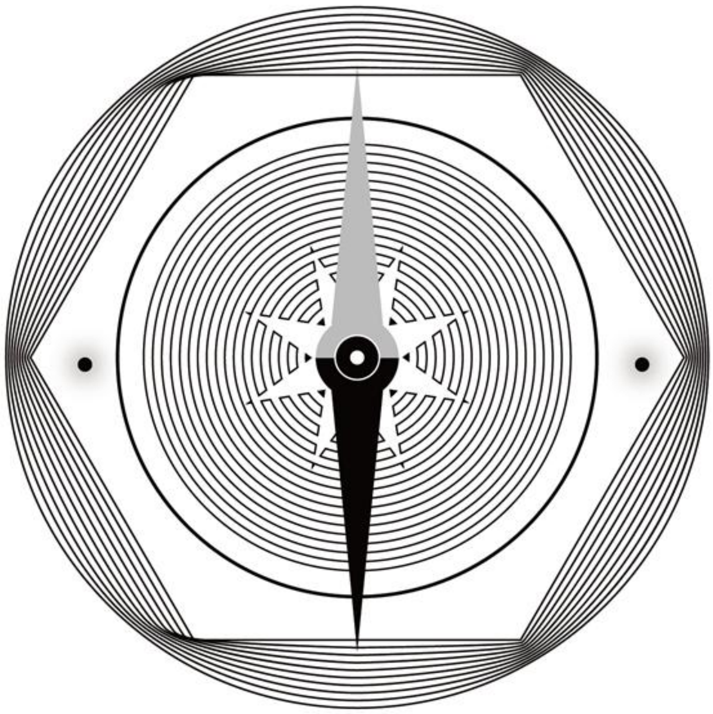
수능한권



수학 I

문제편

수능한권 수학 I Contents

수능을 한 권에 담다.
Big Data Report와 Analysis, 대표문제분석, Prism 해설지, 수능수학과 평가원 모든 문항을 한 권에

수능한권은 대표문제분석이 있는 파트와 워크북 파트가 있어요.
워크북에는 수능 수학 I 수능+평가원 기출문제 중 현 15개정 시험범위에 맞춘 모든 수능문제가 있답니다.
수능을 정복하는 나만의 맞춤전략을 세워보세요.

수능한권 수학 I Preview

수능한권 Big Data Analysis

수능한권 대표문항분석

수능한권 수학 Ⅰ WorkBook 1. 지수로그

수능한권 수학 Ⅰ WorkBook 2. 삼각함수

수능한권 수학 Ⅰ WorkBook 3. 수열

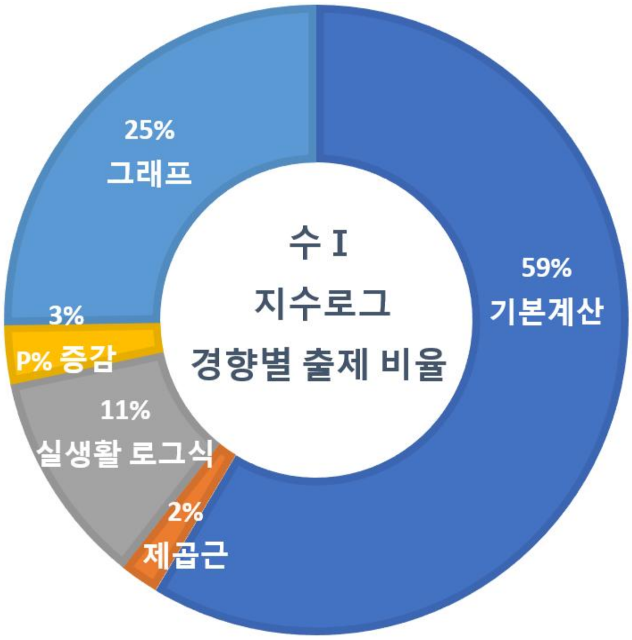
수학 Ⅰ

1. 지수로그

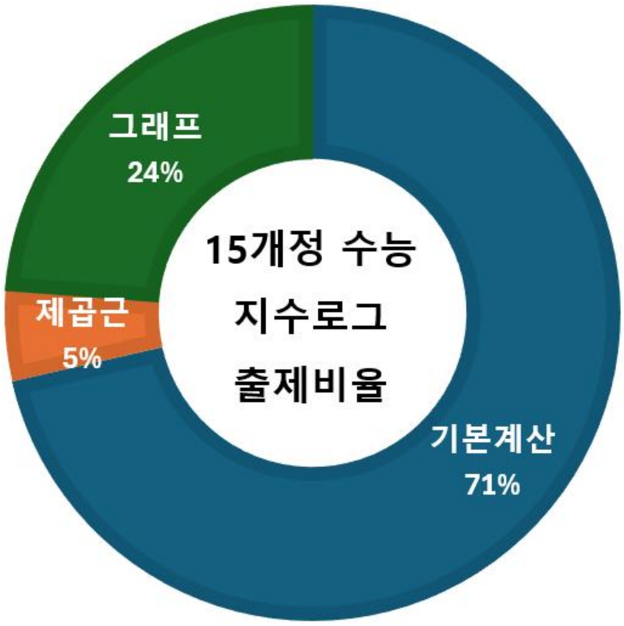
경향 01 지수로그 기본계산
경향 02 제곱근
경향 03 실생활 로그식
경향 04 P% 증감
경향 05 지수로그 그래프

Big Data Report

지수로그 경향별 전체 수능 출제 비율



15개정 수능 출제 비율



■ 지수로그 경향은 5가지로 분석하였다.

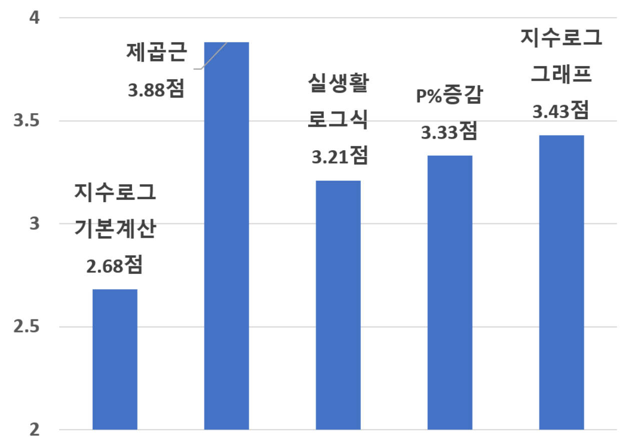
■ 경향01 지수로그 기본계산
23 수능에서 9번 문항으로 출제되었고 15개정 평가원에서 평균 배점은 3점에 근접한다. 다소 까다로운 3점 문항으로 출제할 때도 있고 내분점, 외분점, 무게중심등과 결합하거나 지수로그 대소비교를 출제할 수도 있다. 마냥 쉽지만은 않은 문제가 나오기도 하니 꼼꼼하게 보자.

■ 경향02 제곱근
15개정 평가원에서 제곱근의 문제 난이도와 중요도가 대폭 상향 되었다. 15개정 평가원은 제곱근을 모의고사에서 2번, 수능에서 1번 출제했고 출제할 때마다 4점 문항으로 출제하였다. 수능에서 차지하는 비율은 낮지만 언제든 다시 출제할 수 있으니 놓치지 말자.

■ 경향03 실생활 로그식, 경향04 P% 증감
유행이 지난 경향이다. 15개정 평가원 수능에서 출제된 적 없는 경향이라 앞으로도 출제될 가능성은 매우 낮다고 보인다. 나올 확률이 극히 드물지만 교과서에 해당 내용이 있으므로 출제의 여지가 있긴 하다. 올해 평가원 모의고사에서 출제하지 않는다면 아예 모르고 지나가는 것보다 수능한권에 있는 문제 정도만 가볍게 익히고 넘어가는 수준으로 공부하자.

■ 경향05 지수로그 그래프
15개정 평가원에서 지수로그 그래프는 21수능을 제외하고 매년 빠짐없이 4점 문항으로 출제되었다. 작년 수능에서도 지수로그 그래프 문항이 까다롭게 출제된 만큼 철저하게 학습하는 것이 중요하다.
최근 지수로그 그래프 경향에서는 그래프의 기본기뿐만 아니라 그래프 개형 추론 문제도 나온다. 특히 미분적분 그래프 고난도 문항에서 자주 나오는 [새로운 함수 $g(t)$를 규정]하는 방식으로도 출제되기도 했는데, 그래프의 기본기가 탄탄하게 갖춰진 상태에서 그래프를 자유자재로 잘 다룰 줄 알아야 풀 수 있다. 구하기 불가능한 미지수를 전부다 구할 수 있을 거라고 생각하여 계산에 집착하다가 시간만 날려 먹는 경우도 있으니 식이 그래프에서 갖는 의미를 해석하는 것이 중요하다.

지수로그 경향별 전체 수능 난이도



◆ 지수로그 기본 계산 (2.68점)

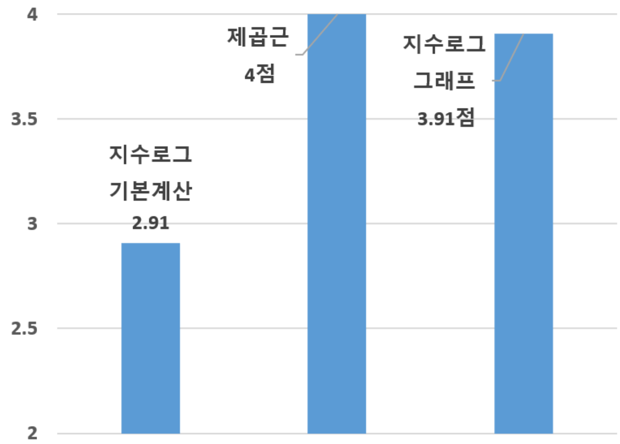
◆ 제곱근 (3.88점)

◆ 실생활 로그식 (3.21점)

◆ P% 증감 (3.33점)

◆ 지수로그 그래프 (3.43점)

15개정 평가원의 난이도



■ 작년 수능 출제 문항 분류

「경향01 지수로그 기본 계산」
- 1번 [2점]
- 8번 [3점]
- 16번 [3점]

「경향05 지수로그 그래프」
- 20번 [4점]

올해 수능 지수로그 학습 방향

기본계산 / 제곱근 / 그래프에서
고난도 문제 출제 유력

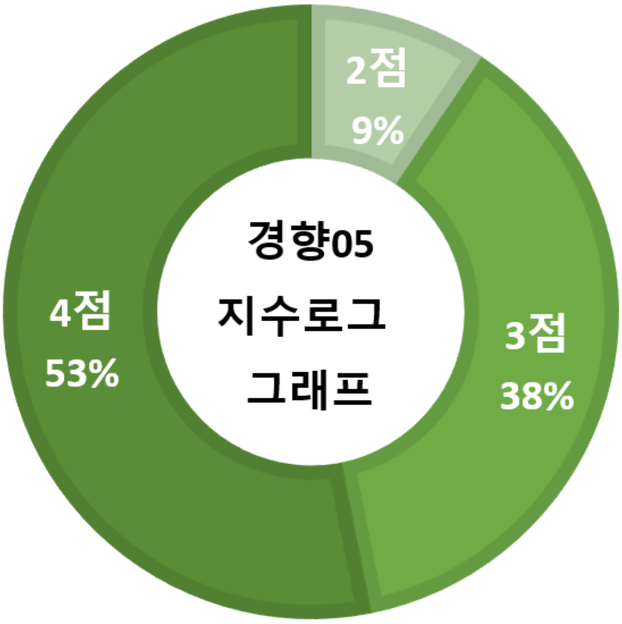
지수로그 기본계산에서
수학(상),(하) 개념이 결합될 수도

제곱근에서
개념의 디테일을 챙기기

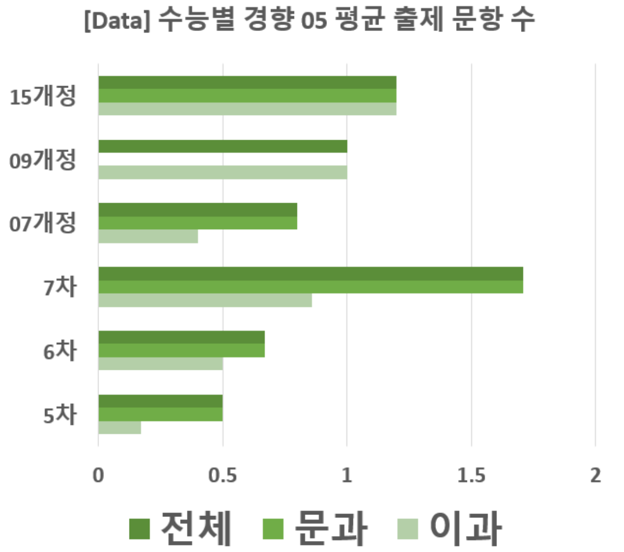
지수로그 그래프의 추론과 확장
→ 그래프를 자유자재로
다루는 능력 키우기

경향 05 Minor Trend

경향05 수능 출제 난이도



경향05 수능별 데이터 (1)



COMMENT

지수로그 단원 내에서 매년 출제 되어 왔고 평균 배점이 상당히 높은 편이다. (15개정 수능 평균 배점: 3.9점) 또한 07개정(2012~2016)에서 최고난도 30번 문제가 여기서 여러 번 출제된 역사도 있고 작년 수능 20번도 이 경향에서 나왔다. 최근 수능에서 수2 그래프에서 자주 나오던 출제 포인트와 (최대최소, 실근의 개수 등)를 섞어서 출제한 적도 있기도 하고, 20번 21번 고난도 4점으로 출제하기 때문에 지수로그 특징뿐만 아니라 전반적인 그래프 그리는 테크닉도 함께 연습해두는 편이 좋다.

경향05 수능 출제 전망

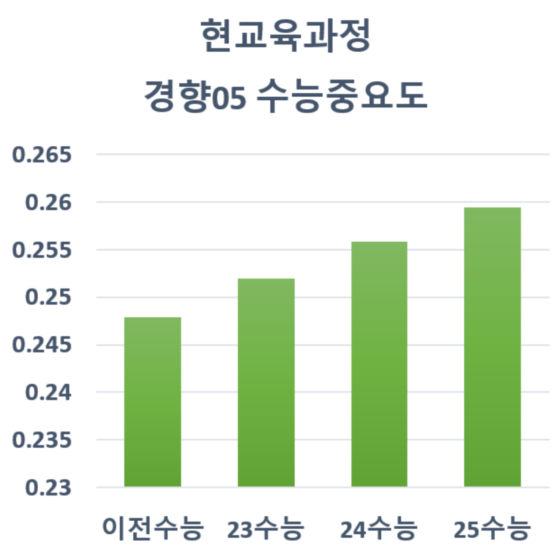
■■■■■

15개정 평가원 100% 출제

경향05 지수로그 단원 내 출제 비율

25%

경향05 수능별 데이터 (2)



경향05 대표문제분석 012

12. [2023년 수능 (공통) 21번]
자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x \ge 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

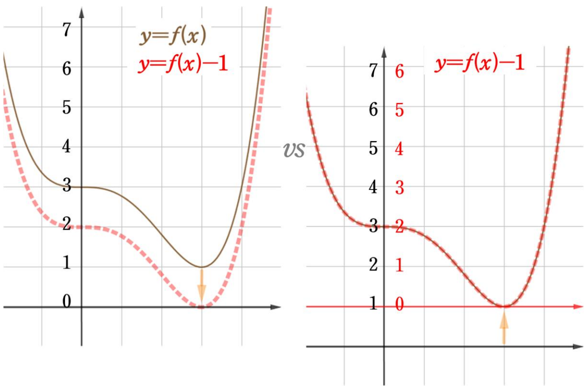
복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

Analysis

$g(t)$를 규정하는 방식이 미분적분 그래프 고난도 문제에 자주 나오는 방식이다. 그만큼 그래프를 그리는 기본기가 얼마나 탄탄한지를 물어보는 문제이다.

■ 그래프의 이동을 편하게 하는 방법

그래프를 이동시키는 게 번거로울 때는
축을 이동시켜라.



곡선을 일정한 간격으로 옮기는 것이 번거로울 뿐만 아니라 잘 그리기도 어렵기 때문에,
축을 옮기는 것이 더 효율적일 때가 많다.
이때 어느 것을 x축으로 해석하는지에 따라
하나의 그래프를
$y=f(x)$의 그래프로 해석할 수도 있고
$y=f(x)-1$의 그래프로 해석할 수도 있다.

경향05 대표문제분석 022

1등급

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

22. [2024년 수능 (공통) 21번]
양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

Analysis

$g(t)$를 규정하는 방식이 미분적분 그래프 고난도 문제에 자주 나오는 방식이다. 그만큼 그래프를 그리는 기본기가 얼마나 탄탄한지를 물어보는 문제이다.

경향05 대표문제분석 024

1등급

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

24. [2014년 수능 (A)형 30번]
좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오. [4점]

Analysis

일상생활에서는 여러 가지 경우 중에서 확실히 정할 수 없으면 아무것도 안하는 것이 지극히 자연스러운 사고방식이다. 하지만 수학에서는 여러 가지 경우 중에서 정할 수 없다면 여러 가지 경우를 모두 다 해보는 것이 자연스럽고 논리적인 사고방식이다.

수능 4점

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 ○△X					

134. [2025년 수능 (공통) 10번]
닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수
$f(x)=a\cos bx+3$이 $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 ○△X					

135. [2024년 6월 (공통) 20번]
5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

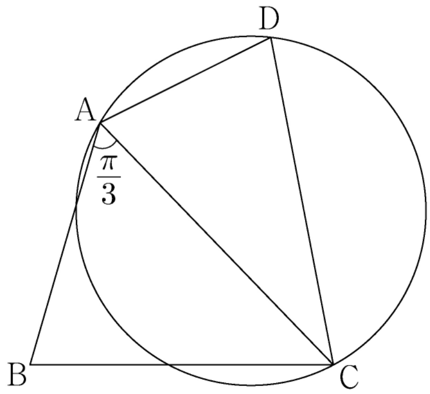
160. [2024년 수능 (공통) 13번] 대표 문항

그림과 같이

$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$, $\overline{AD}\times\overline{CD}=9$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은? [4점]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

161. [2024년 6월 (공통) 10번]

다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

(가) $3\sin A=2\sin B$
(나) $\cos B=\cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ ④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 OΔX					

1등급

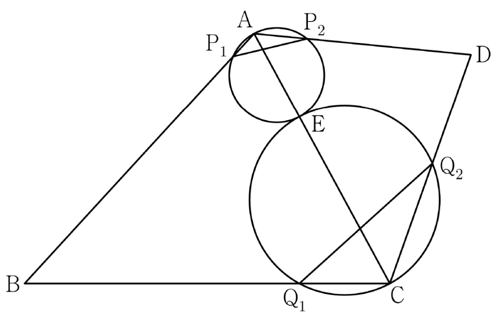
164. [2023년 6월 (공통) 13번]

그림과 같이

$\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=2$, $\cos(\angle\mathrm{BCD})=-\frac{1}{3}$, $\angle\mathrm{DAB}>\frac{\pi}{2}$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}:\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AD}}$) [4점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

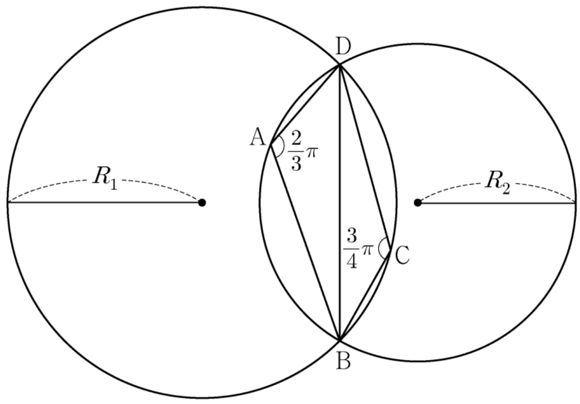
복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 OΔX					

165. [2023년 9월 (공통) 20번]

그림과 같이

$\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=1$, $\angle\mathrm{DAB}=\frac{2}{3}\pi$, $\angle\mathrm{BCD}=\frac{3}{4}\pi$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1\times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$R_2=\boxed{(가)}\times\overline{\mathrm{BD}}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2=2^2+1^2-(\boxed{(나)})$$

이므로

$$R_1\times R_2=\boxed{(다)}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 ○△X					

193. [2023년 9월 (공통) 21번]
모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 ○△X					

194. [2022년 6월 (공통) 12번]
공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

1등급

295. [2024년 수능 (공통) 15번] 대표 문항

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6 + a_7 = 3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

1등급

296. [2024년 6월 (공통) 22번]

수열 $\{a_n\}$은

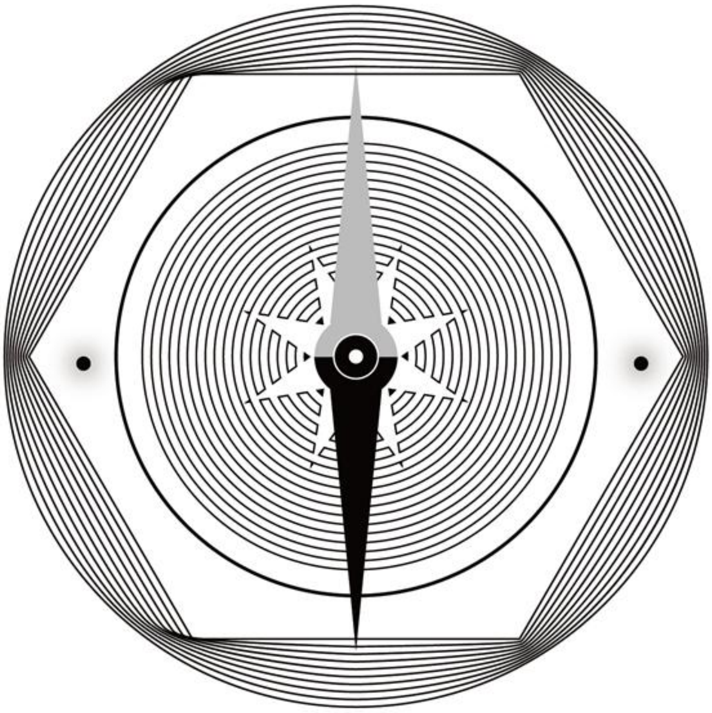
$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]

수능한권



수학 I

프리즘 해설서

수능한권 수학 I Contents

수능을 한 권에 담다.
Big Data Report와 Analysis, 대표문제분석, Prism 해설지, 수능수학과 평가원 모든 문항을 한 권에

수능한권은 대표문제분석이 있는 파트와 워크북 파트가 있어요.
워크북에는 수능 수학 I 수능+평가원 기출문제 중 현 15개정 시험범위에 맞춘 모든 수능문제가 있답니다.
수능을 정복하는 나만의 맞춤전략을 세워보세요.

수능한권 수학 I Preview

수능한권 Big Data Analysis

수능한권 대표문항분석

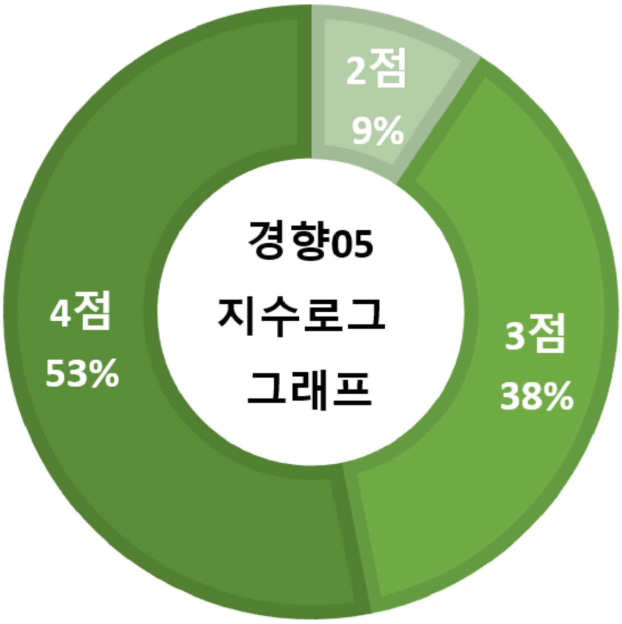
수능한권 수학 I WorkBook 1. 지수로그

수능한권 수학 I WorkBook 2. 삼각함수

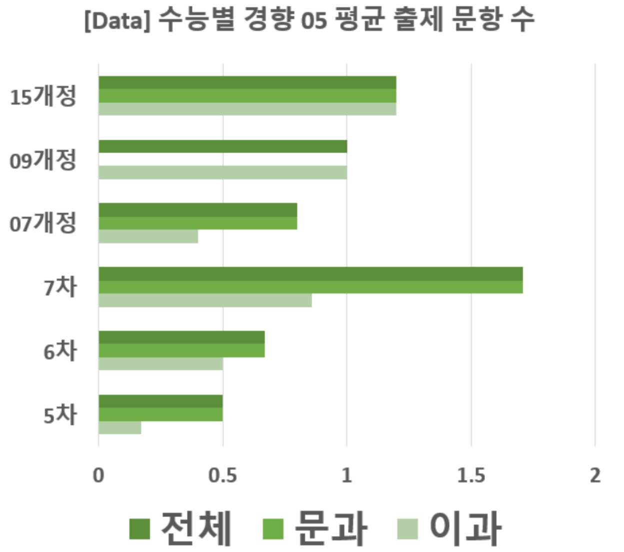
수능한권 수학 I WorkBook 3. 수열

경향 05 Minor Trend

경향05 수능 출제 난이도



경향05 수능별 데이터 (1)



COMMENT

지수로그 단원 내에서 매년 출제 되어 왔고 평균 배점이 상당히 높은 편이다. (15개정 수능 평균 배점: 3.9점) 또한 07개정(2012~2016)에서 최고난도 30번 문제가 여기서 여러 번 출제된 역사도 있고 작년 수능 20번도 이 경향에서 나왔다. 최근 수능에서 수2 그래프에서 자주 나오던 출제 포인트와 (최대최소, 실근의 개수 등)를 섞어서 출제한 적도 있기도 하고, 20번 21번 고난도 4점으로 출제하기 때문에 지수로그 특징뿐만 아니라 전반적인 그래프 그리는 테크닉도 함께 연습해두는 편이 좋다.

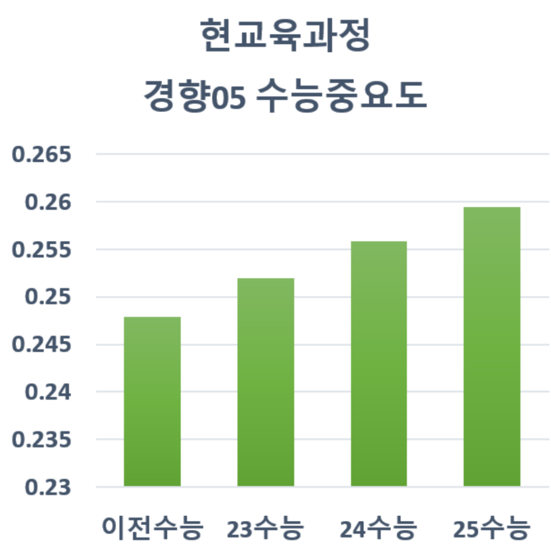
경향05 수능 출제 전망

15개정 평가원 100% 출제

경향05 지수로그 단원 내 출제 비율

25%

경향05 수능별 데이터 (2)



경향05 대표문제분석 012

12. [2023년 수능 (공통) 21번]
자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\ge 0) \end{cases}$$

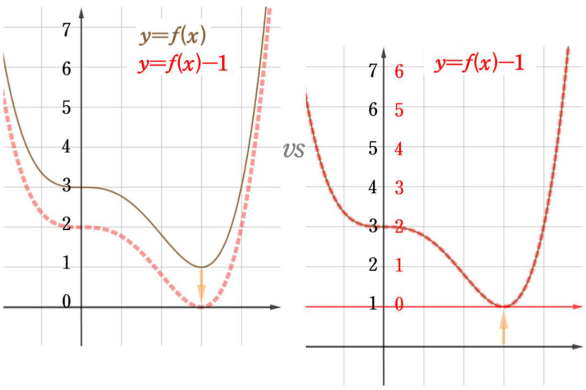
이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

Analysis

$g(t)$를 규정하는 방식이 미분적분 그래프 고난도 문제에 자주 나오는 방식이다. 그만큼 그래프를 그리는 기본기가 얼마나 탄탄한지를 물어보는 문제이다.

■ 그래프의 이동을 편하게 하는 방법

그래프를 이동시키는 게 번거로울 때는
축을 이동시켜라.



곡선을 일정한 간격으로 옮기는 것이 번거로울 뿐만 아니라 잘 그리기도 어렵기 때문에,
축을 옮기는 것이 더 효율적일 때가 많다.
이때 어느 것을 x축으로 해석하는지에 따라
하나의 그래프를
$y=f(x)$의 그래프로 해석할 수도 있고
$y=f(x)-1$의 그래프로 해석할 수도 있다.

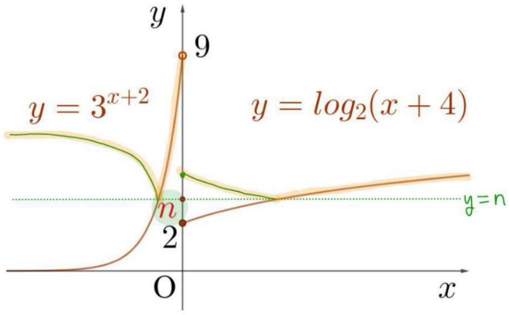
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

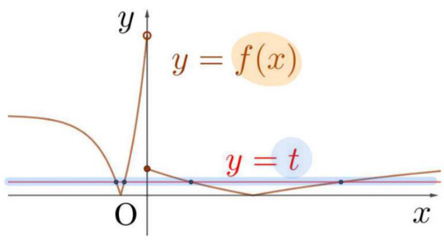
33

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\ge 0) \end{cases}$$ 의 그래프는

$$y=\begin{cases} 3^{x+2} & (x<0) \\ \log_2(x+4) & (x\ge 0) \end{cases}$$ 의 그래프에서

$y<n$인 부분을 $y=n$에 대하여 대칭한 것과 같다.





$\therefore\ 2<n<9$
$\therefore$ 모든 자연수 n값의 합은
$3+4+5+6+7+8=33$

경향 05 Minor Trend

[다른 풀이]

i) $x<0$

$f(x)=t$

$\Leftrightarrow\ |3^{x+2}-n|=t$

$\Leftrightarrow\ 3^{x+2}-n=\pm t$

$\Leftrightarrow\ 3^{x+2}=n\pm t$

i) $x>0$

$f(x)=t$

$\Leftrightarrow\ |\log_2(x+4)-n|=t$

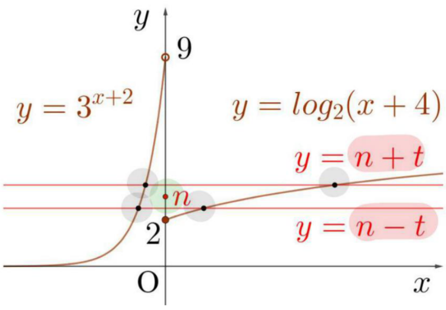
$\Leftrightarrow\ \log_2(x+4)-n=t$

$\Leftrightarrow\ \log_2(x+4)=n\pm t$

$\therefore\ y=n-t$ or $y=n+t$와

$$y=\begin{cases} 3^{x+2} & (x<0) \\ \log_2(x+4) & (x\geq 0) \end{cases}$$ 의 교점의 개수가

총 4개인 경우가 존재하는 n값을 구하면 된다.



$\therefore\ 2<n<9$

$\therefore$ 모든 자연수 n값의 합은

$3+4+5+6+7+8=33$

경향 05 Minor Trend

경향05 대표문제분석 022

1등급

22. [2024년 수능 (공통) 21번]

양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

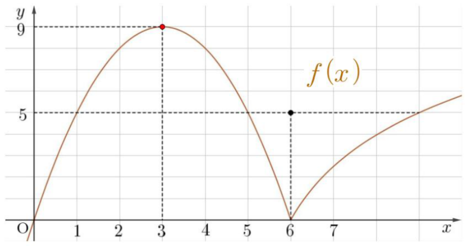
$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

10

아무 생각 없이 풀려고 들지 말고
극댓값이 있는 $x=3$, 함수식이 바뀌는 $x=6$
기준으로 관찰해야겠다는 생각을 할 줄 알아야 한다!

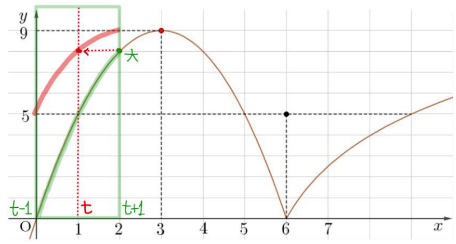


i) $0 < t < 2$인 경우

$t+1 < 3$이므로

$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

$g(t)=f(t+1)$

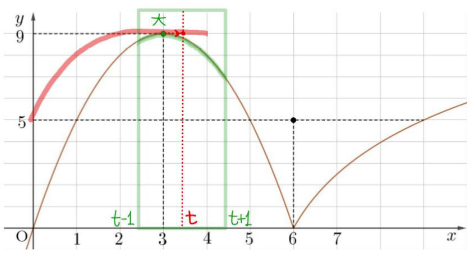


ii) $2 \leq t \leq 4$인 경우

$t-1 \leq 3 \leq t+1$이므로

$[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

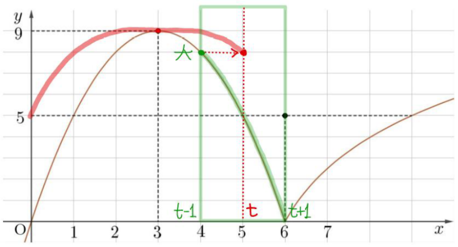
$g(t)=f(3)=9$



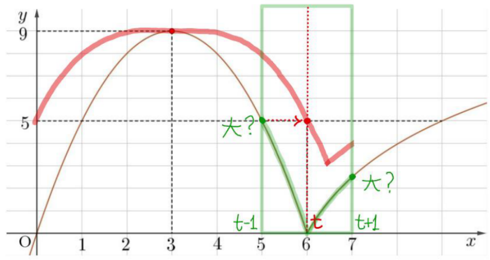
Analysis

$g(t)$를 규정하는 방식이 미분적분 그래프 고난도 문제에 자주 나오는 방식이다. 그만큼 그래프를 그리는 기본기가 얼마나 탄탄한지를 물어보는 문제이다.

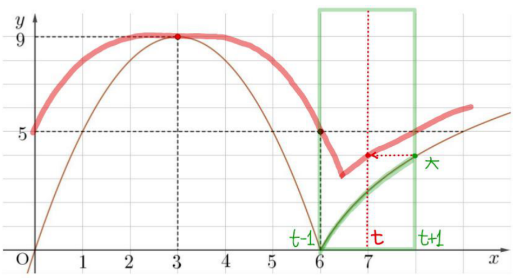
ⅲ) $4<t\le 5$인 경우
$t-1>3$이므로
$[t-1,\,t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는
$g(t)=f(t-1)$



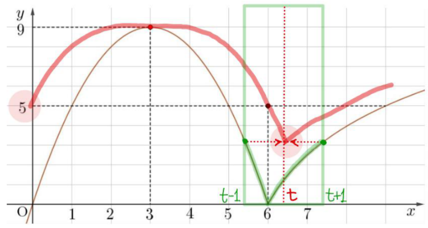
ⅳ) $5<t<7$인 경우
$[t-1,\,t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는
a값에 따라 다르다. 아래 둘 중 큰 값이다.
ⓐ $g(t)=f(t-1)=-(t-1)^2+6(t-1)$ $(\because t-1<6)$
ⓑ $g(t)=f(t+1)=a\log_4\{(t+1)-5\}$ $(\because t+1>6)$



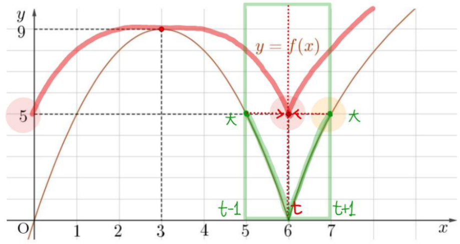
ⅴ) $t\ge 7$인 경우
$[t-1,\,t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는
$g(t)=f(t+1)$



$g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하려면 $f(7)\ge 5$이어야 한다.



$\Downarrow$



$\therefore\ a\log_4 2\ge 5$ ⇔ $a\ge 10$
∴ 양수 a의 최솟값은 10이다.

경향05 대표문제분석 024

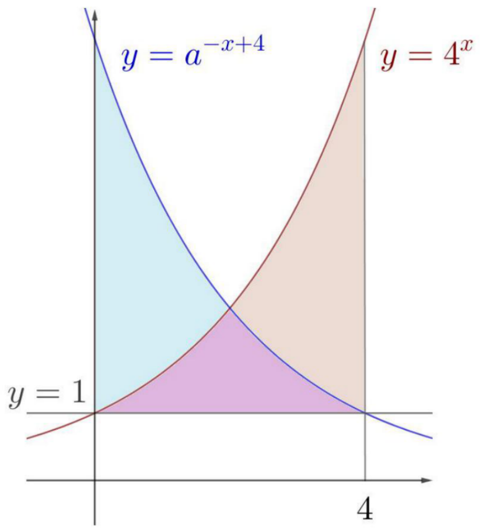
1등급

24. [2014년 수능 (A)형 30번]
좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^{x}$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

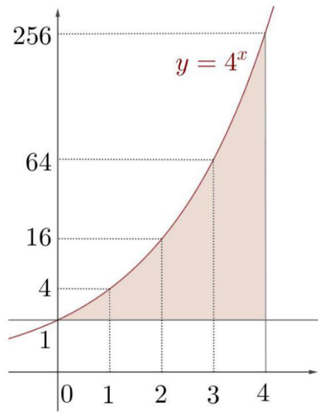
15

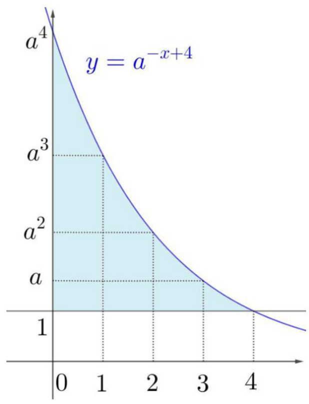
(Step1)
문제에서 그래프에 관련된 표현이 나오므로 반드시 그래프부터 그려야 한다.



(Step2)
[1]영역과 [2]영역의 공통부분이 불분명하므로
[1]영역의 정수점 개수와
[2]영역의 정수점 개수를 따로 구하자.
공통부분은 각 정수 x값마다
정수 y의 개수가 작을 때이다.

(Step3)
홀쭉한 영역에서 정수점 개수를 구하는 방법은
⇔ 정수 x좌표마다 정수 y좌표의 개수를 구하면 돼.
⇔ 정수 x좌표마다 y의 정수 범위를 구하면 돼.





$x=0$일 때 $y=1$ vs $1\le y\le a^4$ $(1<a^4)$
$x=1$일 때 $1\le y\le 4$ vs $1\le y\le a^3$ $(4<a^3)$
$x=2$일 때 $1\le y\le 16$ vs $1\le y\le a^2$
$x=3$일 때 $1\le y\le 64$ vs $1\le y\le a$ $(64>a)$
$x=4$일 때 $1\le y\le 256$ vs $y=1$ $(256>1)$

(Step4)
$16>a^2$인지 $16\le a^2$인지 불확실하다.
ⅰ) $16>a^2$ 와 ⅱ) $16\le a^2$ 둘 다 해본다.

ⅰ) $16>a^2$ ⇔ $a=2,\ 3$
$1+4+a^2+a+1<20$
∴ 성립하지 않음

ⅱ) $16\le a^2$ ⇔ $a\ge 4$
$1+4+16+a+1=22+a$
∴ $20\le 22+a\le 40$
⇔ $4\le a\le 18$
∴ 15개

Analysis

일상생활에서는 여러 가지 경우 중에서 확실히 정할 수 없으면 아무것도 안하는 것이 지극히 자연스러운 사고방식이다. 하지만 수학에서는 여러 가지 경우 중에서 정할 수 없다면 여러 가지 경우를 모두 다 해보는 것이 자연스럽고 논리적인 사고방식이다.

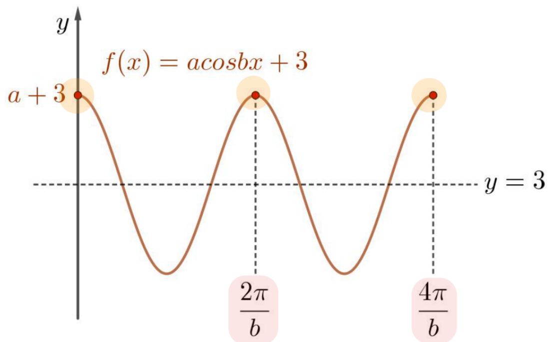
수능 4점

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 ○△X					

134. [2025년 수능 (공통) 10번]
닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수
$f(x)=a\cos bx+3$이 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a+b$의 최솟값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설



$f(x)=a\cos bx+3$는 주기가 $\frac{2\pi}{b}$이고
$x=0$에서 최댓값을 갖는다. ($\because a>0$)
$f(0)=a+3=13$
$\therefore a=10$

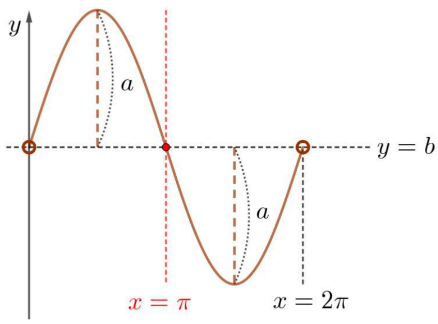
$x=\frac{\pi}{3}$에서도 최댓값을 가져야 하므로
$\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{b}n$ (단, n은 정수)
$\therefore b=6n$
$\therefore a+b$의 최솟값은
10+6=16

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 ○△X					

135. [2024년 6월 (공통) 20번]
5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

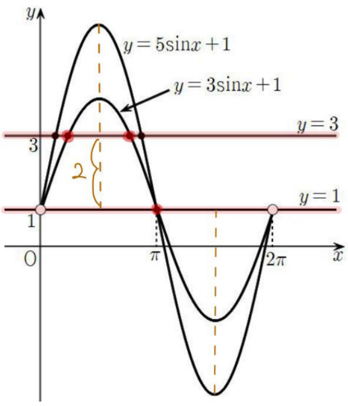
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

24



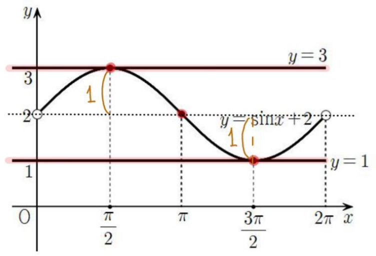
$y=a\sin x+b$와 $x=\pi$는 a, b의 값이 얼마이든
반드시 한 점 $(\pi,\ b)$에서만 만나므로
$y=1$ 또는 $y=3$과 2개의 점에서 추가로 더 만나야 한다.

ⅰ) b=1인 경우



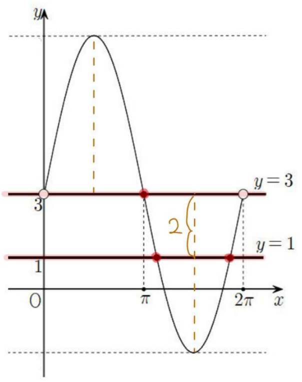
$\therefore$ a=3, 4, 5

ii) b=2인 경우



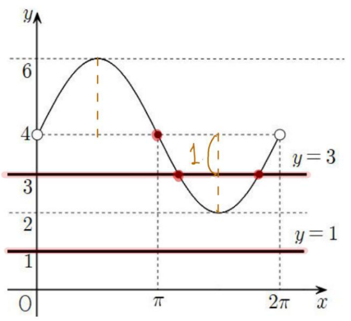
∴ a=1

iii) b=3인 경우



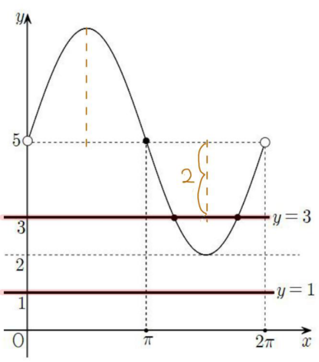
∴ a=3, 4, 5

iv) b=4인 경우



∴ a=2

v) b=5일 때



∴ a=3

∴ m=a+b=1+2=3 (∵ ii)

∴ M=a+b=3+5=8 (∵ iii, v)

∴ $M \times m = 8 \times 3 = 24$

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

161. [2024년 6월 (공통) 10번]
다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

(가) $3\sin A = 2\sin B$
(나) $\cos B = \cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

각이 2개 이상

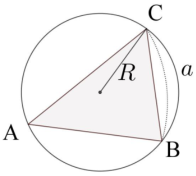
필연성 08

사인법칙 활용법 (각이 많을 때)

[단서] → [답]
✓ 2변 1각 → 1각
✓ 1변 2각 → 1변
✓ 외접원 등장

Skill **사인법칙 실전용 (2)**

✓ 외접원 있을 때



$a = 2R\sin A$

Skill **사인법칙의 흔적**

✓ 사인끼리의 실수배 or 비례식이 나오면
→ 변 길이의 비로 활용한다! (사인법칙의 본질)

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

→ $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

필연성 05

대칭 도형 → 반띵

✓ 이등변삼각형 → 직각 삼각형

필연성 09

코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

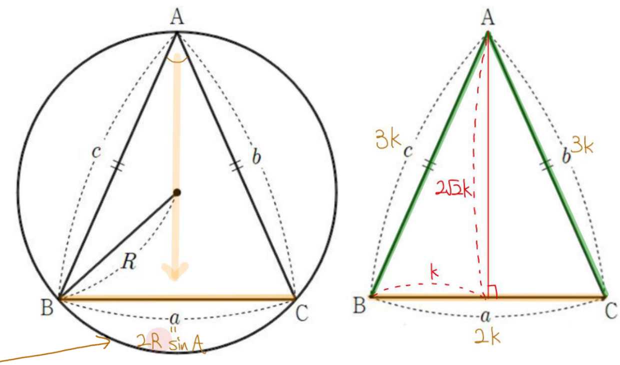
[단서] → [답]
✓ 2변 1각 → 1변
✓ 3변 → 각

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

구하는 것 : △ABC의 넓이
- 외접원 → 사인법칙
- 사인끼리의 실수배 → 사인법칙
- 변 길이에 대한 단서가 많다 → 코사인법칙

(step1) 조건 (가) 활용하기
꼭짓점 A, B가 마주보는 변의 길이 a, b에 대하여
$3\sin A = 2\sin B \Leftrightarrow \sin A : \sin B = a : b = 2 : 3$

(step2) 조건 (나) 활용하기
$\cos B = \cos C \Leftrightarrow \angle B = \angle C$
∴ △ABC는 b=c인 이등변삼각형
∴ $a = 2k,\ b = 3k,\ c = 3k$



{△ABC의 넓이} $= \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot 2\sqrt{2}k = 2\sqrt{2}k^2$

외접원의 넓이 9π → 외접원의 반지름 R=3
$a = 2k = 2R\sin A$를 활용하기 위해 $\sin A$값 필요

(step3) 변 길이에 대한 단서가 많다 → 코사인법칙

$\cos A = \frac{3^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{7}{9}$

$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

$a = 2k = 2R\sin A = 2 \cdot 3 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\therefore\ k = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

{△ABC의 넓이}
$= \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot 2\sqrt{2}k = 2\sqrt{2}k^2$
$= 2\sqrt{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}\sqrt{2}$

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 OΔX					

1등급

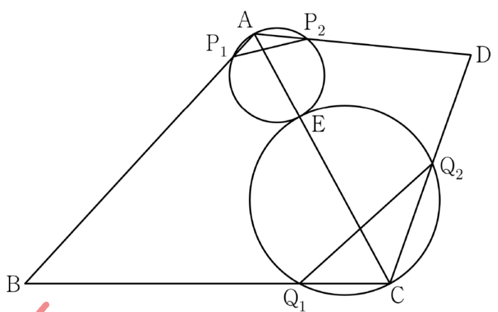
164. [2023년 6월 (공통) 13번]

그림과 같이

$\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3}$, $\angle DAB>\frac{\pi}{2}$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

도형의 필연성

필연성 08

사인법칙 활용법 (각이 많을 때)

[단서] → [답]

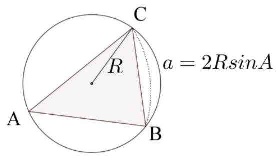
✓ 2변 1각 → 1각

✓ 1변 2각 → 1변

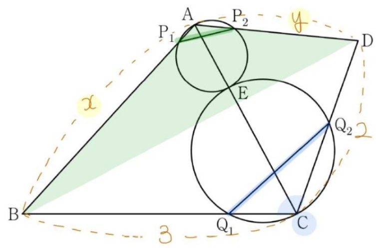
✓ 외접원 등장

Skill 사인법칙 실전용 (2)

✓ 외접원 있을 때



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설



구하는 것 : $\overline{AB}+\overline{AD}=x+y$

→ 관련도가 높은 단서: △ABD의 넓이가 2

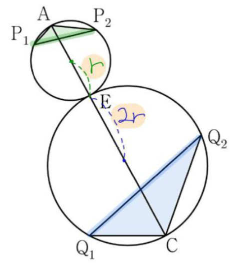
→ $\frac{1}{2}xy\sin A=2$

→ $\sin A$를 구할 생각을 해야 한다.

(step1) 사인법칙 실전용 (2)

두 원의 지름 $\overline{AE}:\overline{CE}=1:2$이므로

각 원의 반지름의 길이를 r, $2r$라고 하자.



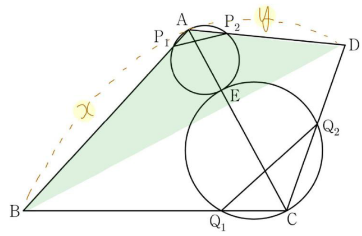
$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\cancel{r}\sin A:2(2\cancel{r})\sin C=3:5\sqrt{2}$

$\therefore \sin A=\frac{4}{5}$, $\cos A=-\frac{3}{5}$

$(\because \cos C=-\frac{1}{3}$, $\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3})$

(step2) △ABD의 넓이가 2

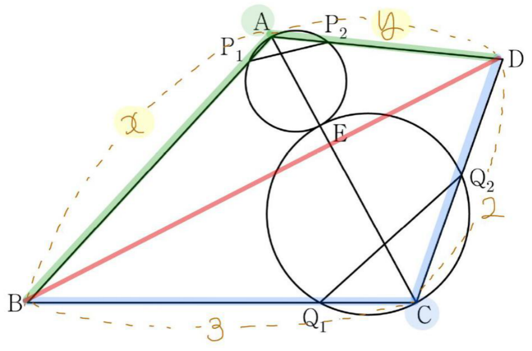


{△ABD의 넓이}$=2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}xy\sin A=\frac{1}{\cancel{2}}xy\frac{\cancel{4}}{5}=\cancel{2}$

$\therefore xy=5$

(step3) Double코사인법칙 (1) 통각
사각형의 대각 $\angle A$, $\angle C$에 대한 정보가 있다.
→ Double코사인법칙을 쓸 생각을 해야 한다.
(비록 사각형에 대한 외접원 상황은 아니지만
그에 준하는 조건과 상황이 나왔다)



$$\overline{BD}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos A$$
$$= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos C$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

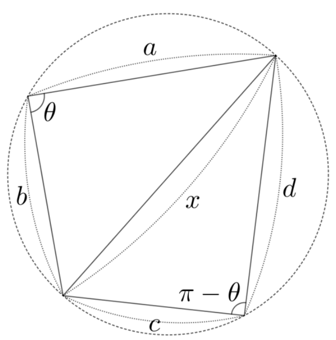
$$\therefore x^2 + y^2 = 11$$
$$\therefore (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 11 + 2 \cdot 5 = 21$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{AD} = x + y = \sqrt{21}$$

도형의 필연성

Skill Double코사인법칙 (1) 통각

✓ 원에 내접하는 사각형에서
쪼개지지 않은 각이 제시됐을 때
→ 대각의 합 = 180° 활용
→ 코사인법칙 2번 쓰기



$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$
$$= c^2 + d^2 - 2cd\cos(\pi - \theta)$$

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 OΔX					

193. [2023년 9월 (공통) 21번]

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

19

$$S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

$$\sum_{k=1}^{7} S_k = \sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}k^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)k\right\} = 644$$

$$= \frac{d}{2}\left(\frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6}\right) + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)\frac{7 \cdot 8}{2} = 7 \cdot 2^2 \cdot 23$$

$\therefore\ a_1 + 2d = 23$

a_7이 13의 배수이므로 자연수 m에 대하여

$a_7 = a_1 + 6d = 13m$

$\therefore\ 4d = 13m - 23 = -10,\ 3,\ 16,\ 29,\ \cdots$

모든 항이 자연수이므로 공차 d도 자연수이다.

$\therefore\ 4d = 16,\ d = 4,\ a_1 = 15$

$\therefore\ a_2 = a_1 + d = 15 + 4 = 19$

Analysis

등차수열의 합

공차가 d인 등차수열의

첫째항부터 n항까지의 합

① $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \times n$

② $S_n = \dfrac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2}$

③ $S_n = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)n$

Analysis

"자연수, 정수" 조건이 나오면

케이스 나열을 해서 문제를 풀 생각을 해내자.

특히 이때 약수 배수 관계를 활용해야 할 때가 많다.

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 OΔX					

194. [2022년 6월 (공통) 12번]

공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

> (가) $a_5 \times a_7 < 0$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$a_5 \times a_7 < 0$

⇔ $a_5 < 0,\ a_7 > 0$ (∵ 공차가 양수 3)

$$\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$$

⇔ $|a_7| + \cancel{|a_8|} + |a_9| + \cancel{|a_{10}|} + |a_{11}| + \cancel{|a_{12}|}$

$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + \cancel{|a_8|} + \cancel{|a_{10}|} + \cancel{|a_{12}|}$

⇔ $a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$

ⅰ) $a_6 \ge 0$

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + a_6$

⇔ $(a_6 + 3) + (a_6 + 9) + (a_6 + 15)$

$= 6 - (a_6 - 12) - (a_6 - 6) + a_6$

$\therefore\ a_6 = -\frac{3}{4}$ (모순)

ⅱ) $a_6 < 0$

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 - a_6$

⇔ $(a_6 + 3) + (a_6 + 9) + (a_6 + 15)$

$= 6 - (a_6 - 12) - (a_6 - 6) - a_6$

$\therefore\ a_6 = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ a_{10} = a_6 + 4 \cdot 3 = -\frac{1}{2} + 12 = \frac{23}{2}$

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

1등급

295. [2024년 수능 (공통) 15번] 대표 문항

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153
④ 160 ⑤ 167

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

해설 바로가기 ▸ 대표문항 79번

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

1등급

296. [2024년 6월 (공통) 22번]

수열 $\{a_n\}$은

$$a_2=-a_1$$

이고, $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-\sqrt{n}\times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n>0\text{인 경우})\\ a_n+1 & (\text{그 외의 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

231

$a_{15}=1$를 단서로 a_1을 구해야 하므로

점화식의 역주행 → 역주행 최적화 식 만들기

$$\begin{cases}a_{n+1}+\sqrt{n}\,a_{\sqrt{n}}=a_n\\ a_{n+1}-1=a_n\end{cases}$$

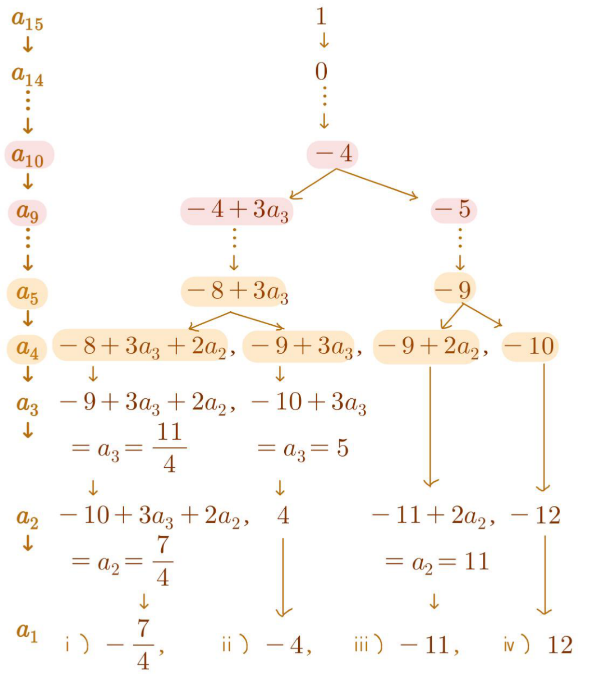
$\therefore a_{10}+3a_3=a_9\ (a_9>0)$ or $a_{10}-1=a_9\ (a_9\leq 0)$

$\therefore a_5+2a_2=a_4\ (a_4>0)$ or $a_5-1=a_4\ (a_4\leq 0)$

$\sqrt{n}$이 자연수인 경우는

$n=2^2,\ 3^2$일 때만 확인하면 된다.

(a_{15}를 단서로 a_1을 구해야 하므로 a_{16} 등은 필요 없음)



ⅰ) $a_1=-\frac{7}{4}$인 경우

$a_5+2a_2=a_4$ $(a_4>0)$

⇔ $-8+3a_3+2a_2=-8+3\cdot\frac{11}{4}+2\cdot\frac{7}{4}=\frac{15}{4}>0$

$a_{10}+3a_3=a_9$ $(a_9>0)$

⇔ $-4+3a_3=-4+3\cdot\frac{11}{4}=\frac{1}{4}>0$

$\therefore$ $a_1=-\frac{7}{4}$ 성립

ⅱ) $a_1=-4$인 경우

$a_5-1=a_4$ $(a_4\le 0)$

⇔ $-9+3a_3=-9+3\cdot 5=6>0$

$\therefore$ 모순

ⅲ) $a_1=-11$인 경우

$a_5+2a_2=a_4$ $(a_4>0)$

⇔ $-9+2a_2=-9+2\cdot 11=13>0$

$\therefore$ $a_1=-11$ 성립

ⅳ) $a_1=12$인 경우

$a_4=-10\le 0$, $a_9=-5\le 0$

$\therefore$ $a_1=12$ 성립

$\therefore$ 모든 a_1의 값의 곱은

$12\times(-11)\times\left(-\frac{7}{4}\right)=231$

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 ○△X					

297. [2024년 9월 (공통) 22번]
양수 k에 대하여 $a_1=k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2\times a_3<0$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$$ 이다.

$a_5=0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

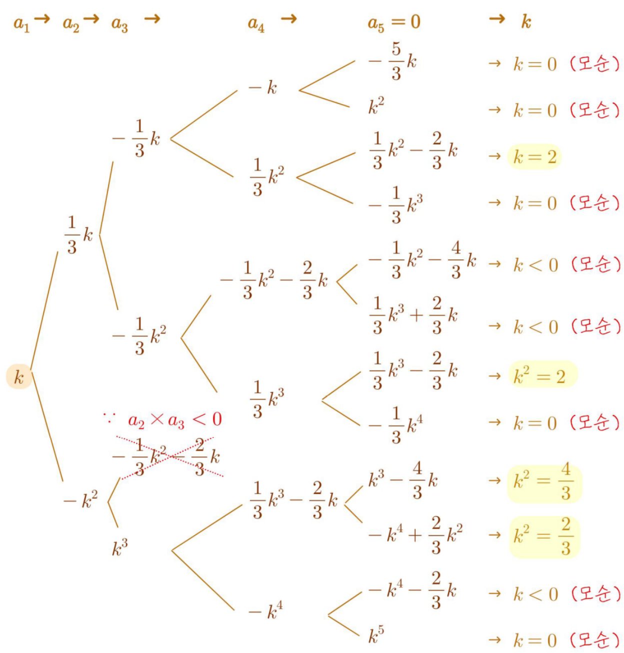
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

8

$$\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$$

⇔ $a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k=0$ or $a_{n+1}+ka_n=0$

$$\therefore\ a_{n+1}=\begin{cases} a_n-\frac{2}{3}k \\ -ka_n \end{cases}$$



$\therefore$ 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합은

$2^2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=8$