarrow$ 이 구간에서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다.)

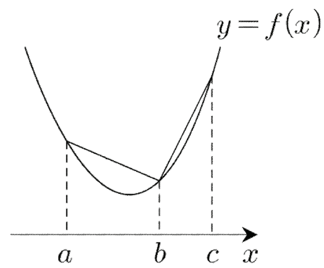


(1)을 이용하여 (2)가 참임을 증명하시오.
(※(1)은 그림을 그려서 참임을 알 수 있으면 된다. 즉, 대수적인 증명은 하지 않아도 좋다.)

증명
($\Rightarrow$)
함수 $f(x)$는 아래로 볼록이므로
세 수 $a<x<b$에 대해서
$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$
$x\to a$이면 $f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$이고,
$x\to b$이면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$이다.
$a<b$일 때, $f'(a)<f'(b)$이므로 $f'(x)$는 증가함수이다.
($\Leftarrow$)
평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha)$ (단, $a<\alpha<b$)
$\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\beta)$ (단, $b<\beta<c$)
이므로
$f'(\alpha)<f'(\beta)$에서
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$
따라서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다. ■

이제 다음과 같은 필요충분조건을 생각할 수 있다.

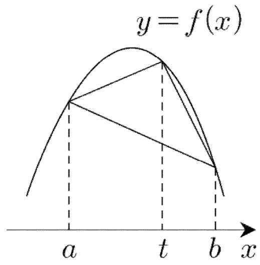
실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\alpha<a<b<c<\beta$인 모든 a, b, c에 대하여
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$
이다.



$\Leftrightarrow$
구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다.

물론 아래의 두 정리도 생각할 수 있다.

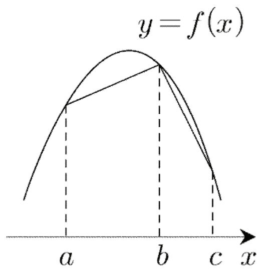
(1) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.
$a<t<b$인 임의의 세 수 a, t, b에 대하여
$\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>\dfrac{f(b)-f(t)}{b-t}$
이면 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다.



(2) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $a<b<c$인 모든 a, b, c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

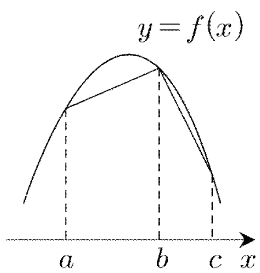
일 필요충분조건은 $x_1<x_2$인 모든 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)>f'(x_2)$ ($\Leftrightarrow$ 이 구간에서 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다.)



이제 다음과 같은 필요충분조건을 생각할 수 있다.
실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\alpha<a<b<c<\beta$인 모든 a, b, c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

이다.



$\Leftrightarrow$

구간 (α, β)에서 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다.

이제 위의 필요충분조건을 이용하여 아래의 예제를 풀어보자.

예제 2

$0<a<b<c<\frac{\pi}{2}$인 a, b, c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

을 만족하는 함수 $f(x)$를 고르면?

ㄱ. $f(x)=\sin x$　　ㄴ. $f(x)=\cos x$

ㄷ. $f(x)=\tan x$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

풀이

문제에서 주어진 조건에 의하여

함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록이다.

구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서

ㄱ. 함수 $f(x)=\sin x$는 위로 볼록이다.

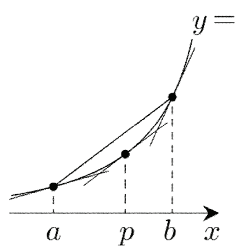
ㄴ. 함수 $f(x)=\cos x$는 위로 볼록이다.

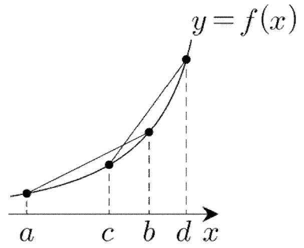
ㄷ. 함수 $f(x)=\tan x$는 아래로 볼록이다.

답 ③

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

- 함수 $f(x)$가 아래로 볼록인 경우





왼쪽: 평균값의 정리에 의하여

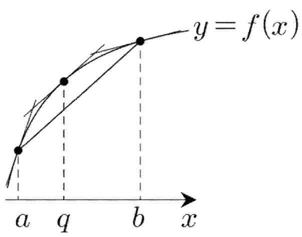
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(p)$이고, $f'(a)<f'(p)<f'(b)$이므로

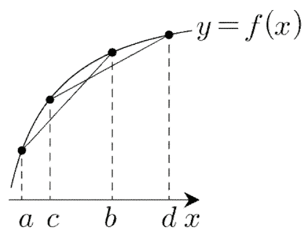
$$f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$$

오른쪽: 평균값의 정리를 두 번 적용하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

- 함수 $f(x)$가 위로 볼록인 경우





왼쪽: 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(q)$이고, $f'(a)>f'(q)>f'(b)$이므로

$$f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(b)$$

오른쪽: 평균값의 정리를 두 번 적용하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

예제 3

구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=x\sin x$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 갖는다고 하자. (단, $\alpha<\beta$)
이때, 다음의 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\sec^2\beta>\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\pi-\beta}>\sec^2\alpha$$

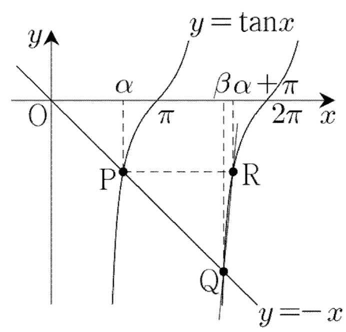
증명

$f'(x)=\sin x+x\cos x=\cos x\{\tan x-(-x)\}$

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로

아래 그림처럼 구간 $[0,\ 2\pi]$에서

곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=-x$의 두 교점의 x좌표는 각각 α, β이다.



(단 $\mathrm{P}(\alpha,\ -\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ -\beta)$, $\mathrm{R}(\alpha+\pi,\ \tan\alpha)$)

(곡선 $y=\tan x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기)
$=\sec^2\alpha$,

(곡선 $y=\tan x$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기)
$=\sec^2\beta$,

(직선 QR의 기울기)

$$=\frac{-\alpha+\beta}{\alpha+\pi-\beta}$$

세 직선의 기울기의 대소 비교를 하면
다음의 부등식을 얻는다.

$$\therefore\ \sec^2\beta>\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\pi-\beta}>\sec^2\alpha$$

답 풀이 참조

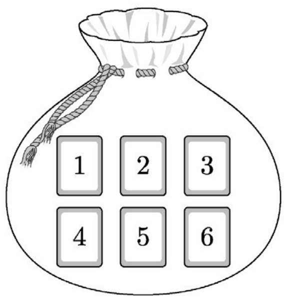
K036

○○○
(2021(9)-나형19)

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2라 하고, 두 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 b_1, 큰 수를 b_2라 하자. 두 집합 A, B를

$A=\{x|a_1 \le x \le a_2\}$, $B=\{x|b_1 \le x \le b_2\}$

라 할 때, $A\cap B \ne \varnothing$의 확률은? [4점]



① $\frac{3}{5}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{11}{15}$

④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{13}{15}$

K037

○○○
(2019(9)-가형28)

방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c)가

$a<2$ 또는 $b<2$

를 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

K038

●●●
(2018-가형28)

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 (x, y, z)가

$$(x-y)(y-z)(z-x)\ne 0$$

을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $a,\ b,\ c$ 중에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}\mathrm{H}_{9} = {}_{3+9-1}\mathrm{C}_{9} = {}_{11}\mathrm{C}_{9} = {}_{11}\mathrm{C}_{2} = 55$

다음의 필요충분조건을 생각하자.

'$a<2$ 또는 $b<2$'

$\Leftrightarrow$

'$a=0$ 또는 $a=1$ 또는 $b=0$ 또는 $b=1$'

• $a=0$을 (*)에 대입하여 정리하면

$b+c=9$ (단, $b \geq 0,\ c \geq 0$)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(0,\ b,\ c)$의 개수는 $b,\ c$ 중에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{2}\mathrm{H}_{9} = {}_{2+9-1}\mathrm{C}_{9} = {}_{10}\mathrm{C}_{9} = {}_{10}\mathrm{C}_{1} = 10$

마찬가지의 방법으로

$b=0$일 때, 순서쌍 $(a,\ 0,\ c)$의 개수는 10이다.

• $a=1$을 (*)에 대입하여 정리하면

$b+c=8$ (단, $b \geq 0,\ c \geq 0$)

위의 방정식을 만족시키는 순서쌍 $(1,\ b,\ c)$의 개수는 $b,\ c$ 중에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{2}\mathrm{H}_{8} = {}_{2+8-1}\mathrm{C}_{8} = {}_{9}\mathrm{C}_{8} = {}_{9}\mathrm{C}_{1} = 9$

마찬가지의 방법으로

$b=1$일 때, 순서쌍 $(a,\ 1,\ c)$의 개수는 9이다.

• 이제 다음의 네 경우 각각에 대한 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하자.

'$a=0$ 이고 $b=0$' : (*)은 $c=9$이므로

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 1이다.

'$a=0$ 이고 $b=1$' : (*)은 $c=8$이므로

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 1이다.

'$a=1$ 이고 $b=0$' : (*)은 $c=8$이므로

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 1이다.

'$a=1$ 이고 $b=1$' : (*)은 $c=7$이므로

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 1이다.

따라서 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$10+10+9+9-(1+1+1+1)=34$

수학적 확률의 정의에 의하여

구하는 확률은 $\dfrac{34}{55}$이다.

$p=55,\ q=34$

$\therefore\ p+q=89$

답 89

K038 | 답 19

[풀이1] ★

• 전체 경우의 수를 구하자.

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x,\ y,\ z$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 $x,\ y,\ z$ 중에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}\mathrm{H}_{10} = {}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_{10} = {}_{12}\mathrm{C}_{2}$

$= \dfrac{12 \times 11}{1 \times 2} = 66$

• 여사건의 경우의 수를 구하자.

문제에서 주어진 방정식을 만족시키는

순서쌍 $(x,\ y,\ z)$중에서

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$

을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하자.

다음의 필요충분조건이 성립한다.

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$

$\Leftrightarrow\ x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$

이제 $x=y$를 문제에서 주어진 방정식에 대입하면

$2x+z=10$

이를 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$를 모두 쓰면

$(0,\ 0,\ 10),\ (1,\ 1,\ 8),\ (2,\ 2,\ 6),$

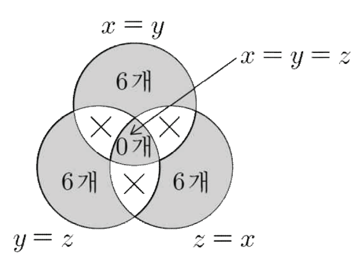
$(3,\ 3,\ 4),\ (4,\ 4,\ 2),\ (5,\ 5,\ 0)$

이고, 순서쌍의 개수는 6이다.

마찬가지의 방법으로 $y=z$를 문제에서 주어진 방정식에 대입하여 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하면 6이고, $z=x$를 문제에서 주어진 방정식에 대입하여 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하면 6이다.

$x=y=z$를 문제에서 주어진 방정식에 대입하면 $3x=10$이고, 이를 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.

이상의 과정을 벤 다이어그램으로 정리하면 다음과 같다.



따라서 경우의 수는 $6+6+6-0=18$이다.

• 확률을 구하자.

수학적 확률의 정의와 여사건의 확률의 정의에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{q}{p} = 1 - \dfrac{18}{66} = \dfrac{8}{11}$

$\therefore\ p+q=19$

답 19

[풀이2] ★

• 전체 경우의 수를 구하자.

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{10} = {}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2$

$= \dfrac{12\times 11}{1\times 2} = 66$

• 문제에서 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하자.

다음의 필요충분조건이 성립한다.

$(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $x \neq y$ 이고 $y \neq z$ 이고 $z \neq x$

$\Leftrightarrow$ x, y, z 중에서 임의로 선택한

어느 두 수도 서로 같지 않다. $\cdots$(*)

이제 문제에서 주어진 방정식을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 중에서 (*)를 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하자.

• (1) x, y, z 중에서 한 수가 0인 경우

$10=0+1+9$ $\cdots$㉠

$10=0+2+8$

$10=0+3+7$

$10=0+4+6$

㉠의 경우에 대하여 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

순열의 수에 의하여 ${}_3P_3 = 3! = 6$이다.

마찬가지의 방법으로 나머지 각각의 경우가 발생할 경우의 수는 6이다.

따라서 경우의 수는 $6+6+6+6=24$이다.

• (2) x, y, z 모두 0이 아닌 경우

$10=7+2+1$ $\cdots$㉡

$10=6+3+1$

$10=5+4+1$

$10=5+3+2$

㉡의 경우에 대하여 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

순열의 수에 의하여 ${}_3P_3 = 3! = 6$이다.

마찬가지의 방법으로 나머지 각각의 경우가 발생할 경우의 수는 6이다.

따라서 경우의 수는 $6+6+6+6=24$이다.

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로 합의 법칙에 의하여

(*)이 발생할 경우의 수는 $24+24=48$이다.

• 확률을 구하자.

수학적 확률의 정의에 의하여

$\dfrac{q}{p} = \dfrac{48}{66} = \dfrac{8}{11}$

$\therefore\ p+q=19$

답 19

K039 | 답 ③

[풀이1]

여사건의 확률을 이용하여 문제를 해결하자.

한 주사위 눈의 수가 다른 주사위 눈의 수의 배수일 사건을 A라고 하자.

6 이하의 자연수 중에서 서로 배수가 아닌 두 수를 모두 쓰면

2, 3 / 2, 5 / 3, 4 / 3, 5 /

4, 5 / 4, 6 / 5, 6

따라서 구하는 확률은

$1-\dfrac{2\times 7}{6^2} = \dfrac{11}{18}$

답 ③

[풀이2]

6 이하의 자연수 중에서 1의 배수는

1, 2, 3, 4, 5, 6

6 이하의 자연수 중에서 2의 배수는

2, 4, 6

6 이하의 자연수 중에서 3의 배수는

3, 6

6 이하의 자연수 중에서 4의 배수는

4

6 이하의 자연수 중에서 5의 배수는

5

6 이하의 자연수 중에서 6의 배수는

6

두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b라고 하자.

$b>a$일 때, b가 a의 배수가 되는 순서쌍 (a, b)의 개수는 8이다.

$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$,

$(2, 4)$, $(2, 6)$, $(3, 6)$

$a=b$일 때, b가 a의 배수가 되는 순서쌍 (a, b)의 개수는 6이다.

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$

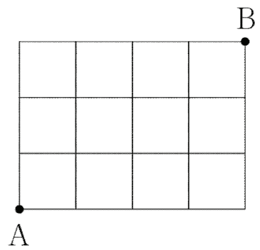
$a>b$일 때, a가 b의 배수가 되는 순서쌍 (a, b)의 개수는 8이다.

J. 중복조합

주제: 사이에 넣기

예제 1

그림과 같은 직사각형 모양의 도로가 있다. A지점에서 출발하여 B지점까지 도로를 따라 최단거리로 갈 때, 방향을 바꾸는 횟수가 모두 3번인 경로의 수를 구하시오.



풀이

(1) 경우1: →↑→↑ (즉, →으로 시작)

가장 왼쪽부터 순서대로

→(p개), ↑(q개), →(r개), ↑(s개)

라고 하면

$p+r=4$, $q+s=3$ (단, $p\geq 1$, $q\geq 1$, $r\geq 1$, $s\geq 1$)

$p=p'+1$, $q=q'+1$, $r=r'+1$, $s=s'+1$

이라고 두면

$p'+r'=2$, $q'+s'=1$

(단, $p'\geq 0$, $q'\geq 0$, $r'\geq 0$, $s'\geq 0$)

경로의 수는

${}_2H_2\times{}_2H_1={}_3C_2\times{}_2C_1=6$

(2) 경우2: ↑→↑→ (즉, ↑으로 시작)

마찬가지의 방법으로 경로의 수는

${}_2H_2\times{}_2H_1={}_3C_2\times{}_2C_1=6$

따라서 구하는 경로의 수는

$6+6=12$

답 12

J. 경우의 수: 함수의 개수

• 순열, 중복순열, 조합, 중복조합: 함수의 개수

함수의 개수를 구하는 대표적인 문제들을 풀어보자.

예제 1

두 집합 $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 집합 A에서 집합 B로의 함수 f 중에서 다음을 만족시키는 함수의 개수를 구하여라.

(1) f는 함수이다.

(2) f는 일대일 함수이다.

(3) $f(1)<f(2)$

(4) $f(1)\leq f(2)$

풀이

(1) $f(1)$, $f(2)$가 가질 수 있는 값을 표로 정리하면 다음과 같다.

$f(1)$	$f(2)$
1, 2, 3	1, 2, 3

따라서 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

(2) $f(1)$, $f(2)$가 가질 수 있는 값을 표로 정리하면 다음과 같다.

$f(1)$	$f(2)$
$\boxed{1}$, 2, 3	$\cancel{1}$, 2, 3

예를 들어 $f(1)=1$이면 $f(2)\neq 1$이므로 $f(2)$가 가질 수 있는 값은 2 또는 3이다.

따라서 일대일 함수 f의 개수는

${}_3P_2=3\times 2=6$

(3) 집합 B의 원소 1, 2, 3 중에서 서로 다른 두 수 a, b를 택하자. (단, $a<b$)

$f(1)=a$, $f(2)=b$

로 두면 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.

따라서 함수 f의 개수는

$${}_3C_2=\frac{3\times 2}{1\times 2}=3$$

(4) 집합 B의 원소 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 두 수 a, b를 택하자. (단, $a\leq b$)

$f(1)=a,\ f(2)=b$

로 두면 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.

따라서 함수 f의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times 3}{1\times 2}=6$$

답 (1) 9 (2) 6 (3) 3 (4) 6

예제 2

두 집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r\},\ B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$

에 대하여 집합 A에서 집합 B로의 함수 f 중에서 다음을 만족시키는 함수의 개수를 구하여라. (단, $1\le r\le n$)

(1) f는 함수이다.

(2) f는 일대일 함수이다.

(3) 정의역 A의 서로 다른 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

(4) $f(1)\le f(2)\le\ \cdots\ \le f(r)$

풀이

(1) r 이하의 자연수 k에 대하여 $f(k)$가 가질 수 있는 값은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 중의 하나이다. 따라서 함수 f의 개수는

${}_n\Pi_r=n^r$

(2) $f(1)$이 가질 수 있는 값은

$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ (n개)

중의 하나이다.

예를 들어 $f(1)=2$라고 하자.

이때, $f(2)$가 가질 수 있는 값은

$1,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n$ ($n-1$개)

중의 하나이다.

예를 들어 $f(2)=n$이라고 하자.

이때, $f(3)$이 가질 수 있는 값은

$1,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n-1$ ($n-2$개)

중의 하나이다.

$\vdots$

마지막으로 $f(r)$이 가질 수 있는 값은 유일하게 결정된다.

요컨대 $f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(r)$의 순서대로 대응되는 값을 결정하는 방법의 수는 $n,\ n-1,\ n-2,\ \cdots,\ n-r+1$이다.

따라서 함수 f의 개수는

${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\ \cdots\ (n-r+1)$

(3) 집합 B의 원소 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 중에서 서로 다른 r개의 수 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_r$을 택하자.

(단, $b_1<b_2<\ \cdots\ <b_r$)

$f(k)=b_k$ (단, $1\le k\le r$)

로 두면 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.

따라서 함수 f의 개수는 ${}_n\mathrm{C}_r$이다.

(4) 집합 B의 원소 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 중에서 중복을 허락하여 r개의 수 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_r$을 택하자.

(단, $b_1\le b_2\le\ \cdots\ \le b_r$)

$f(k)=b_k$ (단, $1\le k\le r$)

로 두면 문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.

따라서 함수 f의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다.

답 (1) ${}_n\Pi_r$ (2) ${}_n\mathrm{P}_r$ (3) ${}_n\mathrm{C}_r$ (4) ${}_n\mathrm{H}_r$

예제 3

두 집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\},\ B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r\}$

에 대하여 집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수를 구하여라. (단, n과 r은 자연수이고, $f(A)=B$이다.)

(1) $n(B)=2$ (즉, $r=2$)

(2) $n(B)=3$ (즉, $r=3$)

(3) $n(B)=4$ (즉, $r=4$)

(4) $n(A)=4,\ n(B)=3$ (즉, $n=4,\ r=3$)

(5) $n(A)=5,\ n(B)=3$ (즉, $n=5,\ r=3$)

(6) $n(A)=6,\ n(B)=4$ (즉, $n=6,\ r=4$)

풀이

$f(A)=B$이므로 함수 f의 치역과 공역은 같다.

(1) 주어진 조건에서

$f(A)=B=\{1,\ 2\}$ (치역=공역)

함수 f의 개수는

${}_2\Pi_n-2=2^n-2$

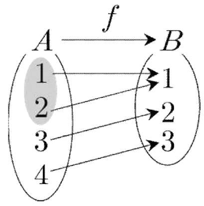
이다. 이때, 2^n은 전체 함수 f의 개수이고, 뺀 2는 다음의 두 함수이다.

$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=1,$

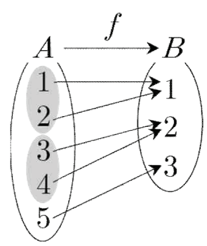
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=2$

(2) 주어진 조건에서

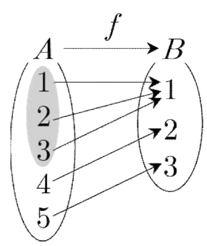
$f(A)=B=\{1,\ 2,\ 3\}$ (치역=공역)
전체 함수 f의 개수는 ${}_3\Pi_n$이다.
치역의 원소의 개수가 1인 함수 f의 개수는 3이다.
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=1$,
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=2$,
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=3$
치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수는
${}_3C_2(2^n-2)$
이때, ${}_3C_2$는 치역의 원소를 택하는 방법의 수이고, 2^n-1은 원소의 개수가 n인 정의역에서 원소의 개수가 2인 공역(=치역)으로의 함수의 개수이다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_3\Pi_n-\left\{3+{}_3C_2(2^n-2)\right\}$
$=3^n-3\cdot 2^n+3$
(3) 주어진 조건에서
$f(A)=B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ (치역=공역)
전체 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_n$이다.
치역의 원소의 개수가 1인 함수 f의 개수는 4이다.
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=1$,
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=2$,
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=3$,
$f(1)=f(2)=\ \cdots\ =f(n)=4$
치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수는
${}_4C_2(2^n-2)$
이때, ${}_4C_2$는 치역의 원소를 택하는 방법의 수이고, 2^n-1은 원소의 개수가 n인 정의역에서 원소의 개수가 2인 공역(=치역)으로의 함수의 개수이다.
치역의 원소의 개수가 3인 함수 f의 개수는
${}_4C_3\left[3^n-\left\{3+{}_3C_2(2^n-2)\right\}\right]$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_4\Pi_n-4-{}_4C_2(2^n-2)-{}_4C_3\left[3^n-\left\{3+{}_3C_2(2^n-2)\right\}\right]$
$=4^n-4\cdot 3^n+3\cdot 2^{n+1}-4$
(4) 주어진 조건에서
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$
이고, $f(A)=B$ (공역=치역)이다.



집합 A를 원소의 개수가 각각 2, 1, 1인 세 집합으로 분할하는 방법의 수는
${}_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot\dfrac{1}{2!}={}_4C_2$
이 세 집합을 집합 B의 세 원소 1, 2, 3에 대응시키는 방법의 수는
$3!$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_4C_2\times 3!=36$
(5) 주어진 조건에서
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$
이고, $f(A)=B$ (공역=치역)이다.

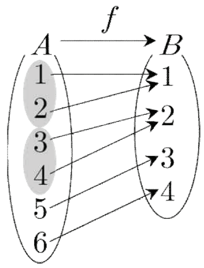


집합 A를 원소의 개수가 각각 2, 2, 1인 세 집합으로 분할하는 방법의 수는
${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot\dfrac{1}{2!}$
이 세 집합을 집합 B의 세 원소 1, 2, 3에 대응시키는 방법의 수는
$3!$



집합 A를 원소의 개수가 각각 3, 1, 1인 세 집합으로 분할하는 방법의 수는
${}_5C_3\cdot{}_2C_1\cdot\dfrac{1}{2!}$
이 세 집합을 집합 B의 세 원소 1, 2, 3에 대응시키는 방법의 수는
$3!$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot 3!+{}_5C_3\cdot{}_2C_1\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot 3!$
$=90+60=150$
(6) 주어진 조건에서

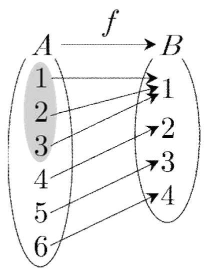
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$,
$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$
이고, $f(A)=B$ (공역=치역)이다.



집합 A를 원소의 개수가 각각 2, 2, 1, 1인 네 집합으로 분할하는 방법의 수는

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!}$$

이 세 집합을 집합 B의 세 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 방법의 수는
$4!$



집합 A를 원소의 개수가 각각 3, 1, 1, 1인 네 집합으로 분할하는 방법의 수는

$${}_6C_3 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot \frac{1}{3!}$$

이 세 집합을 집합 B의 세 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 방법의 수는
$4!$
따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$\frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_1}{2!2!} \cdot 4! + \frac{{}_6C_3 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{3!} \cdot 4!$$
$=1560$

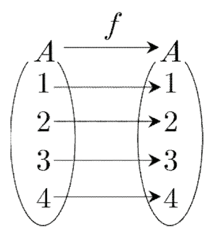
답 (1) 2^n-2 (2) $3^n-3\cdot 2^n+3$
(3) $4^n-4\cdot 3^n+3\cdot 2^{n+1}-4$
(4) 36 (5) 150 (6) 1560

예제 4

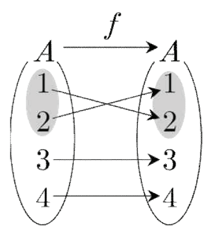
집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 집합 A에서 집합 A로의 일대일대응 f 중에서 다음을 만족시키는 함수의 개수를 구하여라.
정의역 A의 모든 x에 대하여 $f(f(x))=x$이다.

풀이

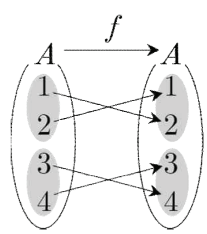
정의역 A의 두 원소 a, b에 대하여
$f(a)=b$
라고 하면
$f(f(a))=f(b)=a$, 즉 $f(b)=a$
이다.
$a=b$이면 $f(a)=a(=b)$
$a\neq b$이면 $f(a)=b$, $f(b)=a$
(1) $f(a)=a$인 a가 4개인 경우



함수 f의 개수는 1이다.
(2) $f(a)=a$인 a가 2개인 경우



함수 f의 개수는 ${}_4C_2=6$이다.
(3) $f(a)=a$인 a가 존재하지 않는 경우



함수 f의 개수는 ${}_4C_2 \cdot \dfrac{1}{2!}=3$이다.
(1), (2), (3)에서 구하는 함수 f의 개수는

$$1+{}_4C_2+\frac{{}_4C_2}{2!}=1+6+3=10$$

답 10

N016

(2024-기하30)

좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 1 : 3으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{DP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{EQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{FR}}| = 1$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{AX}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}} + \overrightarrow{\mathrm{RA}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오. [4점]

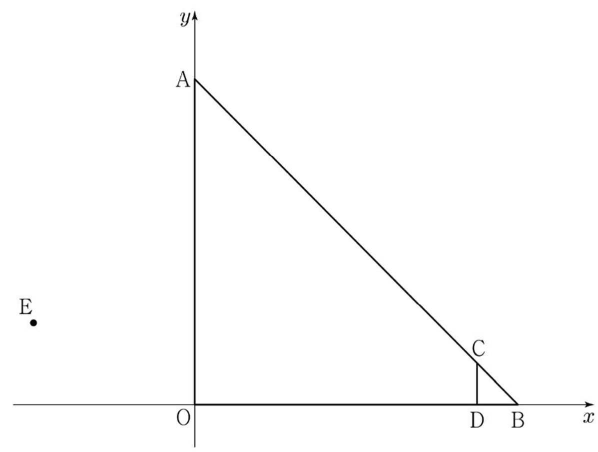
N017

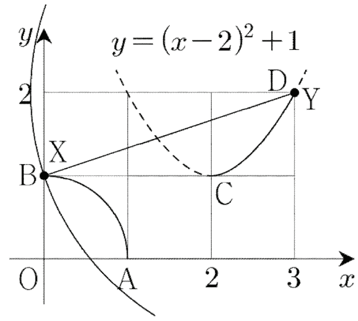
(2025(9)-기하30)

좌표평면 위에 다섯 점

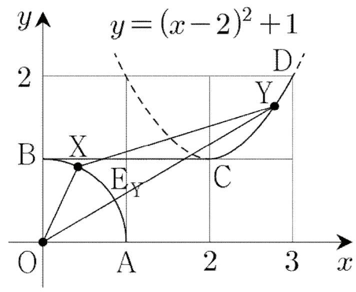
A(0, 8), B(8, 0), C(7, 1), D(7, 0), E(−4, 2)

가 있다. 삼각형 AOB의 변 위를 움직이는 점 P와 삼각형 CDB의 변 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

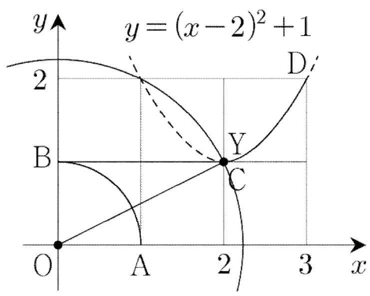




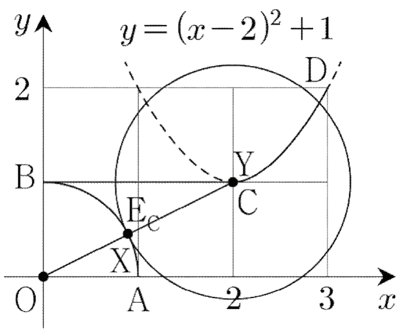
$\overline{\mathrm{XD}} \le \overline{\mathrm{BD}}$ $\cdots$ ㉡
(단, 등호는 점 X가 점 B 위에 있을 때 성립한다.)
㉠, ㉡에 의하여
$\overline{\mathrm{XY}} \le \overline{\mathrm{BD}}\,(=M)$
(단, 등호는 점 X가 점 B 위에, 점 Y가 점 D 위에 있을 때 성립한다.)
따라서 $M=\sqrt{10}$ 이다.



위의 그림처럼 직선 OY가 호 AB와 만나는 점을 $\mathrm{E_Y}$라고 하자.
$\overline{\mathrm{XY}} \ge \overline{\mathrm{E_YY}} = \overline{\mathrm{OY}} - \overline{\mathrm{OE_Y}} = \overline{\mathrm{OY}} - 1$
(단, 등호는 점 X가 점 $\mathrm{E_Y}$ 위에 있을 때 성립한다.)

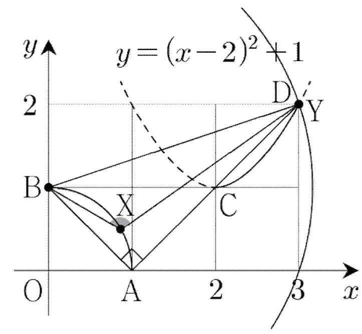


위의 그림처럼 점 Y가 점 C 위에 있을 때 선분 OY의 길이는 최소가 된다.



$\overline{\mathrm{XY}} \ge \overline{\mathrm{E_CC}} = \overline{\mathrm{OC}} - \overline{\mathrm{OE_C}} = \sqrt{5}-1\,(=m)$
(단, 등호는 점 Y가 점 C 위에, 점 X가 점 $\mathrm{E_C}$ 위에 있을 때 성립한다.)
따라서 $m=\sqrt{5}-1$이다.
$\therefore\ M^2+m^2=16-2\sqrt{5}$
답 ①

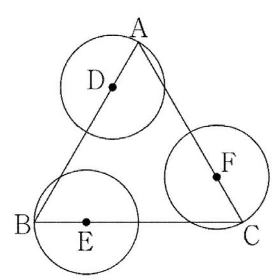
[참고]
부등식
$\overline{\mathrm{XD}} \le \overline{\mathrm{BD}}$
(단, 등호는 점 X가 점 B 위에 있을 때 성립한다.)
이 성립함을 다음과 같이 증명해도 좋다.



점 X는 ‘점 A’ 또는 ‘점 B’ 또는 ‘$\angle \mathrm{BAD}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 BAD의 내부의 점’ 이므로
$\angle \mathrm{BXD} \ge \angle \mathrm{BAD}\left(=\frac{\pi}{2}\right)$
(단, 등호는 점 X가 점 A 위에 있을 때 성립한다.)
즉, $\angle \mathrm{BXD}$가 직각 또는 둔각이므로
$\overline{\mathrm{XD}} \le \overline{\mathrm{BD}}$
(단, 등호는 점 X가 점 B 위에 있을 때 성립한다.)

N016 |답 147

[풀이]



(가): 점 P는 중심이 D이고, 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.
점 Q는 중심이 E이고, 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.
점 R는 중심이 F이고, 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.

(나): $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DB}$,

$\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{EC}$,

$\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{FA}$

위의 세 등식을 변변히 더하면

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{RA}$

$=(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{RF})+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FA})$

$=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{RF}(=\overrightarrow{AX})$

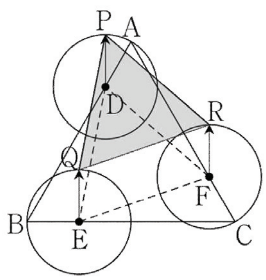
$(\because \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FA}=\vec{0})$

이므로

$|\overrightarrow{AX}|=|\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{RF}|$

$=|\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{FR}|\le 3$

(단, 등호는 세 벡터 $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{EQ}$, $\overrightarrow{FR}$의 방향이 모두 같을 때 성립한다.(아래 그림))



위의 그림처럼 두 삼각형 DEF, PQR은 서로 합동이다.

삼각형 ADF에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DF}^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos60^\circ$

$=7$, $\overline{DF}=\sqrt{7}$

$\therefore\ 16S^2=16\times\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{4}\right)^2=147$

답 147

N017 | 답 54

[풀이]

점 E를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 E′(4, −2)라고 하자.

$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OE}$

$=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OE'}$

$=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OE'}-\overrightarrow{OP}$

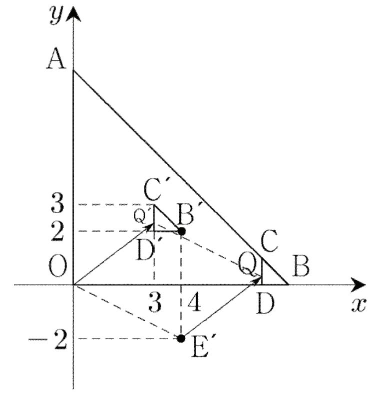
$=\overrightarrow{E'Q}-\overrightarrow{OP}$

(이때, $\overrightarrow{E'Q}/\!/\overrightarrow{OQ'}$이 되는 점 Q′를 생각하자.)

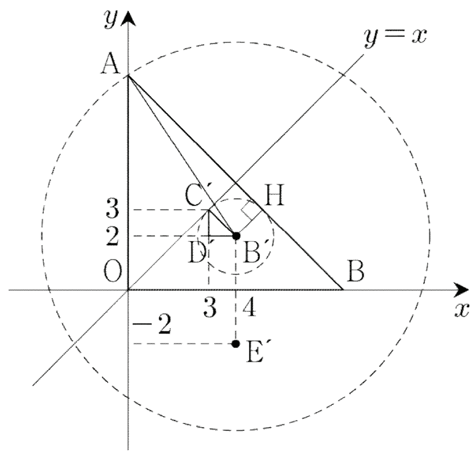
$=\overrightarrow{OQ'}-\overrightarrow{OP}$

$=\overrightarrow{PQ'}$

아래 그림에서 삼각형 C′D′B′는 삼각형 CDB를 x축의 방향으로 −4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. 이때, 점 Q′는 삼각형 C′D′B′의 변 위를 움직인다.



점 B′에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



위의 그림에서

$\sqrt{2}=|\overrightarrow{HB'}|\le|\overrightarrow{PQ'}|\le|\overrightarrow{AB'}|=\sqrt{52}$

$\therefore\ M+m=54$

답 54

N018 | 답 8

[풀이]

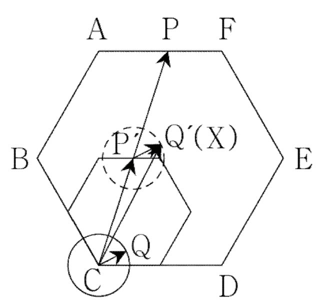
(가):

두 점 P′, Q′에 대하여

$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CP'}$, $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{P'Q'}$

라고 하면

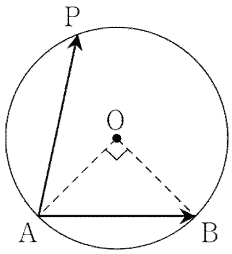
$\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CQ'}$



N. 벡터의 내적: 최대최소(상수변수)

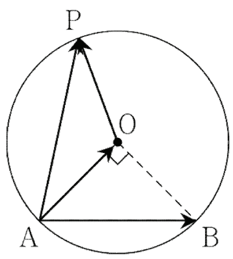
예제 1

반지름의 길이가 1인 원 O 위의 두 정점 A, B에 대하여 $\angle AOB = 90^\circ$ 이다.



원 O 위의 동점 P에 대하여 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풀이1



벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}$

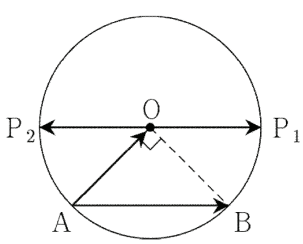
벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})$

$=\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}}_{\text{일정한 값}}+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}}_{\text{변하는 값}}$

$=1+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}}_{\text{변하는 값}}$ $\cdots(*)$

아래 그림처럼 점 O를 지나고 직선 AB에 평행한 직선이 원 O와 만나는 두 점을 각각 P_1, P_2라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

$-\sqrt{2}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP_2}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\sqrt{2}$

이를 (*)에 대입하면

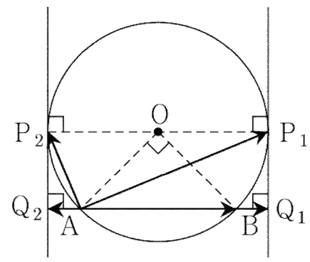
$1-\sqrt{2}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\le 1+\sqrt{2}$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때 성립한다.)

답 최댓값: $1+\sqrt{2}$, 최솟값 $1-\sqrt{2}$

풀이2

아래 그림처럼 원 O에 접하면서 직선 AB에 수직인 두 직선을 그린다. 이때, 두 접점을 각각 P_1, P_2, 두 접선이 직선 AB와 만나는 두 점을 각각 Q_1, Q_2라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_2}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}$

그런데

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ_1}=\sqrt{2}\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_2}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ_2}=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=1-\sqrt{2}$$

이므로

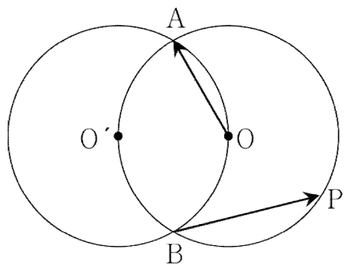
$1-\sqrt{2}\le\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\le 1+\sqrt{2}$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때 성립한다.)

답 최댓값: $1+\sqrt{2}$, 최솟값 $1-\sqrt{2}$

예제 2

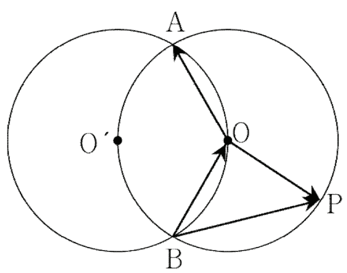
아래 그림처럼 반지름의 길이가 1로 같은 두 원 O, O'이 서로의 중심을 지날 때 생기는 두 교점을 각각 A, B라고 하자.



점 P가 두 원 O, O'의 둘레 위를 움직일 때, 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BP}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

풀이1

(1) 점 P가 원 O 위에 있을 경우



벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP}$

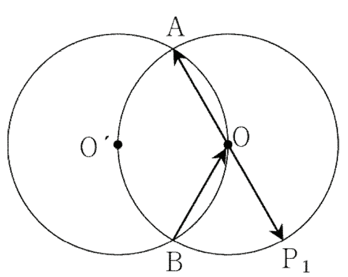
벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OP})$

$=\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BO}}_{\text{일정한 값}}+\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}_{\text{변하는 값}}$

$=\dfrac{1}{2}+\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}_{\text{변하는 값}}$ $\cdots(*1)$

아래 그림처럼 직선 OA가 원 O와 만나는 두 점 중에서 A가 아닌 점을 P_1라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

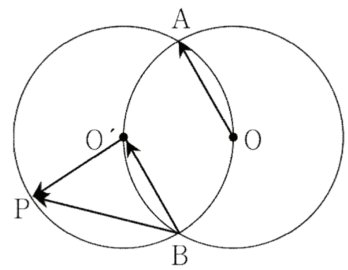
$-1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=1$

이를 (*1)에 대입하면

$-\dfrac{1}{2}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BP}\le\dfrac{3}{2}$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 A 위에 올 때 성립한다.)

(2) 점 P가 원 O' 위에 있을 경우



벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BO'}+\overrightarrow{O'P}$

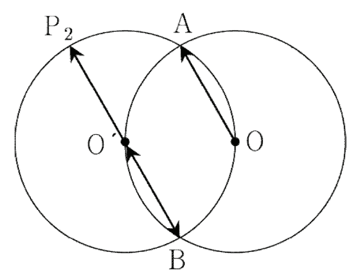
벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{BO'}+\overrightarrow{O'P})$

$=\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BO'}}_{\text{일정한 값}}+\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'P}}_{\text{변하는 값}}$

$=1+\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'P}}_{\text{변하는 값}}$ $\cdots(*2)$

아래 그림처럼 직선 O′B가 원 O'과 만나는 두 점 중에서 B가 아닌 점을 P_2라고 하자.



벡터의 내적의 정의에 의하여

$-1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'B}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'P}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'P_2}=1$

이를 (*2)에 대입하면

$0\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BP}\le 2$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 B 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때 성립한다.)

(1), (2)에 의하여

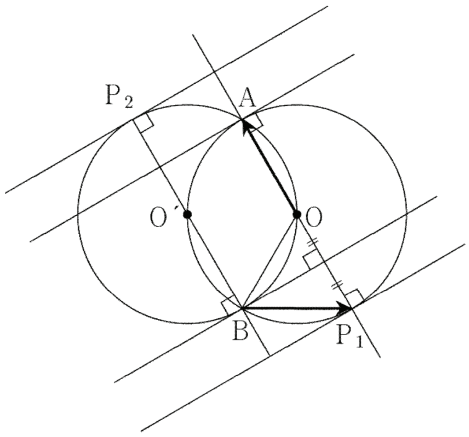
$\therefore\ -\dfrac{1}{2}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BP}\le 2$

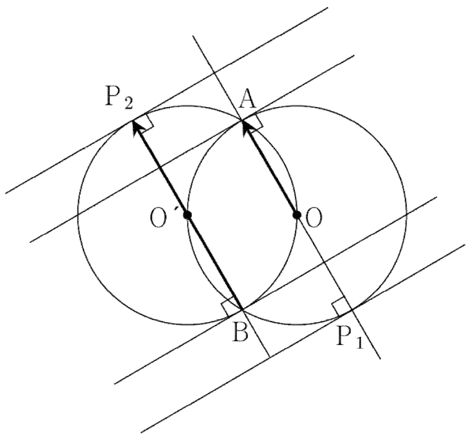
답 최댓값: 2, 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$

풀이2

아래 그림처럼 원 O에 접하면서 직선 OA에 수직인 두 직

선을 그린다. 이때, 점 A는 접점이 되고, 나머지 한 접점을 P_1이라고 하자. 그리고 원 O'에 접하면서 직선 OA에 수직인 두 직선을 그린다. 이때, 점 B는 접점이 되고, 나머지 한 접점을 P_2라고 하자.





벡터의 내적의 정의에 의하여

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}_1} \le \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} \le \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}_2}$

그런데

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}_2} = 1 \times 2 = 2$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}_1} = -1 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

이므로

$-\dfrac{1}{2} \le \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} \le 2$

(단, 왼쪽 등호는 점 P가 점 P_1 위에 올 때, 오른쪽 등호는 점 P가 점 P_2 위에 올 때 성립한다.)

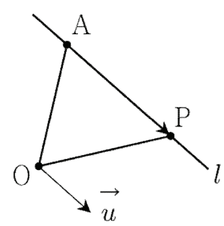
답 최댓값: 2, 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$

N. 직선

• 방향벡터

좌표평면에서의 직선의 방정식(방향벡터)을 정리하면 아래 표와 같다.

좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (u_1,\ u_2)$인 직선을 l이라고 하자. (단, $u_1 u_2 \neq 0$)

직선 l (방향벡터)	
	
정의	$\overrightarrow{\mathrm{AP}} // \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{u}$
벡터 방정식	$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$
매개변수에 의한 표현	$x = x_1 + tu_1,\ y = y_1 + tu_2$
음함수 표현	$\dfrac{x - x_1}{u_1} = \dfrac{y - y_1}{u_2}$ (단, $u_1 u_2 \neq 0$)

(단, t는 실수이고, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$이다.)

A083

○○○
(2009(7)고3-가형13)

정의역이 $x<4$인 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$) [3점]

ㄱ. $x_1+x_2>0$
ㄴ. $x_1y_1+x_2y_2<0$
ㄷ. $|x_1y_2|-|x_2y_1|>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A084

○○○
(2020(10)고3-나형21)

두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

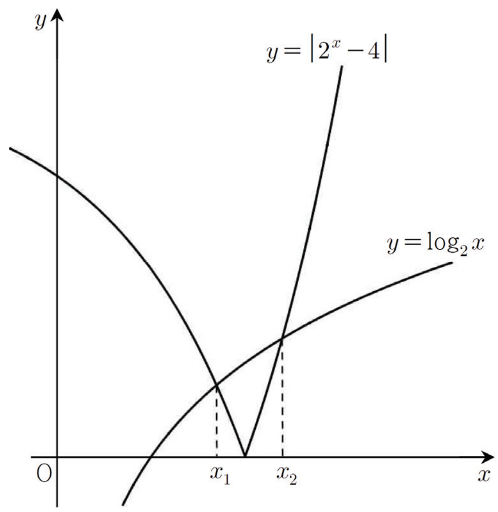
ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$
ㄴ. $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$
ㄷ. $y_1-y_2<\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A085

●●●
(2021사관(1차)-나형21)

두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$
ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$
ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A086

●●●
(2022(5)고2-공통20)

$1<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프가 만나는 점을 $\mathrm{A}(p,\ q)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $pq=1$
ㄴ. $a=2$일 때, $p>\sqrt{2}$이다.
ㄷ. 원점 O와 점 $\mathrm{B}(p+q,\ 0)$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이를 $S(p)$라 할 때, $S(p)<\frac{a+1}{2a}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A080 | 답 ⑤

[풀이]

네 점 A, B, C, D의 좌표를 구하면

$\mathrm{A}(\log_2 a,\ a)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}\log_2 a,\ a\right)$,

$\mathrm{C}\left(-\log_2 b,\ \frac{1}{b}\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\log_2 b,\ \frac{1}{b}\right)$

▸ ㄱ. (참)

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{3}{2}\log_2 a$, $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{3}{2}\log_2 b$

이므로 $a=b$이면

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$

▸ ㄴ. (참)

$$m_1=\frac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab},\ m_2=\frac{2\left(\frac{1}{b}-a\right)}{\log_2 ab}$$

$\therefore\ 2m_1+m_2=0$

▸ ㄷ. (참)

두 직선 AC와 BD가 서로 수직이므로

$$\frac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}\times\frac{2\left(\frac{1}{b}-a\right)}{\log_2 ab}=-1$$

즉, $\left(\frac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}\right)^2=\frac{1}{2}$, $\frac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cdots$㉠

(직선 AD의 기울기)$=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2\frac{a}{\sqrt{b}}}=2\sqrt{2}$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$$\frac{\log_2 ab}{\log_2\frac{a}{\sqrt{b}}}=4,\ \log_2 a=\log_2 b,\ a=b$$

네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(\log_2 a,\ a)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}\log_2 a,\ a\right)$,

$\mathrm{C}\left(-\log_2 a,\ \frac{1}{a}\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\log_2 a,\ \frac{1}{a}\right)$

두 선분 AC, BD의 중점은 모두

$$\left(0,\ \frac{a+\frac{1}{a}}{2}\right)$$

이므로 사각형 ABCD는 마름모이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

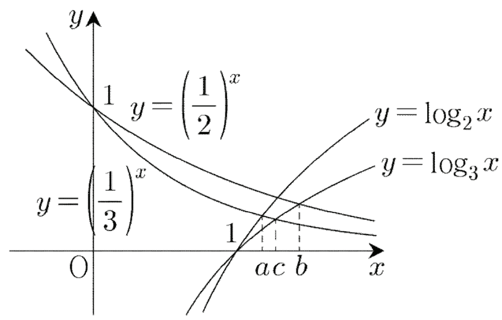
A081 | 답 ②

[풀이]

네 함수

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$

의 그래프를 한 평면 위에 그리면 아래 그림과 같다.



답 ②

A082 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

점 $(d,\ c)$는 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 위에 있으므로

$c=\left(\frac{1}{2}\right)^d$

▸ ㄴ. (참)

점 $(e,\ d)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 있고,

점 $(a,\ e)$는 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 위에 있으므로

$d=\log_2 e$, $e=\left(\frac{1}{2}\right)^a (\Leftrightarrow a=-\log_2 e)$

$\therefore\ a+d=0$

▸ ㄷ. (참)

$ce=\left(\frac{1}{2}\right)^d\left(\frac{1}{2}\right)^a=2^{-(a+d)}=1$

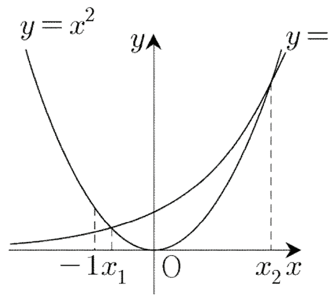
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A083 | 답 ③

[풀이]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



▸ ㄱ. (참)

$-1<x_1<0$, $x_2=2$이므로

$x_1+x_2>0$

▸ ㄴ. (거짓)

$-1<x_1y_1=x_1^3<0$이고,

$x_2y_2=2\times4=8$이므로

$x_1y_1+x_2y_2>0$

▸ ㄷ. (참)

$|x_1y_2|-|x_2y_1|$

$=|x_1x_2^2|-|x_2x_1^2|$

$=|x_1x_2|(|x_2|-|x_1|)>0$

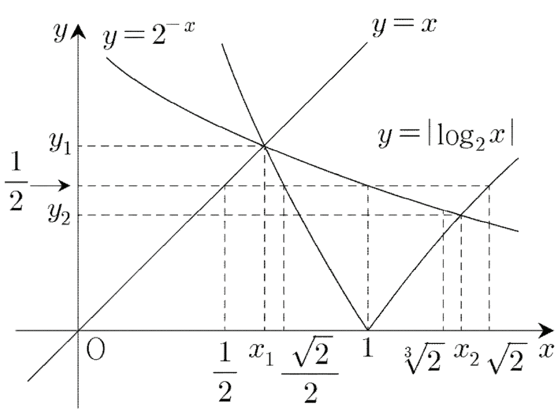
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A084 |답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 두 함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)

$2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1=\left|\log_2\frac{1}{2}\right|$,

$2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}>\frac{1}{2}=\left|\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$

이므로 위의 그림처럼

∴ $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

▸ ㄴ. (참)

$2^{-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}>\frac{1}{3}=\left|\log_2\sqrt[3]{2}\right|$,

$\left(\because\ 2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}<3\right.$, 이때 $\left.2<\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)$

$2^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}<\frac{1}{2}=\left|\log_2\sqrt{2}\right|$

$(\because\ 2^1<2^{\sqrt{2}})$

이므로 위의 그림처럼

∴ $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$

▸ ㄷ. (참)

$x_1=y_1$이므로 ㄱ에서

$\frac{1}{2}<y_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_2=\log_2 x_2$이므로 ㄴ에서

$\frac{1}{3}<y_2<\frac{1}{2}$

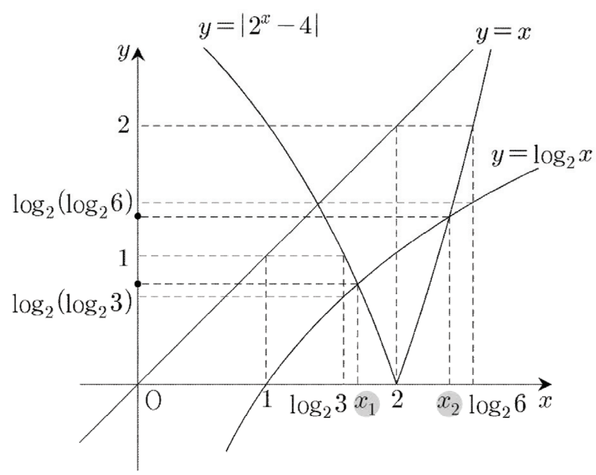
∴ $y_1-y_2<\frac{3\sqrt{2}-2}{6}\left(=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\right)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A085 |답 ②

[풀이]



▸ ㄱ. (참)

위의 그림처럼

$x=\log_2 3$일 때, $|2^x-4|>\log_2 x$이고,

$x=2$일 때, $|2^x-4|<\log_2 x$이므로

$\log_2 3<x_1<2$

마찬가지의 방법으로

$2<x_2<\log_2 6$

∴ $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$

▸ ㄴ. (참)

위의 그림에서

$x_2 - x_1 < \log_2 6 - \log_2 3 = 1$

한편

$\log_2(\log_2 3) < 4 - 2^{x_1} < 1$, $\cdots$㉠

$1 < 2^{x_2} - 4 < \log_2(\log_2 6)$ $\cdots$㉡

위의 두 부등식을 변변히 합하면

$1 + \log_2(\log_2 3) < 2^{x_2} - 2^{x_1} < 1 + \log_2(\log_2 6)$

즉, $2^{x_2} - 2^{x_1} < \log_2(2\log_2 6)$

$(x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < 1 \times \log_2(2\log_2 6) < 3$

($\because$ $6 < 16$, $\log_2 6 < 4$, $2\log_2 6 < 8$,

$\log_2(2\log_2 6) < 3$)

$\therefore$ $(x_2 - x_1)(2^{x_2} - 2^{x_1}) < 3$

▸ ㄷ. (거짓)

위의 그림에서

㉡$-$㉠:

$2^{x_1} + 2^{x_2} - 8 < \log_2(\log_2 6) - \log_2(\log_2 3)$

즉, $2^{x_1} + 2^{x_2} < 8 + \log_2(\log_3 6)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

A086 | 답 ⑤

[풀이]

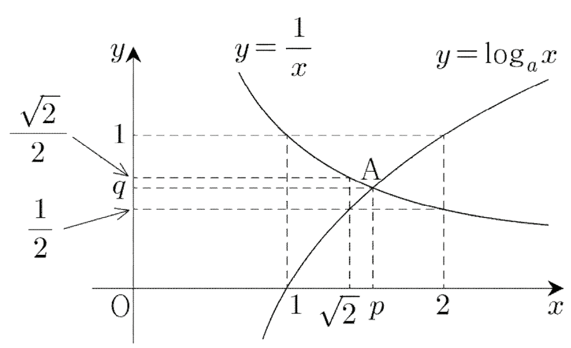
▸ ㄱ. (참)

점 A가 곡선 $y = \dfrac{1}{x}$ 위에 있으므로

$q = \dfrac{1}{p}$ $\therefore$ $pq = 1$

▸ ㄴ. (참)

$a = 2$일 때, 문제에서 주어진 두 곡선을 한 평면에 그리면



위의 그림에서 $p > \sqrt{2}$이다.

▸ ㄷ. (참)

점 A는 곡선 $y = \log_a x$ 위에 있으므로

$q = \log_a p$, $p = a^q$, $p = a^{\frac{1}{p}}$ ($\because$ ㄱ),

$a = p^p < p^2$ ($\because$ $1 < p < 2$)

$S(p) = \dfrac{1}{2}(p+q)q = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}q^2$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2p^2} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2a} = \dfrac{a+1}{2a}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A087 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

두 곡선 $y = \log_2(-kx)$, $y = \log_2(x+4)$의 방정식을 연립하면

$\log_2(-kx) = \log_2(x+4)$, $-kx = x+4$, $x_1 = -\dfrac{4}{k+1}$

두 곡선 $y = \log_2 kx$, $y = \log_2(x+4)$의 방정식을 연립하면

$\log_2 kx = \log_2(x+4)$, $kx = x+4$, $x_2 = \dfrac{4}{k-1}$

$x_2 = -2x_1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{k-1} = \dfrac{8}{k+1}$

$\therefore$ $k = 3$

▸ ㄴ. (참)

두 곡선 $y = \log_2(-x+m)$, $y = \log_2(x+4)$의 방정식을 연립하면

$\log_2(-x+m) = \log_2(x+4)$, $-x+m = x+4$,

$x_2 = \dfrac{m-4}{2}$

$\dfrac{m-4}{2} = \dfrac{4}{k-1}(= x_2)$에서 $m = \dfrac{4k+4}{k-1}$

두 곡선 $y = \log_2(-kx)$, $y = \log_2(-x+m)$의 방정식을 연립하면

$\log_2(-kx) = \log_2(-x+m)$, $-kx = -x+m$,

$x_3 = \dfrac{m}{1-k} = -\dfrac{4k+4}{(k-1)^2}$

$x_2^2 = \left(\dfrac{4}{k-1}\right)^2$,

$x_1 x_3 = -\dfrac{4}{k+1} \times \dfrac{-(4k+4)}{(k-1)^2} = \left(\dfrac{4}{k-1}\right)^2$

$\therefore$ $x_2^2 = x_1 x_3$

▸ ㄷ. (거짓)

세 수 x_1, x_2, x_3은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

이 등비수열의 공비를 $r(<0)$이라고 하자.

(직선 AB의 기울기)+(직선 AC의 기울기)

E048

○○○ (2025사관(1차)-확률과통계20/미적분20/기하20)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와
함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(8)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $y=f'(x)$의 그래프는
> 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=5$에서 미분가능하고,
> 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(5,\ g(5))$에서의 접선은
> 곡선 $y=g(x)$와 점 $(0,\ g(0))$에서 접한다.

E049

●●● (2011(3)고3-가형18)

곡선 $y=x^3-3x^2+2x$에 기울기가 m인 접선을 두 개 그었을 때, 두 접점을 P, Q라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, P, Q는 서로 다른 점이다.) [4점]

> ㄱ. 두 점 P, Q의 x좌표의 합은 2이다.
> ㄴ. $m>-1$
> ㄷ. 두 접선 사이의 거리와 $\overline{PQ}$가 같아지는 실수 m이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

E. 삼차함수의 그래프

주제:

E050

○○ (2013(10)고3-A형20)

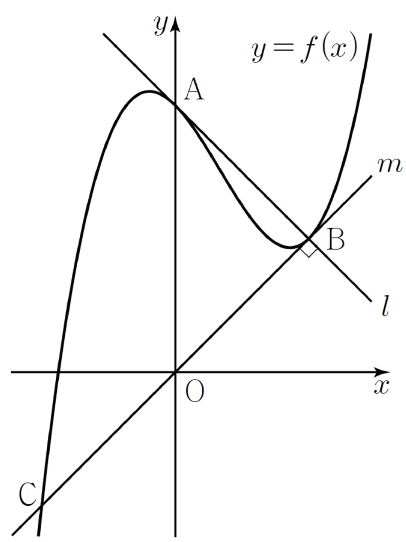
삼차함수 $f(x)=x^3+ax$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(-1,\ -1-a)$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 다른 한 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 이 곡선과 만나는 다른 한 점을 C라 하자. 두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c라 할 때, $f(b)+f(c)=-80$을 만족시킨다. 상수 a의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

E051

●●● (2016사관(1차)-A형21)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식이 $y=x$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는? (단, $f(0)>0$이다.) [4점]



① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

이 직선과 곡선 $y=f(x)$의 방정식을 연립하면

$x^3+ax=(12+a)x-16$, $x^3-12x+16=0$,

$(x-2)^2(x+4)=0$ 풀면 $x=2$ 또는 $x=-4$

$C(-4,\ -64-4a)$

그러므로

$b=2$, $c=-4$

$\therefore\ f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)$

$=8+2a-64-4a=-2a-56=-80$

$\therefore\ a=12$

답 ③

[풀이2] 시험장

삼차함수의 비율관계를 이용하면 문제를 빠르게 해결할 수 있다.

삼차함수의 비율관계에 의하여

점 B의 x좌표는 $2\times|$점 A의 x좌표$|=2$이고,

점 C의 x좌표는 $-2\times$(점 B의 x좌표)$=-4$이다.

$\therefore\ f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)$

$=8+2a-64-4a=-2a-56=-80$

$\therefore\ a=12$

답 ③

E051 | 답 ②

[풀이1] ★

점 B의 x좌표를 α로 두자.

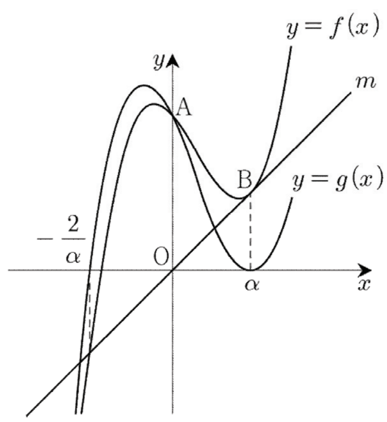
직선 m의 방정식이 $y=x$이므로

직선 l의 방정식은 $y=-x+2\alpha$이다.

그리고 점 A의 좌표는 $(0,\ 2\alpha)$이다.

함수 $g(x)$를 다음과 같이 두자.

$g(x)=f(x)-x$



직선 m이 점 B에서 곡선 $y=f(x)$에 접하므로

$g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=\alpha-\alpha=0$,

$g'(\alpha)=f'(\alpha)-1=1-1=0$

즉, $g(\alpha)=g'(\alpha)=0$

인수정리에 의하여

$g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ (단, $\beta<0$)

곡선 $y=f(x)$가 점 A를 지나므로

$f(0)=2\alpha$

$g(0)=f(0)-0$ 즉, $-\alpha^2\beta=2\alpha$

정리하면 $\beta=-\dfrac{2}{\alpha}$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x-\alpha)^2\left(x+\dfrac{2}{\alpha}\right)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-\alpha)^2\left(x+\dfrac{2}{\alpha}\right)+x$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-\alpha)\left(x+\dfrac{2}{\alpha}\right)+(x-\alpha)^2+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선 l의 기울기가 -1이므로

$f'(0)=-4+\alpha^2+1=-1$

α에 대한 이차방정식을 풀면

$\alpha=\sqrt{2}\ (\because \alpha>0)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})+x$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})+(x-\sqrt{2})^2+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $C(-\sqrt{2},\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$\therefore\ f'(-\sqrt{2})=9$

답 ②

[풀이2] ※ 아래는 이과생을 위한 풀이입니다. (문과생은 읽지 않아도 좋습니다.)

점 B의 x좌표를 α로 두자.

직선 m의 방정식이 $y=x$이므로

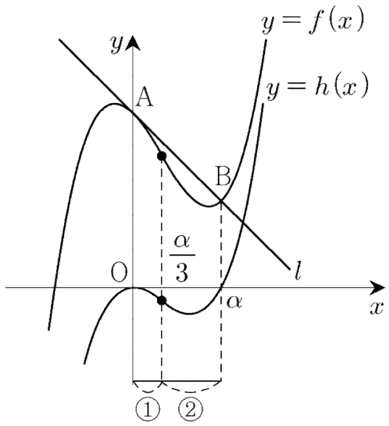
직선 l의 방정식은 $y=-x+2\alpha$이다.

그리고 점 A의 좌표는 $(0,\ 2\alpha)$이다.

두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 다음과 같이 두자.

$g(x)=f(x)-x$,

$h(x)=f(x)-(-x+2\alpha)$



(단, ●는 변곡점이다.)

곡선 $y=f(x)$가 점 A에서 직선 l에 접하므로

곡선 $y=h(x)$는 원점에서 x축에 접한다.

인수정리에 의하여

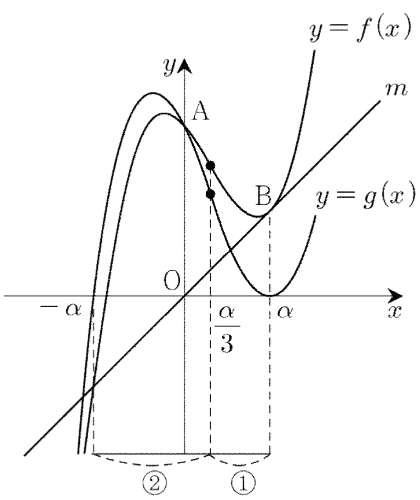
$h(x)=x^2(x-\alpha)$

삼차함수의 그래프의 비율관계에 의하여

(곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표)

=(곡선 $y=h(x)$의 변곡점의 x좌표)

$=\dfrac{2\times 0+1\times\alpha}{3}=\dfrac{\alpha}{3}$



(단, ●는 변곡점이다.)

곡선 $y=f(x)$가 점 B에서 직선 m에 접하므로

곡선 $y=g(x)$는 점 $(\alpha,\ 0)$에서 x축에 접한다.

인수정리에 의하여

$g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ (단, $\beta<0$)

삼차함수의 그래프의 비율관계에 의하여

(곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표)

=(곡선 $y=g(x)$의 변곡점의 x좌표)

즉, $\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{2\times\alpha+1\times\beta}{3}$

정리하면

$\beta=-\alpha$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x-\alpha)^2(x+\alpha)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-\alpha)^2(x+\alpha)+x$

곡선 $y=f(x)$가 점 A를 지나므로

$f(0)=\alpha^3=2\alpha$

풀면

$\alpha=\sqrt{2}\,(\because\ \alpha>0)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})+x$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})+(x-\sqrt{2})^2+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{C}(-\sqrt{2},\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$\therefore\ f'(-\sqrt{2})=9$

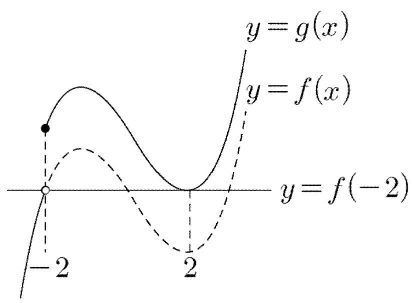
답 ②

E052

| 답 ③

[풀이]

아래 그림과 같이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 그려지면 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근은 2뿐이다. 이때, $f'(2)=0$, $g(2)=f(2)+8$(즉, $f(-2)-f(2)=8$)이다.



함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(-2)-f(2)=-16-4b=8,\ b=-6$

$f'(2)=12+4a+b=0,\ a=-\dfrac{3}{2}$

$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ 3x^2-3x-6=0,\ (x+1)(x-2)=0$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4를 갖는다.

답 ③

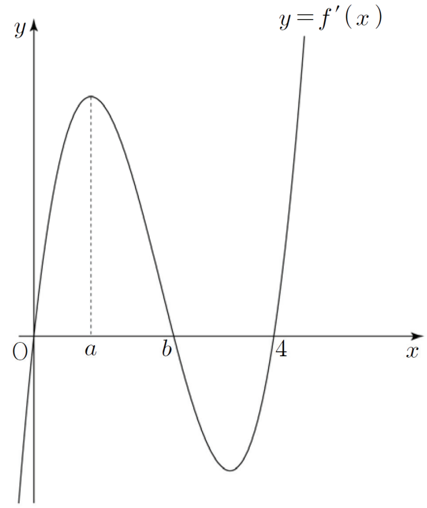
H. 그래프 개형

주제:

H103

○○○ (2015(9)고2-가형21)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=f'(b)=f'(4)=0$이다.) [4점]



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $a<t<b$일 때, $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}>\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}$이다.

ㄷ. $\displaystyle\int_a^4 f'(x)dx=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(a)$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H. 그래프 개형

주제:

H104

○○○ (2019(10)고3-가형21)

정수 n에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-n)e^x$에 그은 접선의 개수를 $f(n)$이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a=0$일 때, $f(4)=1$이다.

ㄴ. $f(n)=1$인 정수 n의 개수가 1인 정수 a가 존재한다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} f(n)=5$를 만족시키는 정수 a의 값은 -1 또는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H105

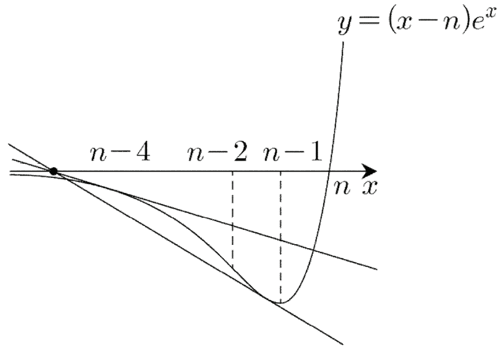
●●● (2024(10)고3-미적분30)

두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여

함수 $f(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $60\times(a+b)$의 값을 구하시오. [4점]

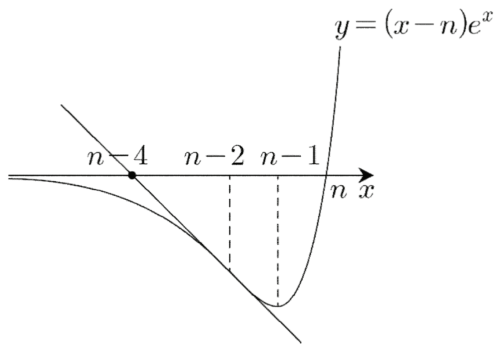
(가) $\{x \mid f(x)=f'(t)\times x\}=\{0\}$을 만족시키는 실수 t의 개수가 1이다.

(나) $f(2)=2e^{-2}$



위의 그림처럼 접선의 개수는 2이다.

- $a=n-4$

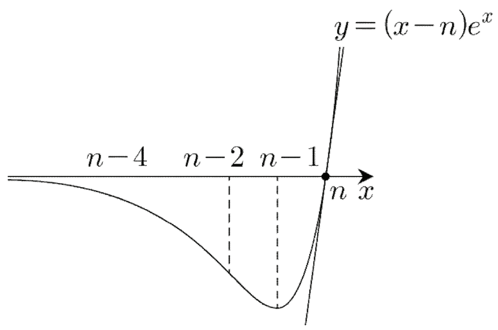


위의 그림처럼 접선의 개수는 1이다.

- $n-4<a<n$

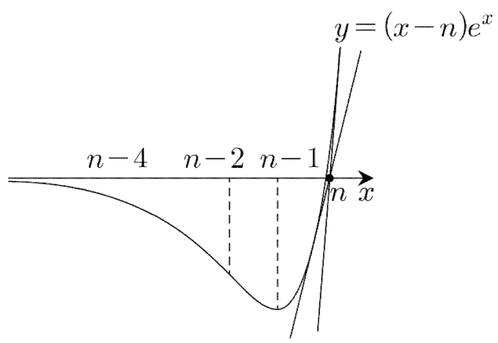
접선을 그을 수 없다.

- $a=n$



위의 그림처럼 접선의 개수는 1이다.

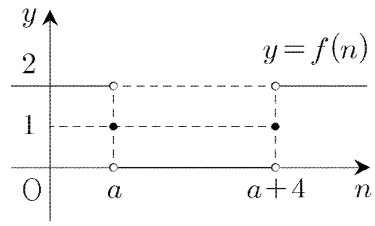
- $a>n$



위의 그림처럼 접선의 개수는 2이다.

이상에서 함수 $f(n)$의 방정식은

$$f(n)=\begin{cases} 2 & (n>a+4) \\ 1 & (n=a+4) \\ 0 & (a<n<a+4) \\ 1 & (n=a) \\ 2 & (n<a) \end{cases}$$



▸ ㄱ. (참)

$a=0$, $n=4$이면 $f(4)=1$

▸ ㄴ. (거짓)

$f(n)=1$인 정수 n은 $a+4$, a이므로 항상 2개다.

▸ ㄷ. (참)

$f(n)$이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2뿐이다.

$\sum_{n=1}^{5} f(n)=5$이므로 가능한 경우는 다음과 같다.

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=2$,

$f(5)=2$인 경우는 $3=a+4$, $a=-1$

$f(1)=2$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=0$,

$f(5)=0$인 경우는 $3=a$, $a=3$

따라서 $a=-1$ 또는 $a=3$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

H105 |답 40

[풀이]

(나): $f(2)=(4a+2b)e^{-2}=2e^{-2}$, $b=1-2a$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=-\{ax^2-(4a-1)x+2a-1\}e^{-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow ax^2-(4a-1)x+2a-1=0$

(판별식)$=(4a-1)^2-4a(2a-1)$

$=(2a-1)^2+(2a)^2>0$

이때, 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.

$f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지나고,

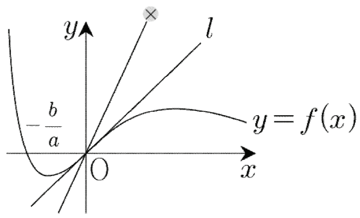
$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx}{e^x}=0$이므로 x축은 점근선이다.

그리고 함수 $f(x)$의 x절편은 0, $-\frac{b}{a}$이다.

상수 b의 부호에 따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 구분할 수 있다.

한편 직선 $y=f'(t)x$을 l로 두자.
이때, 직선 l은 기울기가 $f'(t)$이고, 원점을 지난다.
그리고 $f'(t)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기이기도 하다.
조건 (가)에서 해집합의 원소가 0 뿐이므로
곡선 $y=f(x)$와 직선 l은 오직 원점에서만 만난다.
(1) $b>0$
- 변곡점이 원점인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



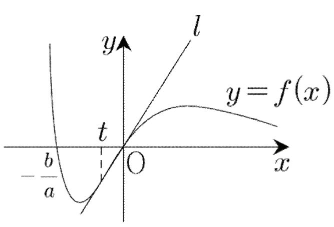
위의 그림처럼 직선 l이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선이면 조건 (가)를 만족시킨다.
이유는 다음의 두 가지를 만족시키기 때문이다.
첫째, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 교점의 개수는 1이고, 이 유일한 교점의 x좌표는 0이다.
둘째, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(p,\ f(p))$에서의 접선의 기울기 $f'(p)$에 대하여
'$p\neq 0 \Leftrightarrow f'(p)\neq f'(0)$' 이다.
그리고 (위의 그림에서) 직선 l의 기울기는 $f'(0)$ 보다 클 수 없다. 왜냐하면 직선 l의 기울기는 $f'(t)$인데, 이를 만족시키는 t는 존재하지 않기 때문이다. (변곡점에서의 기울기가 가장 크다.)
함수 $f(x)$의 이계도함수는

$$f''(x)=\{ax^2-(6a-1)x+6a-2\}e^{-x}$$

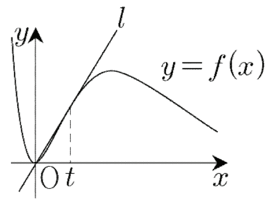
$$f''(0)=6a-2=0,\ a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{3}$$

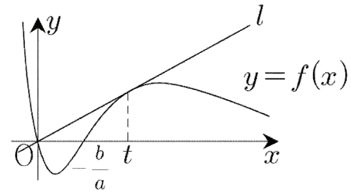
- 변곡점이 원점이 아닌 경우

아래 그림처럼 직선 l이 곡선 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접하는 경우를 생각해보자. (단, $-\frac{b}{a}<t<0$)



곡선 $y=f(x)$와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표는 t, 0이다.
따라서 조건 (가)는 성립하지 않는다.
(2) $b=0$ 또는 $b<0$
아래 그림처럼 직선 l이 곡선 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접하는 경우를 생각해보자. (단, $t>0$)





곡선 $y=f(x)$와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표는 t, 0이다.
따라서 조건 (가)는 성립하지 않는다.
이상에서

$$a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ 60\times(a+b)=40$$

답 40

H106 | 답 ①

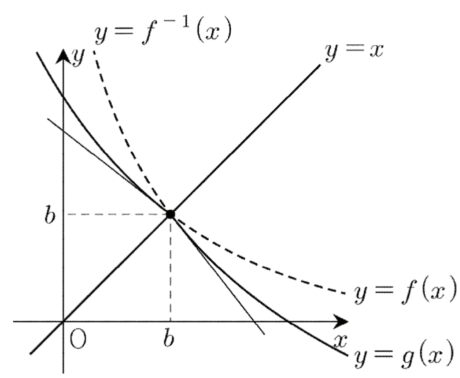
[풀이] ★
함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 교점의 x좌표가 b이므로

$$f(b)=b \quad \cdots ㉠$$

역함수의 성질에 의하여

$$f^{-1}(b)=b$$

따라서 세 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$, $g(x)$의 그래프는 점 $(b,\ b)$에서 만난다.
세 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



위의 그림처럼

$$f'(b)\neq (f^{-1})'(b)$$

이면 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 미분가능하지 않다.
따라서 함수 $g(x)$가 $x=b$에서 미분가능하려면

$$f'(b)=(f^{-1})'(b) \quad \cdots ㉡$$

이어야 한다.
역함수의 미분법에 의하여