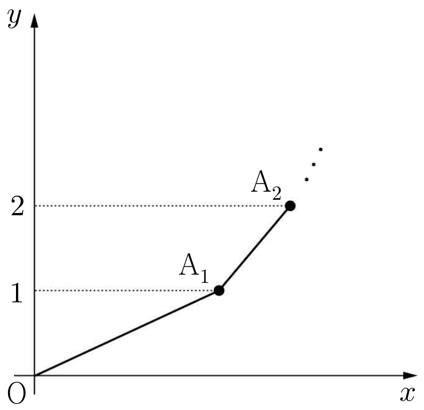
(4) 도형에의 활용

109) 2007년 7월 교육청

자연수 n에 대하여 점 A_n은 직선 $y=n$ 위에 있다.

선분 A_0A_1의 기울기가 $\frac{3}{4}$이고, 선분 A_nA_{n+1}의 기울기는 선분 $A_{n-1}A_n$의 기울기의 $\frac{4}{3}$배이다. 점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} x_n$의 값은? (단, 원점 $O=A_0$)



① $\frac{16}{3}$ ② 5 ③ $\frac{14}{3}$ ④ $\frac{13}{3}$ ⑤ 4

110) 2009년 10월 교육청

n이 자연수일 때, 점 $A_n(n, \sqrt{3}n)$과 원 $x^2+y^2=4n^2+3n$ 위의 점 P에 대하여 선분 PA_n의 길이의 최솟값을 a_n이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

111) 2010년 3월 교육청

이차함수 $f(x)=2x^2-2nx+\frac{1}{2}n^2+6n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $P_n(x_n, y_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$의 값을 구하시오.

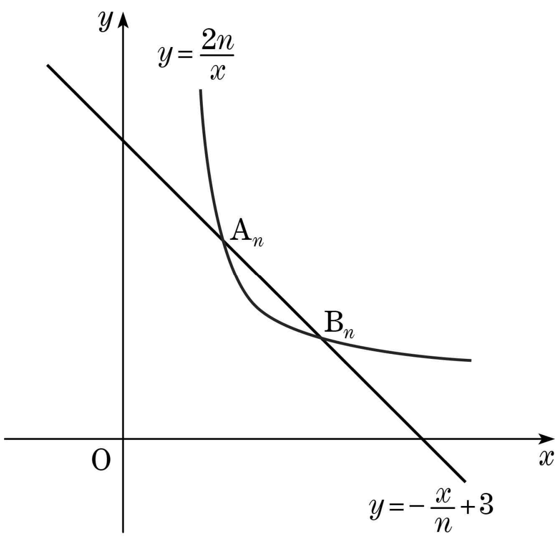
112) 2010년 7월 교육청

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=-x+n$이 만나서 생기는 두 교점 사이의 거리를 l_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n^2}{n}$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

113) 2013년 10월 교육청

자연수 n에 대하여 곡선 $y=\dfrac{2n}{x}$과 직선 $y=-\dfrac{x}{n}+3$의 두 교점을 A_n, B_n이라고 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}(l_{n+1}-l_n)$의 값은?



① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

114) 2015년 3월 교육청

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $y=\dfrac{1}{n}x$가 제1사분면에서 만나는 점을 중심으로 하고 x축에 접하는 원의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은?

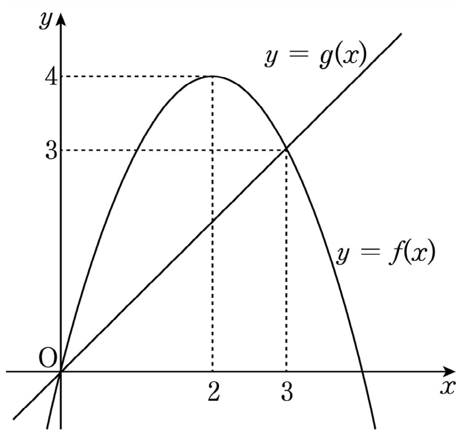
① $\dfrac{\pi}{4}$ ② $\dfrac{\pi}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\dfrac{5}{4}\pi$

115) 2016년 3월 교육청

그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 원점과 점 $(3,3)$에서 만난다.

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{n+1}+5\{g(x)\}^n}{\{f(x)\}^n+\{g(x)\}^n}$$

일 때, $h(2)+h(3)$의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

(5) 등비급수의 활용

116) 2023년 7월 교육청 27

그림과 같이 $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=\sqrt{17}$, $\overline{B_1C_1}=2$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AC_1 위의 점 C_2, 삼각형 AB_1C_1의 내부의 점 D_1을

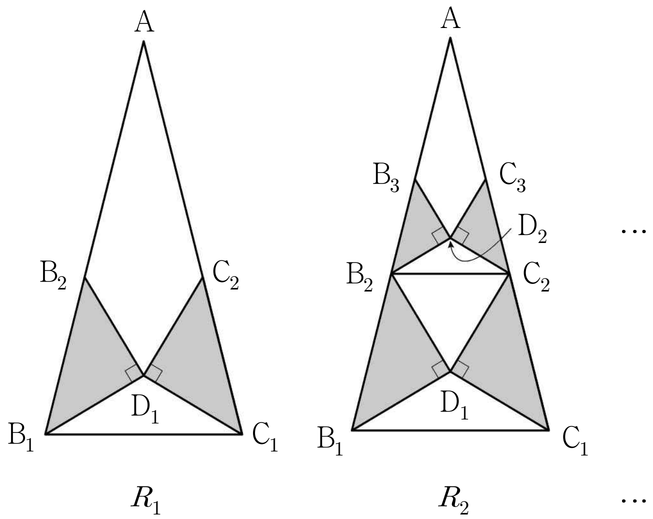
$\overline{B_1D_1}=\overline{B_2D_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{C_2D_1}$,

$\angle B_1D_1B_2=\angle C_1D_1C_2=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_1D_1B_2$, $C_1D_1C_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_2 위의 점 B_3, 선분 AC_2 위의 점 C_3, 삼각형 AB_2C_2의 내부의 점 D_2를

$\overline{B_2D_2}=\overline{B_3D_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{C_3D_2}$,

$\angle B_2D_2B_3=\angle C_2D_2C_3=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_2D_2B_3$, $C_2D_2C_3$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은?



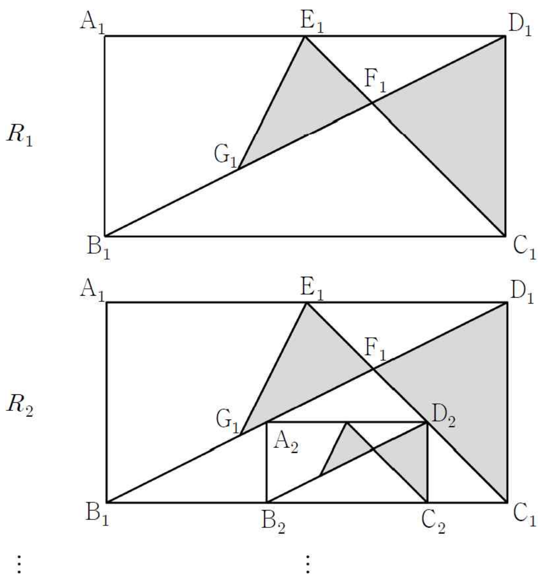
① 2 ② $\dfrac{33}{16}$ ③ $\dfrac{17}{8}$ ④ $\dfrac{35}{16}$ ⑤ $\dfrac{9}{4}$

117) 2022년 7월 교육청

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1의 중점 E_1에 대하여 두 선분 B_1D_1, C_1E_1이 만나는 점을 F_1이라 하자. $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이 되도록 선분 B_1D_1 위에 점 G_1을 잡아 삼각형 $G_1F_1E_1$을 그린다. 두 삼각형 $C_1D_1F_1$, $G_1F_1E_1$로 만들어진 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 B_1F_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은?



① $\dfrac{23}{42}$ ② $\dfrac{25}{42}$ ③ $\dfrac{9}{14}$ ④ $\dfrac{29}{42}$ ⑤ $\dfrac{31}{42}$

1단원-단원평가

118)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n^2+6n < n^2a_n+2nb_n < n^2+6n+1$
(나) $2n^2-n < 2n^2a_n-nb_n < 2n^2-n+1$

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$의 값은?

① 3 ② $\frac{16}{5}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{18}{5}$ ⑤ $\frac{19}{5}$

119)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $2a_{11}=a_{22}$, $S_{22}-4S_{11}+a_{12}=2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{S_nS_{n+2}}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

120)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n=\frac{2^{n+1}+2\times r^n-1}{2^n+r^n}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\frac{1}{5}$이다. 실수 r의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ 4

121)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+2)^2a_{n+2}}$의 값은? (단, $a_n>0$)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

122)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(a_n - n^2\right)\left(a_n - n^2 - n\right) < 0$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

123)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $n^2\left(\sqrt{n^2+16n}-n\right) < 4a_n - nb_n < 8n^2+n$ 이 성립한다.
(나) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n^2+n+1}=3$

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{6n-1}$의 값을 구하시오.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

124)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-6n}{a_n+5}=1$$

일 때, $a_{20}-a_{19}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

125)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하고 모든 자연수 k에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+k}=2k$일 때, a_5의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

126)

모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_5=-5$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $a_n=2a_{n+1}+|a_{n+1}|+4$
> 이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{39}{a_{n+1}a_n}$의 값은?

① $-\frac{375}{43}$ ② $-\frac{377}{43}$ ③ $-\frac{379}{43}$ ④ $-\frac{381}{43}$
⑤ $-\frac{383}{43}$

127)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-pn+q)=r$이다. 이때, $p+q+r$의 값을 구하면?(단, $p,\ q,\ r$는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

128)

두 수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킨다.

> (가) $2^{n+1}<a_n+b_n<2^{n+1}+3$
> (나) $2^n<a_n-b_n<2^n+1$

이때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n+3b_n}{a_n+3b_n}$의 값을 구하시오.

129)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}=4,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^{n-1}}=3$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}$의 값을 구하면

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

130)

상수 k와 함수 $f(x)=k\times 2^x-1$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\{f(x)\}^n$의 값이 존재하는 자연수 x의 최댓값이 5가 되도록 하는 실수 k의 최댓값을 α라 할 때, $64\times\alpha$의 값을 구하시오.

131)

상수 k와 함수 $f(x)=k\times 2^x-1$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\{f(x)\}^n$의 값이 존재하는 자연수 x의 개수가 m개가 되도록 하는 실수 k의 최댓값을 a_m이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구하시오.

132)

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=3$일 때, a_1의 값을 구하시오.

133)

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{\sqrt{8}}\times\frac{4}{\sqrt{15}}\times\cdots\times\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$

④ 2 ⑤ $\sqrt{6}$

134)

무한등비수열 $\{(x-3)(x-5)^{n-1}\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

135)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n+1}+2^n}{3^n-2^{n+1}}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4

④ 5 ⑤ 6

136)

무한등비수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2=1$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^3$의 값은?

① $\frac{19}{61}$ ② $\frac{21}{61}$ ③ $\frac{23}{61}$

④ $\frac{25}{61}$ ⑤ $\frac{27}{61}$

137)

수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{(n+2)a_n}=\frac{1}{3}$을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{12n+3}{a_n}$의 값을 구하시오.

138)

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn-2}{3n+5}=3$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

139)

자연수 n에 대하여 $\sqrt{16n^2+4n}$의 소수 부분을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

140)

자연수 n에 대하여 $f(x)=3^n\cdot x^2+2^n\cdot x-1$을 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지를 각각 a_n, b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5