

기하학의 표현

수학 영역 —
기하



기하

기출의 파급효과

기하

Chapter 01. 필수 도형 정리와 이차곡선_11p

Chapter 02. 평면벡터_119p

Chapter 03. 공간도형_203p

Chapter 04. 예쁜 입체, 효율적인 좌표 잡기_263p

Chapter 05. 공간도형에서의 공간벡터 활용_281p

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 5년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 기출의 파급효과에는 기하 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예제 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

기하 기출 중 킬러는 물론 오답률이 높은 문제들을 예제로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 킬러를 풀 생각이 없어 과거의 킬러를 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다.

기출의 파급효과에는 평가원, 교육청, 사관학교 기출 중 가장 핵심이 되는 94문제를 담았습니다.

기출의 파급효과 기하의 경우 Chapter 5에 알아두면 좋은 교과외 내용도 담겨있습니다. 하지만 Chapter 5에 담긴 기출은 모두 교과내입니다. Chapter 5의 기출문제 해설에는 교과 내의 풀이와 함께 좌표, 공간벡터 내적, 외적을 활용한 풀이가 첨부되어 있습니다. 따라서 교과 외 내용에 관심이 없더라도 Chapter 5에 속한 기출문제는 다 풀길 바랍니다.

※ 문제 좌표에서 '나형' 또는 'A형' 또는 '인문계'라고 표시된 것을 제외하면 전부 '가형' 또는 'B형' 또는 '자연계' 기출입니다.

4. 예제 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 워크북 전자책도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 워크북은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 185문제로 구성되어 있습니다. 워크북의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

본권과의 호환성을 위하여 워크북에 담긴 기출 역시 본권의 목차를 따릅니다. 본권 학습을 하면서 워크북도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다. 본권을 잘 학습하셨다면 워크북에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

본권을 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다. 본권만으로도 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다. 이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(센 등등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 본권과 워크북을 '제대로' 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

간단한 교재 이용법

원활한 교재 이용을 위해 대단원, 중단원, 중소단원, 소단원 구분법을 소개하겠습니다.

대단원 제목입니다.

Chapter
01 필수 도형 정리와 이차곡선

대단원에 속한 중단원 제목입니다.

I 기본적인 도구

중단원에 속한 중소단원 제목입니다.

1. 대표적인 삼각형 넓이 구하는 방법

중소단원에 속한 소단원 제목입니다.

(1) 높이×밑변

위를 참고하여 학습하신다면 Chapter 내용이 더욱 유기적으로 연결될 것입니다. 헛갈린다면 Chapter를 순서대로 읽어나가셔도 전혀 문제가 없습니다.

원활한 교재 이용을 위해 예제, 예제 해설 구분법을 소개하겠습니다.

본문과 함께 소개되는 예제입니다. 칼럼을 읽다 보면 중간중간에 예제들이 등장합니다.

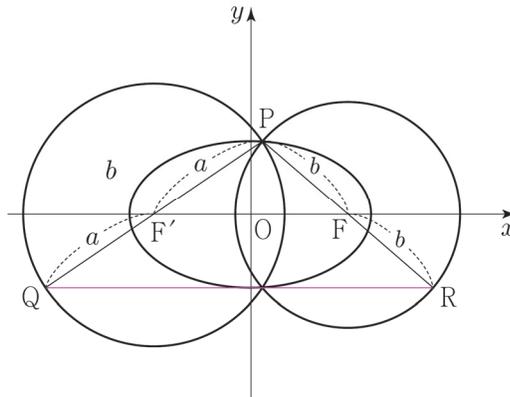
예제(15) 18학년도 사관 24번

좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)이라 하자. 이 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P 에 대하여 점 F' 을 중심으로 하고 점 P 를 지나는 원과 직선 PF' 이 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 Q 라 하고, 점 F 를 중심으로 하고 점 P 를 지나는 원과 직선 PF 가 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 R 라 할 때, 삼각형 PQR 의 둘레의 길이를 구하시오. [3점]

본문과 함께 소개되는 예제 해설입니다. 자세하고 본문에서 배운 도구와 태도를 일관적으로 적용합니다.



1. 타원의 정의를 이용하자. 장축의 길이는 10이므로 $\overline{PF'} = a$, $\overline{PF} = b$ 라 하면 $a + b = 10$ 이다. $c^2 = 25 - 9 = 16$ 이므로 $c = 4$ 이다.



2. $\triangle PQR$ 에서 점 F 는 \overline{PR} 의 중점, 점 F' 은 \overline{PQ} 의 중점이므로 중점연결정리에 의하여 $\overline{QR} = 2\overline{FF'}$ 이다. 따라서 $\triangle PQR$ 의 둘레의 길이는 $\triangle PFF'$ 의 둘레의 길이의 두 배이므로 $2 \times (a + b + 2c) = 2 \times (10 + 8) = 36$ 이다.

답은 36!!

해설 활용법

1. 문제를 완벽하게 풀었다고 생각하더라도 해설을 읽어보세요. 특히, 예제는 해설까지 본문의 연장선이라 생각하시면 됩니다. 본문에서 설명한 일관된 태도와 도구를 적용하면서도 다양한 관점으로 접근하므로 본인의 풀이와 비교하면서 꼼꼼히 읽어보시길 바랍니다.
2. 해설 사이사이에 색을 추가한 글씨로 태도를 적어놨습니다. 실전에서는 사소한 태도에서 등급이 갈리므로 태도도 매우 중요합니다.
3. 문제 해결에 있어서 가장 중요한 것은 조건의 우선순위입니다. 즉, 먼저 적용해야 할 조건이 출제 의도로서 존재하고, 이러한 우선순위는 단계적 풀이와 연결됩니다.

수학을 잘하는 사람일수록 풀이과정이 깔끔한 이유도 명확한 단계를 밟아나가기 때문입니다. 예제 해설을 보면서 어떤 조건을 우선적으로 적용하는지, 어떠한 단계를 밟아나가는지에 주목하세요.

4. 해설은 대부분 학생이 스스로 이해할 수 있도록 친절하면서도, 필연적이고 일관된 논리를 통해 전개됩니다. 어려운 문항일수록 어떠한 필연성과 일관성을 통해 풀어나가는지 기대하고 해설을 보면 좋을 것 같습니다.

파급의 기출효과



cafe.naver.com/spreadeffect
파급의 기출효과 NAVER 카페

기출의 파급효과 시리즈는 기출 분석서입니다. 기출의 파급효과 시리즈는 국어, 수학, 영어, 물리학 1, 화학 1, 생명과학 1, 지구과학 1, 사회·문화가 예정되어 있습니다.

준킬러 이상 기출에서 얻어갈 수 있는 '꼭 필요한 도구와 태도'를 정리합니다.

'꼭 필요한 도구와 태도' 체화를 위해 관련도가 높은 준킬러 이상 기출을 바로바로 보여주며 체화 속도를 높입니다. 단시간 내에 점수를 극대화할 수 있도록 교재가 설계되었습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다.

교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

기출의 파급효과 팀 소속 오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다.

위 저자 분들의 컨텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

더 궁금하시다면 <https://cafe.naver.com/spreadeffect/15>에서 확인하시면 됩니다.

모킹버드



mockingbird.co.kr

수능 대비 온라인 문제은행

모킹버드는 수능 대비에 초점을 맞춘 문제은행 서비스입니다. AI 문항 추천 알고리즘을 통해 이용자의 학습에 최적화된 맞춤형 모의고사를 제공하여 효율적인 수능 성적향상을 목표로 합니다. 수학, 과탐을 서비스 중입니다.

문항 제작과 검수에 기출의 파급효과 팀뿐만 아니라 지인선님을 포함한 시대/강대/메가 콘텐츠 팀에서 근무하였고 여러 문항 공모전에서 수상한 이력이 있는 여러 문항 제작자들이 함께 하였습니다.

웹 개발과 알고리즘 개발에는 서울대 컴공, 카이스트 전산학부 출신 개발자들이 참여하였습니다.

모킹버드를 통해 싸고 맛있는 실모를 온라인으로 뽑아 풀어보고,

AI 문항 추천 알고리즘 기술의 도움을 받아 학습 효율을 극대화해보세요.

가입만 해도 기출은 무제한 무료 이용 가능하고, 자작 실모 1회도 무료로 제공됩니다.

Chapter
02

평면벡터



Chapter 02 평면벡터

‘벡터 회전’을 이용하여 내적의 최대, 최소를 구하는 것은 평가원 기하 준킬러, 킬러에 제일 많이 나오는 소재이다. $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최대, 최소를 바로 물으면 좋겠지만 대부분은 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 꼴처럼 단순히 그림만으로 상황을 파악하기 힘들게 주어진다. 이때 ‘벡터 쪼개기’와 ‘벡터 내적 조건 해석’을 잘 이용하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 형태로 바꿔줘야 한다. 이 과정이 자유자재로 된다면 벡터의 내적도 공포의 대상이 아니다.

마음을 굳게 먹자. 평가원 기하 준킬러, 킬러를 확실히 정복할 수 있는 만큼 Chapter 2의 내용은 다른 Chapter에 비해 방대하다. ‘벡터 쪼개기’, ‘벡터 내적 조건 해석’, ‘벡터 회전’을 배우기 전에 기본적인 도구부터 살펴보자.

I 기본적인 도구

기본적인 도구에서는 동점과 정점의 구별, 벡터의 평행이동, 벡터의 정사영에 대해 다룬다.

1. 동점, 정점 구별

‘동점’, ‘정점’은 Chapter 2뿐만 아니라 이 교재 전반에 나오는 용어이다.

동점은 말 그대로 움직이는 점이다. 동점 P가 이루는 자취로는 대표적으로 좌표평면에서는 원, 호, 직선 등이 있으며 좌표공간에서는 구, 구면, 원뿔의 밑면의 테두리, 직선 등이 있다.

정점은 말 그대로 고정된 점이다. 예를 들어 좌표평면에서 점 A(1, 2)이나 좌표공간에서 점 B(1, 2, 3)처럼 구체적인 좌표가 주어진 경우 정점이라고 부른다. 하지만 구체적인 좌표가 안 주어진 경우에도 ‘정점’인 경우가 있다. 좌표평면이나 좌표공간에서 점 C를 고정시켜도 문제 상황이 동일하다면 점 C도 ‘정점’이라고 할 수 있다.

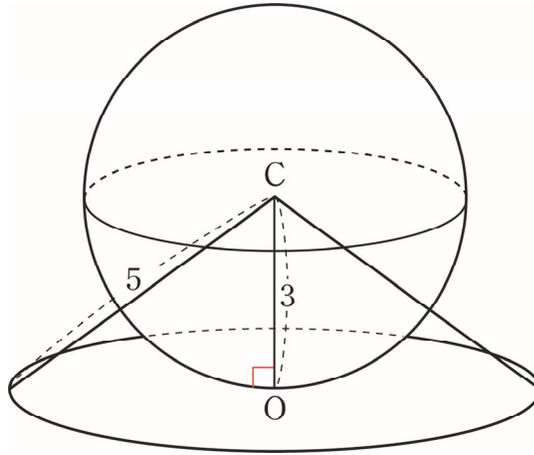
문제 상황이 동일한지의 여부는 직관적으로 판단할 수 있다. 자작 문제로 예를 들어 보겠다.

자작문제

좌표공간에서 구 $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$ 위의 점 P가 있다. 구의 중심을 점 C(0, 0, 3)이라고 할 때, $\overline{CX} = 5$ 를 만족시키며 xy 평면에 있는 점 X가 있다. 점 X와 점 P 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은?

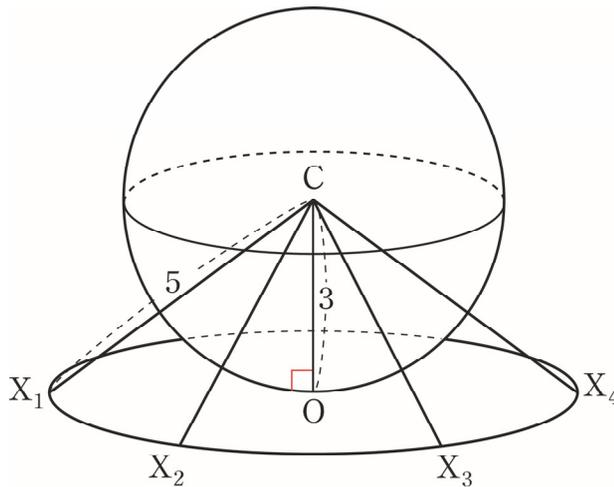


1. 구 $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$ 가 원점 O 에서 xy 평면에 접하므로 그림도 어렵지 않게 그릴 수 있다. 점 C 에서 xy 평면에 내린 수선의 발이 점 O 이므로 **직각 표시**를 꼭 해주자.



점 X 는 $\overline{CX} = 5$ 를 만족시키며 xy 평면 위에 있으므로 점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원 위에 존재한다.

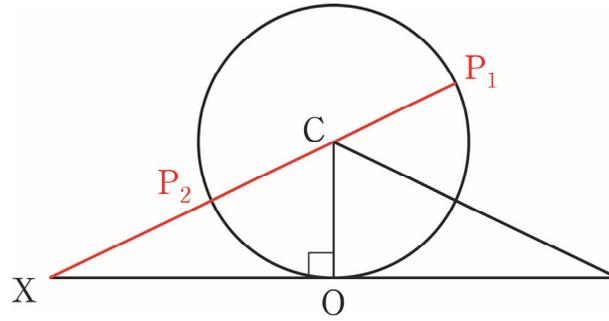
2.



점 X_1 , 점 X_2 , 점 X_3 , 점 X_4 모두 점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원 위에 존재하므로 점 X 위치의 후보가 된다. 하지만 직관적으로 **점 X 가 네 개의 점 중 어떤 점에 고정하더라도 점 X 와 점 P 사이의 거리의 최댓값, 최솟값은 일정할 것이기에 문제 상황이 동일하다**는 것을 알 수 있다. 따라서 **점 X 는 '정점'**이라 할 수 있다.

그에 반해 점 P 는 구 $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$ 위의 위치에 따라 점 X 와 점 P 사이의 거리의 최댓값, 최솟값이 변한다. 따라서 **점 P 는 자취가 구 $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$ 인 '동점'**이라 할 수 있다.

3.



입체의 평면화가 쉽도록 점 X를 점 X_1 에 고정시켰다.

\overline{XP} 가 최댓값, 최솟값을 가질 때는 점 X, 점 C, 점 P가 일직선 위에 있다.

점 P가 점 P_1 위치에 있을 때 \overline{XP} 가 최댓값을 가지며 점 P가 점 P_2 위치에 있을 때 \overline{XP} 가 최솟값을 가진다. 따라서 \overline{XP} 의 최댓값은 $5 + 3 = 8$ 이며 최솟값은 $5 - 3 = 2$ 이다.

comment

대부분 이 정도 직관은 갖고 있겠지만 직관이 부족하더라도 걱정마라.

의심되면 점 X를 점 X_1 뿐만 아니라 점 X_2 , 점 X_3 , 점 X_4 등의 위치에 '고정'시키며 답이 같은지 확인하면 된다.

시간은 좀 걸리겠지만 직관이 천천히 쌓일 것이다. Chapter 2에 있는 문제를 다 풀어보면 준수한 수준의 직관이 후천적으로도 생길 것이다.

(2) 시점과 종점 맞추기

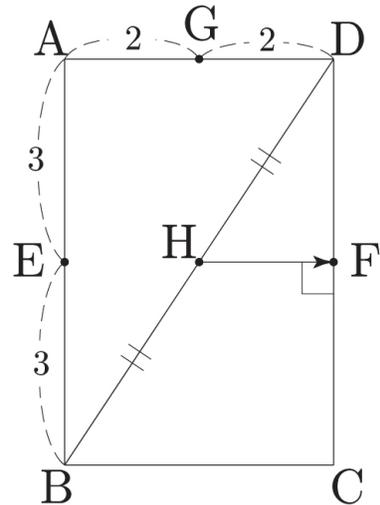
주로 벡터의 합 조건을 다룰 때는 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 꼴처럼 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞춰주는 것이 다루기 쉽다. 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추는 방법에는 크게 수식적인 방법과 도형적인 방법이 있다. 둘 다 자유자재로 다룰 줄 알아야 한다.

수식적으로 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추는 대표적인 방법은 벡터의 덧셈을 이용한 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC}$ 이다. 내적 조건도 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) \cdot \overrightarrow{PB}$ 처럼 종점을 맞춰줄 수 있다.

도형적으로 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추는 방법은 평행이동이다.

$\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF}$ 를 간단히 하면? \overrightarrow{EG} 를 평행이동하면 \overrightarrow{BH} 이므로 $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{BF}$ 로 간단히 할 수 있다.

점 E, 점 F, 점 G, 점 H가 모두 정점이라 그리 어렵지 않았을 것이다. 하지만 동점이 섞인다면 어떨까? 원점 O는 정점이고 점 A, 점 B가 동점이라면 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 를 만족하는 동점 C의 자취의 영역은 어떻게 구할까?



이후에 배울 '벡터 쪼개기'를 이용하여

$$\overrightarrow{OC} = 2 \times \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = 2 \times \overrightarrow{OM} \text{ 로 바꾸면 쉽지 않을까?}$$

아니다. 점 A, 점 B가 동점이기에 점 M도 동점이다.

동점과 동점의 중점이 그리는 자취를 구해야 하는데 대부분의 문제 상황에서 쉽지 않은 일이다.

따라서 최선의 수단은 가장 기본적인 도구인 벡터 평행이동으로 동점 C의 자취의 영역을 직접 그리는 것이다. 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞추기로 그림을 그리다 보면 선분이나 호를 연장하거나 평행이동을 해야 하는데 그림을 잘 못 그린다면 매우 힘들고 실수하기 쉽다.

어떻게 하면 벡터 평행이동의 한 벡터의 시점과 다른 벡터의 종점을 맞춰가며 자취의 영역을 쉽고 정확하게 그릴 수 있을까?

점 A가 \widehat{PQ} 나 \overline{PQ} 위를 움직이고 점 B가 \widehat{RS} 나 \overline{RS} 위를 움직인다고 가정해보자.

먼저 \overrightarrow{OA} 의 종점인 점 A를 점 P에 고정하자. \overrightarrow{OB} 를 평행이동하여 시점 O을 \overrightarrow{OA} 의 종점 P에 맞추고 \overrightarrow{OB} 를 그리자. 이는 곧 점 C의 자취의 '테두리'의 일부이다.

그 이유는 \overrightarrow{OB} 를 평행이동하여 시점 O을 \overrightarrow{OA} 의 종점 P에 맞추면 종점 B는 점 C에 맞춰져 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PC}$ 이다. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PC}$ 이므로 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$ 이기 때문이다.

이제 \overrightarrow{OA} 의 중점인 점 A를 점 Q에 고정하자. \overrightarrow{OB} 를 평행이동하여 시점 O을 \overrightarrow{OA} 의 중점 Q에 맞추고 \overrightarrow{OB} 를 그리자. 이는 곧 점 C의 자취의 '테두리'의 일부이다.

그 이유는 \overrightarrow{OB} 를 평행이동하여 시점 O을 \overrightarrow{OA} 의 중점 Q에 맞추면 중점 B는 점 C에 맞춰져 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{QC}$ 이다. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{QC}$ 이므로 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QC}$ 이기 때문이다.

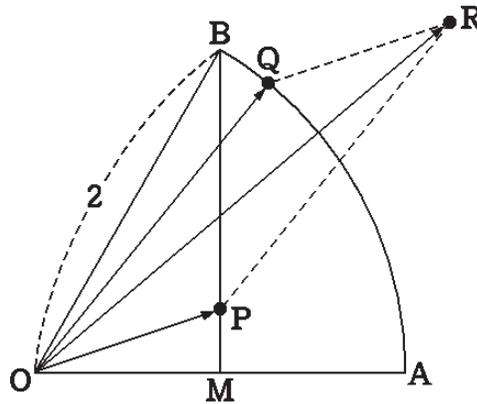
점 C의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌을 것이다. 이제 점 A를 점 P와 점 Q 사이를 움직여가며 '테두리' 내부를 색칠하고 점 C의 자취의 영역을 완성 시키자.

점 A를 경계점에 고정하여 점 C의 자취의 영역의 '테두리'를 먼저 그리면 점 C의 자취의 영역을 구하기가 훨씬 쉽고 정확하게 그릴 수 있다. 자동차 그림을 그릴 때 자동차의 '테두리'를 먼저 스케치하고 자동차 '테두리' 내부를 색칠하는 것이 더 쉽게 자신이 원하는 자동차 그림을 그릴 수 있듯이 말이다.

자취의 영역의 '테두리'를 먼저 그리지 않고 자취의 영역 내부 색칠을 먼저 하면 자취의 영역을 그릴 때 실수가 매우 잦다. 따라서 꼭 자취의 영역의 '테두리'부터 완성하자! 글로만 보면 이해가 잘 안 될 것이다. 이제 문제를 통해 적용해보도록 하겠다.

예제(1) 14학년도 사관 15번

그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB에서 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 점 P는 두 선분 OM과 BM 위를 움직이고, 점 Q는 호 AB 위를 움직인다. $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 를 만족시키는 점 R가 나타내는 영역 전체의 넓이는? [4점]



- ① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{3}$

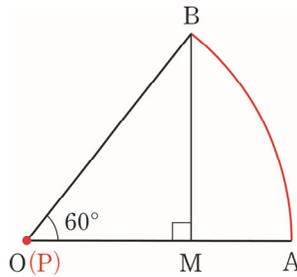


1. 점 P가 두 선분 \overline{OM} 과 \overline{BM} 위를 움직인다. 점 P가 \overline{OM} 위를 움직일 때와 점 P가 \overline{BM} 위를 움직일 때로 각각 나누어 점 R가 나타내는 자취의 영역을 구해보자.

점 P가 \overline{OM} 위를 움직일 때 점 R가 나타내는 자취의 영역을 구해보자.

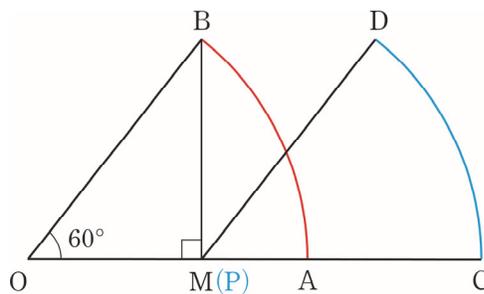
점 P를 점 O, 점 M에 각각 고정하고 점 R이 나타내는 자취의 영역의 '테두리'를 구해보도록 하겠다.

\overline{OP} 의 종점인 점 P를 점 O에 고정하자.



$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서 \overrightarrow{OP} 의 종점인 점 P를 점 O에 고정하고 \overrightarrow{OQ} 를 그리면 \widehat{AB} 가 그려진다.

\overline{OP} 의 종점인 점 P를 점 M에 고정하자.



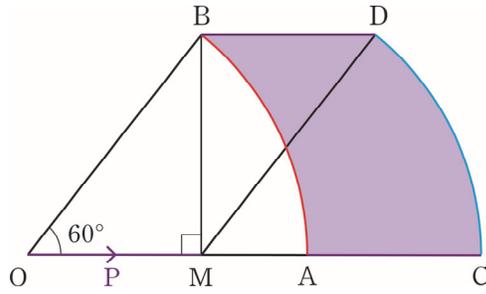
$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서 \overrightarrow{OP} 의 종점인 점 P를 점 M에 고정하고 \overrightarrow{OQ} 를 그리면 \widehat{CD} 가 그려진다.

점 P가 \overline{OM} 위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌다.

테두리의 꼭짓점 A, B, C, D는 어떻게 있을까?

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서 \widehat{AB} , \widehat{CD} 는 점 Q의 자취인 \overline{ABOLDB} 를 따왔으니

점 P의 자취인 \overline{OM} 을 써먹을 차례이다.

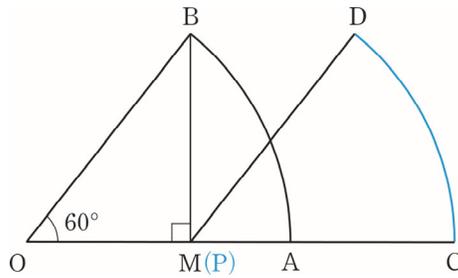


점 A와 점 C, 점 B와 점 D를 이을 때, 점 P의 자취인 \overline{OM} 을 이용하면 된다.
따라서 점 P가 \overline{OM} 위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역은 위와 같다.

2. 점 P가 \overline{BM} 위를 움직일 때 점 R가 나타내는 자취의 영역을 구해보자.

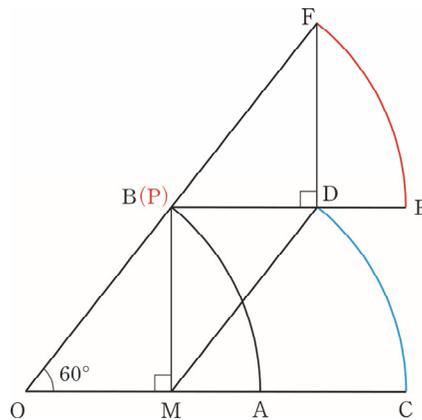
점 P를 점 B, 점 M에 각각 고정하고 점 R가 나타내는 자취의 영역의 ‘테두리’를 구해보도록 하겠다.

\overline{OP} 의 종점인 점 P를 점 M에 고정하자.



$\overline{OR} = \overline{OP} + \overline{OQ}$ 에서 \overline{OP} 의 종점인 점 P를 점 M에 고정하고 \overline{OQ} 를 그리면 \widehat{CD} 가 그려진다.

\overline{OP} 의 종점인 점 P를 점 B에 고정하자.



$\overline{OR} = \overline{OP} + \overline{OQ}$ 에서 \overline{OP} 의 종점인 점 P를 점 B에 고정하고 \overline{OQ} 를 그리면 \widehat{EF} 가 그려진다.

점 P가 \overline{BM} 위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌다.

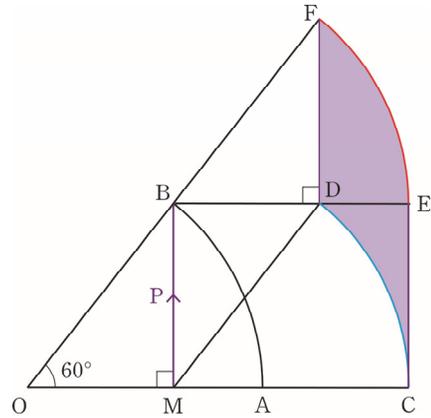
테두리의 꼭짓점 C, D, E, F는 어떻게 이을까?

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서 \widehat{CD} , \widehat{EF} 는 점 Q의 자취인

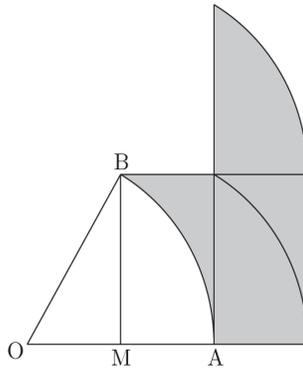
\widehat{AB} 를 따왔으니 점 P의 자취인 \overline{BM} 을 써먹을 차례이다.

점 C와 점 E, 점 D와 점 F를 이을 때,
점 P의 자취인 \overline{BM} 을 이용하면 된다.

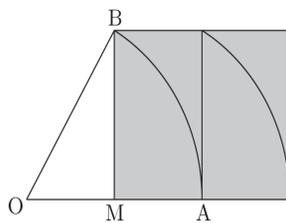
점 P가 \overline{BM} 위를 움직일 때 점 R의 자취의 영역은
오른쪽 그림과 같다.



3. 결론적으로 점 R의 자취의 영역은 아래와 같다.



위 영역의 넓이는 아래와 같이 가로의 길이가 2이고 세로의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 직사각형의 넓이와 같다.



따라서 구하는 넓이는 $2\sqrt{3}$ 이다.

답은 ③!!

comment

동점 2개일 때, 자취의 영역을 그릴 때는 동점 하나를 경계점에 고정한 후에 자취의 영역의 '테두리'부터 그리자. 이후에 동점을 경계점 사이를 움직여가며 '테두리' 내부를 색칠한다. '테두리'의 존재로 색칠되는 영역을 예측하기 쉬울 것이다. 이제 14학년도 사관 문제가 어떻게 진화하는지 보러 가자.

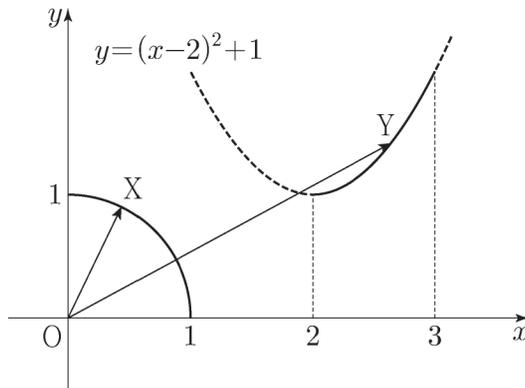
예제(2) 20학년도 9월 평가원 19번

좌표평면 위에 두 점 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ 이 있다. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 의 호 AB 위를 움직이는 점 X 와 함수 $y = (x-2)^2 + 1$ ($2 \leq x \leq 3$)의 그래프 위를 움직이는 점 Y 에 대하여

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$$

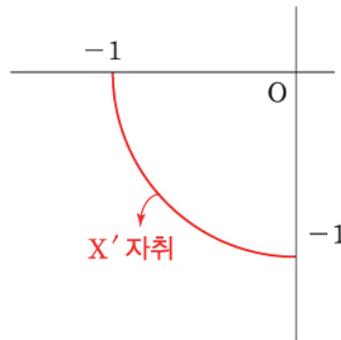
를 만족시키는 점 P 가 나타내는 영역을 R 라 하자. 점 O 로부터 영역 R 에 있는 점까지의 거리의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M^2 + m^2$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]

- ① $16 - 2\sqrt{5}$ ② $16 - \sqrt{5}$ ③ 16 ④ $16 + \sqrt{5}$ ⑤ $16 + 2\sqrt{5}$

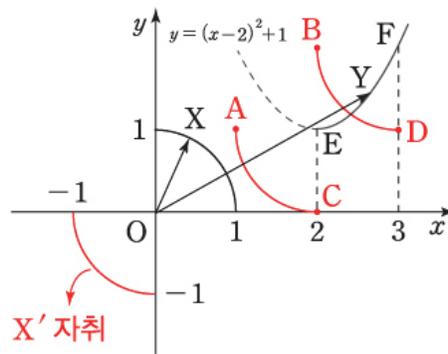




1. $-\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX'}$ 라고 하자. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX'}$ 이고 점 X'의 자취를 그리면 다음과 같다.



이를 토대로 점 P가 나타내는 자취의 영역을 그려보자.



그림과 같이 동점 Y를 점 E, 점 F에 각각 고정하고 점 P이 나타내는 자취의 '테두리'를 그려주자.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX'}$ 에서 \overrightarrow{OY} 의 종점인 점 Y를 점 E에 고정하고 $\overrightarrow{OX'}$ 를 그리면 \widehat{AC} 가 그려진다.

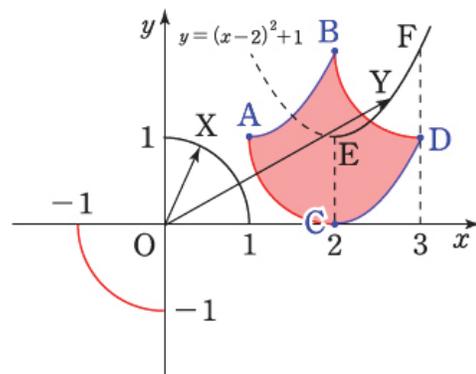
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX'}$ 에서 \overrightarrow{OY} 의 종점인 점 Y를 점 F에 고정하고 $\overrightarrow{OX'}$ 를 그리면 \widehat{BD} 가 그려진다.

2. 테두리의 꼭짓점 A, B, C, D는 어떻게 이룰까?

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX'}$ 에서 \widehat{AC} , \widehat{BD} 는 점 X'의 자취를 따랐으니 점 Y의 자취를 이용할 차례이다.

점 A와 점 B, 점 C와 점 D를 이룰 때,
점 Y의 자취를 이용하면 된다.

따라서 점 P가 나타내는 자취의 영역은 오른쪽 그림과 같다.



3. \overrightarrow{OP} 의 최솟값 $m = \overline{OE} - 1 = \sqrt{5} - 1$ 이므로 $m^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ 이다.

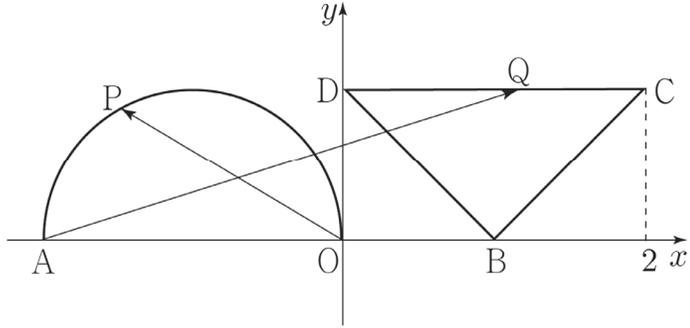
\overrightarrow{OP} 의 최댓값 $M = \overline{OD} = \sqrt{10}$ 이므로 $M^2 = 10$ 이다.

따라서 $m^2 + M^2 = 16 - 2\sqrt{5}$ 이다.

답은 ①!!

예제(3) 21년 4월 교육청 기하 29번

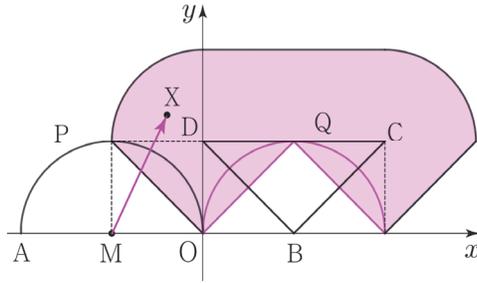
좌표평면 위의 네 점 $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$, $C(2, 1)$, $D(0, 1)$ 이 있다. 반원이 호 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ ($0 \leq y \leq 1$) 위를 움직이는 점 P 와 삼각형 BCD 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AQ}|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M^2 + m^2 = p + 2\sqrt{q}$ 일 때, $p \times q$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]





1. 원의 중심을 M이라 하자. $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AQ}$ 이다.
 $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{MP}$ 중점의 자취를 그려보자.

그림과 같이 동점 Q를 점 B, C, D에 각각 고정하고 \overrightarrow{MP} 를 그리면 점 X이 나타내는 자취의 '테두리'가 만들어진다. 자취의 '테두리'의 꼭짓점을 이을 때는 \overrightarrow{AQ} 의 자취인 \overline{BD} , \overline{CD} , \overline{BC} 를 이용하면 된다.



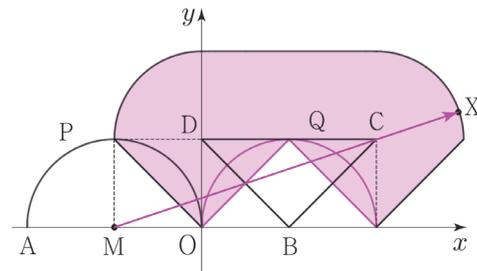
색칠된 영역 및 경계가 점 X의 자취이다.

이때, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MA}$ 이므로 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{MX}$ 이다.

$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AQ}| = |\overrightarrow{MX}|$ 이므로 $|\overrightarrow{MX}|$ 의 값의 최대, 최소를 구하자.

2. (1) $|\overrightarrow{MX}|$ 의 값의 최댓값

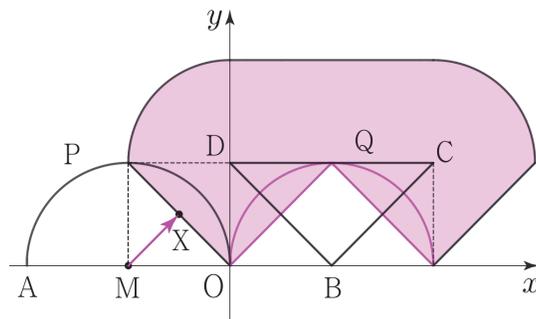
$|\overrightarrow{MX}|$ 의 값이 최대일 때, 선분 MX는 점 C를 지난다.



이때, $|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{\{2 - (-1)\}^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{CX}| = 1$ 이므로 $M = \sqrt{10} + 1$ 이다.

- (2) $|\overrightarrow{MX}|$ 의 값의 최솟값

점 X는 점 M에서 원점 O와 점 (-1, 1)을 이은 선분에 내린 수선의 발이다.



이때, 이 선분은 $y = -x$ 의 일부이므로 $M(-1, 0)$ 와 이 선분 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

따라서 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

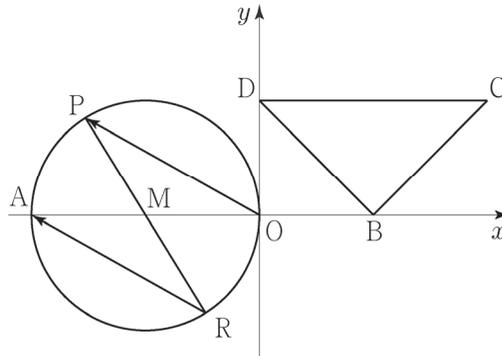
이때, $M^2 + m^2 = (\sqrt{10} + 1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (11 + 2\sqrt{10}) + \frac{1}{2} = \frac{23}{2} + 2\sqrt{10}$ 이므로

$p = \frac{23}{2}$, $q = 10$ 에서 $p \times q = 115$ 이다.

답은 115!!

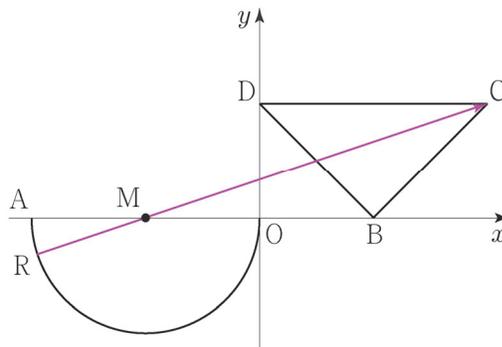
※ 다른 풀이

1. 벡터 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AQ}$ 는 직접 관찰하기 힘들다. 반원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ ($0 \leq y \leq 1$) 의 중심을 $M(-1, 0)$ 이라 하고, 두 점 O, P 를 점 M 에 대하여 대칭이동시켜서 관찰하자.



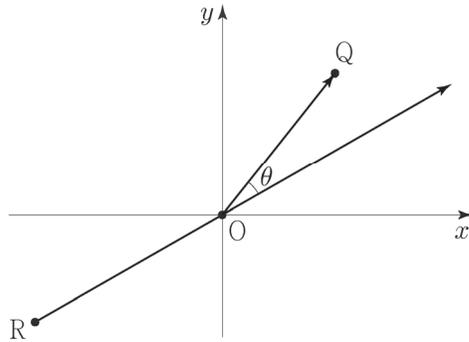
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RA}$ 이므로 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{RQ}$ 이다. $|\overrightarrow{RQ}|$ 의 값이 최대일 때와 최소일 때의 상황을 살펴보자.

2. $|\overrightarrow{RQ}| = |\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MQ}| \leq 1 + |\overrightarrow{MQ}|$ 이므로 $|\overrightarrow{MQ}|$ 의 값이 최대일 때의 상황을 찾아보자.

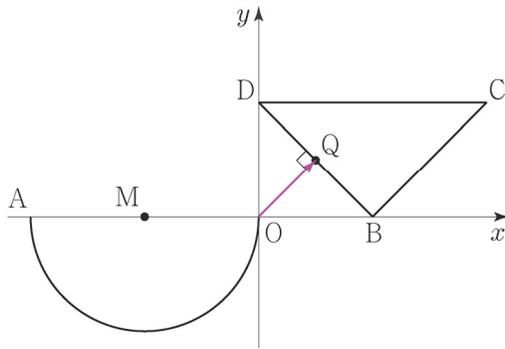


삼각형 위의 점 Q 가 점 C 에 위치할 때, $|\overrightarrow{MQ}|$ 의 값이 최대이다. $M(-1, 0)$, $C(2, 1)$ 에서 $|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ 이므로 $M = \sqrt{10} + 1$ 이다.

3. $|\overrightarrow{RQ}| = |\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OQ}|$ 이다. 이때, 제3사분면 위의 점 R과 제1사분면 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OQ}$ 가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$ 보다 크므로 $\overrightarrow{RO}, \overrightarrow{OQ}$ 가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$ 보다 작다.



따라서 $|\overrightarrow{RQ}| = |\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OQ}| \geq |\overrightarrow{OQ}|$ 이고, 점 R가 원점 O에 위치할 때, 등호가 성립한다. $|\overrightarrow{OQ}|$ 의 값이 최소일 때의 상황을 찾아보자.



삼각형 위의 점 Q가 점 O에서 선분 BD에 내린 수선의 발에 위치할 때, $|\overrightarrow{OQ}|$ 의 값이 최소이다. $\overline{OB} = \overline{OD} = 1$ 이므로 점 Q가 선분 BD의 중점일 때 $|\overrightarrow{OQ}|$ 의 값이 최소이고 그 값은 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

따라서 $M^2 + m^2 = (\sqrt{10} + 1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (11 + 2\sqrt{10}) + \frac{1}{2} = \frac{23}{2} + 2\sqrt{10}$ 이므로

$p = \frac{23}{2}, q = 10$ 에서 $p \times q = 115$ 이다.

답은 115!!

예제(4) 19학년도 수능 29번

좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1. 당황스럽다. 우리는 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 처럼 동점이 2개일 때만 다뤄보고 $\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 처럼 동점이 3개일 때는 다뤄보지 못했다. 하지만 상관없다. 두 개의 벡터의 합의 중점이 이루는 자취의 영역만을 먼저 구한 후에 나머지 하나의 벡터를 마저 고려해 주며 최종적인 자취의 영역을 구하면 된다. 따라서 $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR})$ 에서 점 S의 자취의 영역을 먼저 구하고 $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 에서 점 X의 자취의 영역을 구해보자.

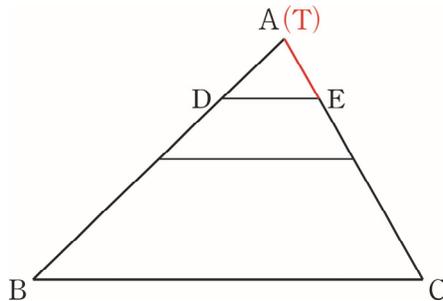
$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR})$ 로 두고 점 S의 자취의 영역을 구해보자.

\overline{AB} 를 1:3으로 내분하는 점을 점 D라고 하자. 점 P는 \overline{AB} 위를 움직이므로 $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AP}$ 로 두면 점 T는 \overline{AD} 위를 움직인다.

\overline{AC} 를 1:3으로 내분하는 점을 점 E라고 하자. 점 R는 \overline{CA} 위를 움직이므로 $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AR}$ 로 두면 점 U는 \overline{AE} 위를 움직인다.

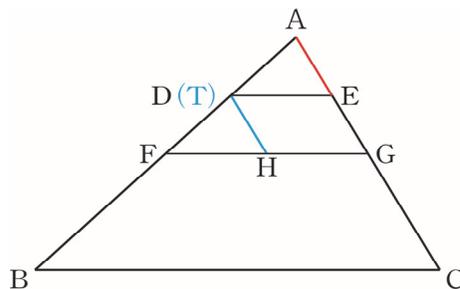
$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AU}$ 로 표현할 수 있다.

\overrightarrow{AT} 의 중점인 점 T를 점 A에 고정하자.



$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AU}$ 에서 \overrightarrow{AT} 의 중점인 점 T를 점 A에 고정하고 \overrightarrow{AU} 를 그리면 \overline{AE} 가 그려진다.

\overrightarrow{AT} 의 중점인 점 T를 점 D에 고정하자.



$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AU}$ 에서 \overrightarrow{AT} 의 중점인 점 T를 점 D에 고정하고 \overrightarrow{AU} 를 그리면 \overline{DH} 가 그려진다.

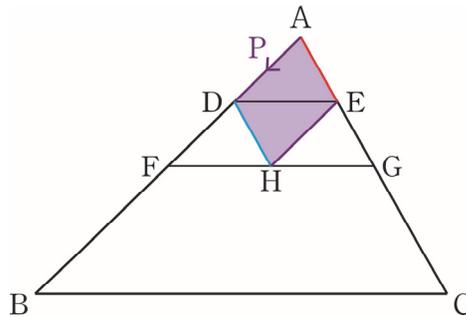
그 이유는 다음과 같다. \overrightarrow{AU} 를 평행이동하여 시점 A를 \overrightarrow{AT} 의 중점 D에 맞추면 중점 U는 점 S에 맞춰져 $\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{DS}$ 이다. $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AU} = \overrightarrow{DS}$ 이므로 $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AU} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS}$ 이다.

점 S의 자취의 영역의 '테두리'가 만들어졌다.

테두리의 꼭짓점 A, D, E, H는 어떻게 이을까?

$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{AU}$ 에서 \overline{AE} , \overline{DH} 는 점 U의 자취인 \overline{AE} 를 따왔으니

점 T의 자취인 \overline{AD} 를 써먹을 차례이다.



점 A와 점 D, 점 E와 점 H를 이을 때, 점 T의 자취인 \overline{AD} 을 이용하면 된다.

점 T가 \overline{AD} 위를 움직일 때 점 S의 자취의 영역은 위와 같다.

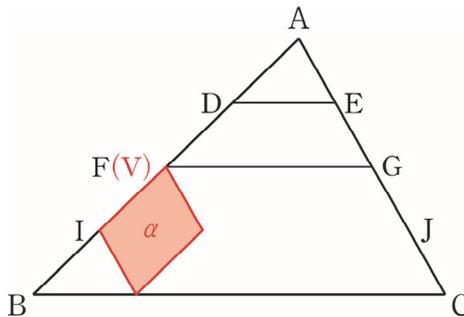
2. 점 S의 자취의 영역을 구했으니 $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 에서 점 X의 자취의 영역을 구해보자.

점 A와 점 B의 중점은 점 F이고 점 A와 점 C의 중점은 점 G이다.

점 Q는 \overline{BC} 위를 움직이므로 $\overrightarrow{AV} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 로 두면 점 V는 \overline{FG} 위를 움직인다.

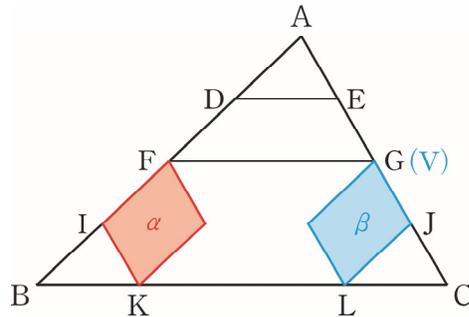
$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AV}$ 로 표현할 수 있다.

\overrightarrow{AV} 의 종점인 점 V를 점 F에 고정하자.



$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AV}$ 에서 \overrightarrow{AV} 의 종점인 점 V를 점 F에 고정하고 \overrightarrow{AS} 를 그리면 영역 α 가 그려진다.

\overrightarrow{AV} 의 중점인 점 V를 점 G에 고정하자.



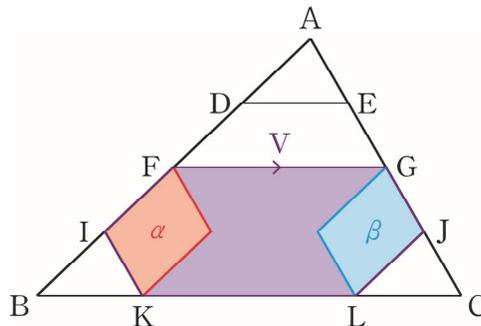
$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AV}$ 에서 \overrightarrow{AV} 의 중점인 점 V를 점 G에 고정하고 \overrightarrow{AS} 를 그리면 영역 β 가 그려진다.

점 X의 자취의 영역의 '일부'가 만들어졌다.

테두리의 꼭짓점 F, G, K, L은 어떻게 이동까?

$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AV}$ 에서 영역 α , 영역 β 는 점 S의 자취의 영역을 따왔으니

점 V의 자취인 \overline{FG} 를 써먹을 차례이다.



점 F와 점 G, 점 K와 점 L을 이을 때, 점 T의 자취인 \overline{FG} 를 이용하면 된다.

점 V가 \overline{FG} 위를 움직일 때 점 X의 자취의 영역의 '테두리'는 육각형 FIKLJG임을 알 수 있다.

점 X의 자취의 영역은 위와 같이 육각형 FIKLJG의 테두리와 그 내부이다.

$\triangle ADE$, $\triangle ABC$ 는 서로 닮음이다. 따라서 $\triangle ADE = \frac{1}{16} \times \triangle ABC = \frac{9}{16}$ 이다.

육각형 FIKLJG의 넓이는 $10 \times \triangle ADE$ 이므로 $\frac{9}{16} \times 10 = \frac{45}{8}$ 이다.

따라서 $p = 8$, $q = 45$ 이고 $p + q = 53$ 이다.

답은 53!!

comment

동점이 3개일 때는 두 개의 벡터의 합의 중점이 이루는 자취의 영역만을 먼저 구한 후에 나머지 하나의 벡터를 **마져 고려해 주며 최종적인 자취의 영역을 구하면 된다.**

동점 2개일 때 자취의 영역 그리기를 2번 반복한다고 생각하면 된다.

동점 2개일 때, 자취의 영역을 그릴 때는 동점 하나를 경계점에 고정한 후에 자취의 영역의 '테두리'부터 그리자. 이후에 동점을 경계점 사이를 움직여가며 '테두리' 내부를 색칠한다.

'테두리'의 존재로 색칠되는 영역을 예측하기 쉬울 것이다.

자취의 영역을 직접 그리는 문제는 많이 출제된 편은 아니었다.

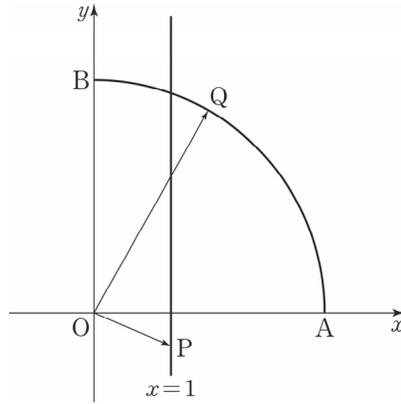
기존에는 '벡터 쪼개기', '벡터 회전'이 평면벡터, 공간벡터에서 큰 축을 담당하고 있다.

하지만 19학년도 수능을 기점으로 동점이 그리는 자취의 영역 관련 문제가 등장하였고 이는 많은 수험생들에게 큰 충격으로 다가왔다.

20학년도 6월 평가원에서도 자취의 영역 관련 문제가 2개나 등장하여 평면벡터의 트렌드가 크게 바뀌었다.

예제(5) 20학년도 6월 평가원 18번

좌표평면 위에 두 점 $A(3, 0)$, $B(0, 3)$ 과 직선 $x = 1$ 위의 점 $P(1, a)$ 가 있다. 점 Q 가 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 의 호 AB 위를 움직일 때 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 의 최댓값을 $f(a)$ 라 하자. $f(a) = 5$ 가 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 곱은? (단, O 는 원점이다.) [4점]



- ① $-5\sqrt{3}$ ② $-4\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{3}$ ④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $-\sqrt{3}$



1. '벡터 회전'의 관점으로도 풀 수 있지만 19학년도 수능 29번 트렌드에 맞춰 벡터의 **평행이동**으로 먼저 풀어보겠다.

$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ 에서 점 R의 자취의 영역을 구해보자.

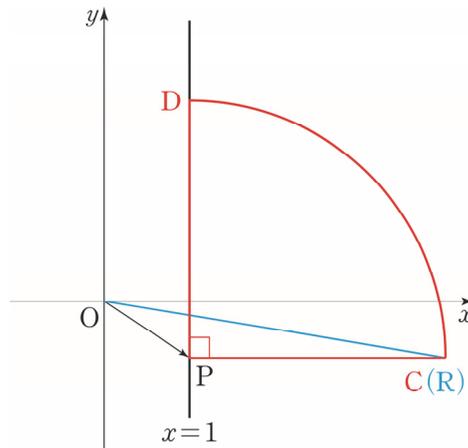
점 O, 점 P는 정점이고 점 Q는 동점이다. 점 Q는 호 AB 위를 움직인다.

점 P가 왜 정점일까? $f(a) = 5$ 는 항등식이 아닌 방정식이다.

$f(a) = 5$ 를 만족하는 a 는 변수가 아닌 미지수이다.

미지수는 모르는 수일 뿐이지 이미 정해져 있다. 따라서 점 P는 동점이 아닌 정점이다.

(1) $a < 0$ 일 때



$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ 에서 \vec{OQ} 의 시점인 점 O를 점 P에 고정하고 \vec{OQ} 를 그리면 \widehat{CD} 가 그려진다.

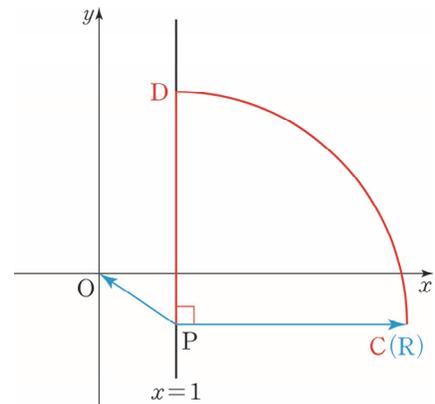
$|\vec{OP} + \vec{OQ}|$ 는 $|\vec{OR}|$ 이고 $|\vec{OR}|$ 의 최댓값은 직관적으로 점 R가 점 C에 있을 때이다.

$|\vec{OR}|$ 의 최댓값은 왜 점 R가 점 C에 있을 때 생길까?

$$|\vec{OP} + \vec{OQ}|^2 = |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 + 2\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$$

$$|\vec{OP}|^2 = a^2 + 1, |\vec{OQ}|^2 = 9 \text{로 일정하므로}$$

$\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ 가 최대일 때 $|\vec{OP} + \vec{OQ}|^2$ 가 최대이다.



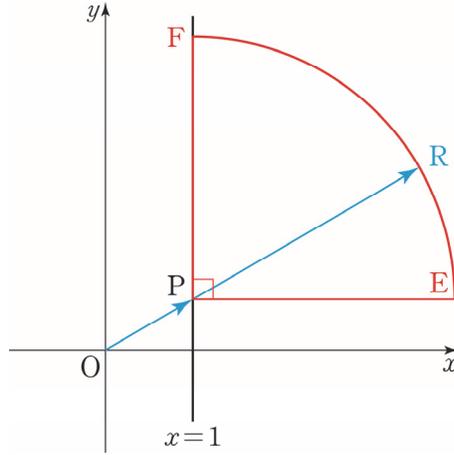
$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \vec{OP} \cdot \vec{PR} = -\vec{PO} \cdot \vec{PR}$ 가 최대이기 위해서는

\vec{PO}, \vec{PR} 가 이루는 각이 0° 이상 180° 이하에서 최대여야 한다.

이때 점 R의 위치는 점 C이다.

점 C(4, a)이고 $|\vec{OR}| = \sqrt{a^2 + 16} = 5$ 이므로 $a = -3$ 이다.

(2) $a > 0$ 일 때



$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서 \overrightarrow{OQ} 의 시점인 점 O를 점 P에 고정하고 \overrightarrow{OQ} 를 그리면 \widehat{EF} 가 그려진다.

$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 는 곧 $|\overrightarrow{OR}|$ 이고 $|\overrightarrow{OR}|$ 의 최댓값은 점 O, 점 P, 점 R가 일직선 위에 있을 때이다.

$|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{a^2 + 1} + 3 = 5$ 이므로 $a = \sqrt{3}$ 이다.

$f(a) = 5$ 가 되도록 하는 모든 a 의 곱은 $-3 \times \sqrt{3} = -3\sqrt{3}$ 이다.

답은 ③!!

2. '벡터 회전'의 관점으로 풀어보겠다. 점 O, 점 P는 정점이고 점 Q는 동점이다.

$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 가 최댓값을 가질 때는 곧 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|^2$ 가 최댓값을 가질 때와 같다.

$$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$$

$|\overrightarrow{OP}|^2 = a^2 + 1$, $|\overrightarrow{OQ}|^2 = 9$ 로 일정하므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 가 최대일 때 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|^2$ 가 최대이다.

(1) $a < 0$ 일 때

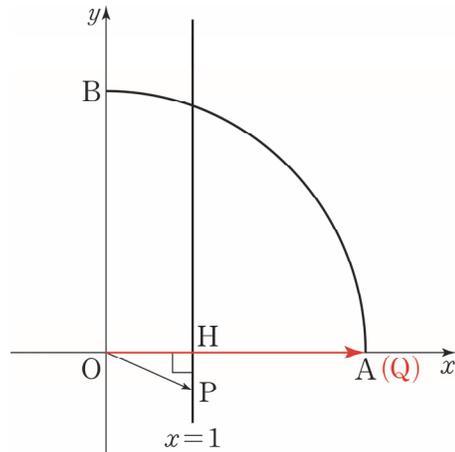
$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 가 최대이기 위해서는 \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} 가 이루는 각이 0° 이상 180° 이하에서 최소여야 한다.

점 O, 점 P, 점 Q가 일직선 위에 존재할 수 없으므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 가 최대이기 위한 점 Q의 위치는 점 A이다.

점 P(1, a)이고 점 A(3, 0)이므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3$ 이다.

점 P에서 x축 위로 정사영을 내려

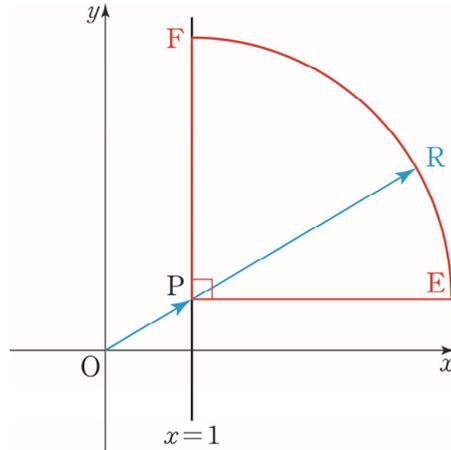
$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3$ 을 구해도 좋다.



$$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = a^2 + 1 + 9 + 2 \times 3 = a^2 + 16 = 25$$

따라서 $a = -3$ 이다.

(2) $a > 0$ 일 때



$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 가 최대이기 위해서는 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 가 이루는 각이 0° 이상 180° 이하에서 최소여야 한다.

$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 가 이루는 각이 0° 가 가능하여 점 O, 점 P, 점 Q가 일직선 위에 존재할 수 있다.

점 Q의 위치는 그림과 같다.

$$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}| + |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{a^2 + 1} + 3 = 5$$

따라서 $a = \sqrt{3}$ 이다.

$f(a) = 5$ 가 되도록 하는 모든 a 의 곱은 $-3 \times \sqrt{3} = -3\sqrt{3}$ 이다.

답은 ㉓!!

※ $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|$ 만 보고 무작정 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| = 2 \times \left| \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} \right| = 2 \times |\overrightarrow{OM}|$ 으로 ‘벡터 쪼개기’를

하는 경우가 있다. 결코 좋은 선택이 아니다.

정점 P와 동점 Q의 중점인 동점 M의 자취를 그리는 것이 어렵기 때문이다.

이 문제에서는 $|\overrightarrow{OP}|, |\overrightarrow{OQ}|$ 가 일정하기에 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}|^2$ 로 다루는 것이 훨씬 낫다.

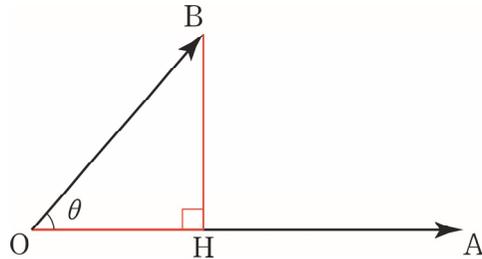
이후에 ‘벡터 쪼개기’의 기준을 확실히 세우고 ‘벡터 회전’도 자세히 다루도록 하겠다.

comment

동점이 하나밖에 없어 벡터의 평행이동을 이용한 자취를 그리기 어렵지 않았다. 보통 동점이 하나밖에 없을 땐 ‘벡터 쪼개기’, ‘벡터 회전’을 쓰는 것이 더 편하다. **각 점이 동점이나 정점이나에 따라 어떻게 ‘벡터 쪼개기’, ‘벡터 회전’을 써야 하는지가 달라진다.** 이와 같은 ‘벡터 쪼개기’, ‘벡터 회전’의 기준이 뚜렷하지 않다면 이를 이용하여 문제 풀기가 힘들 것이다.

3. 벡터 정사영

수선의 발을 내리기 쉬울 때 쓰면 매우 유용하다. 하지만 수선의 발의 자취를 파악하기 어려운 경우는 이 대신 이후에 배울 '벡터 쪼개기'나 '벡터 회전'을 이용하는 것이 좋다.

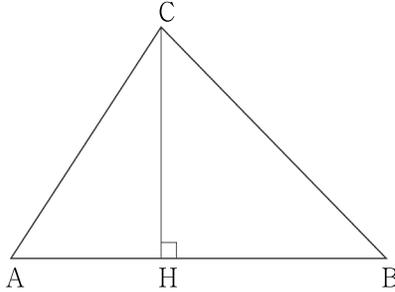


점 B의 직선 OA 위로의 수선의 발은 점 H이다. $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$ 이다.

이를 이용할 때의 장점은 평면벡터의 내적을 선분의 길이의 곱으로 볼 수 있다는 점이다. 평면을 다루는 것보다 한 차원 낮은 직선을 다루는 것이 훨씬 편리하다.

예제(6) 16년 7월 교육청 19번

그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.
삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}$ 의 값은? [4점]



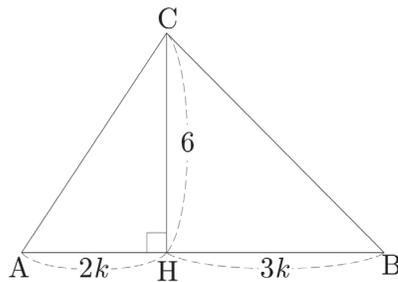
- (가) 점 H가 선분 AB를 2 : 3으로 내분한다.
 (나) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$
 (다) 삼각형 ABC의 넓이는 30이다.

- ① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40



1. 문제에서 구하고자 하는 값을 먼저 살펴보자. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH} = |\overrightarrow{CH}|^2$ 이다.
 $\triangle ABC$ 의 넓이가 30이므로 \overrightarrow{AB} 를 구하고 \overrightarrow{CH} 를 구하자.

2. $\overrightarrow{AB} = 5k$ 라 하면 조건 (가)에 의하여 $\overrightarrow{AH} = 2k$, $\overrightarrow{BH} = 3k$ 이다.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AH}| = 10k^2 = 40$ 에서 $k = 2$ 이다. 따라서 $\overrightarrow{AB} = 10$, $\overrightarrow{CH} = 6$ 이다.
 따라서 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH} = |\overrightarrow{CH}|^2 = 36$ 이다.

답은 ①!!

예제(7) 20학년도 6월 평가원 29번

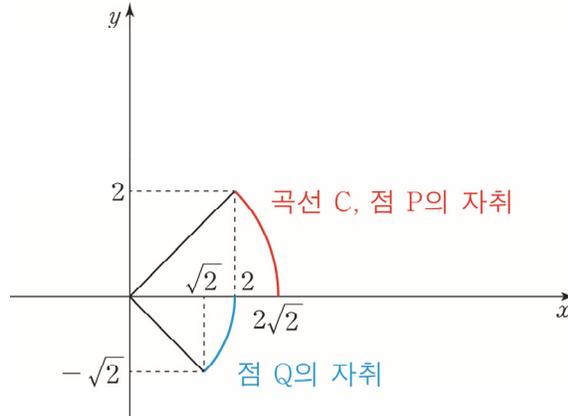
좌표평면에서 곡선 $C: y = \sqrt{8-x^2}$ ($2 \leq x \leq 2\sqrt{2}$) 위의 점 P에 대하여 $\overline{OQ} = 2$, $\angle POQ = \frac{\pi}{4}$ 를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자. 점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$$

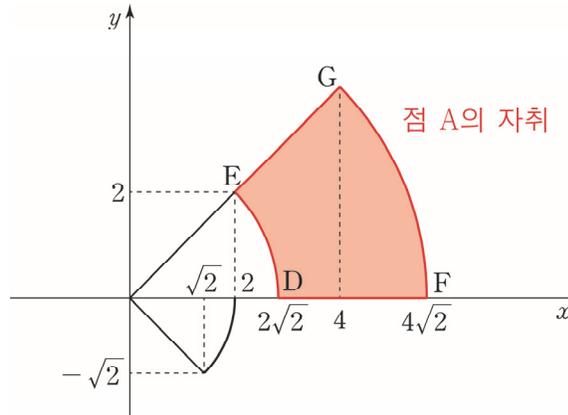
를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자. 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OZ}$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 $a + b\sqrt{2}$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a 와 b 는 유리수이다.) [4점]



1. 문제가 길어 조건 파악이 한 번에 되지 않는다. **한 줄씩 끊어가며 조건을 파악**하자.
좌표평면에서 곡선 C와 점 Q가 나타내는 곡선은 그림과 같다.



이제 $\vec{OZ} = \vec{OP} + \vec{OX} + \vec{OY}$ 를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역 D를 그려야 한다. 점 O는 원점으로 정점이고 점 P, 점 X, 점 Y는 동점이다. 동점이 3개인 상황에서는 두 개의 벡터의 합의 총점이 이루는 자취의 영역만을 먼저 구한 후에 나머지 하나의 벡터를 마저 고려해 주며 최종적인 자취의 영역을 구하면 된다. 따라서 $\vec{OA} = \vec{OP} + \vec{OX}$ 에서 점 A의 자취의 영역을 먼저 구하고 $\vec{OZ} = \vec{OA} + \vec{OY}$ 에서 점 Z의 자취의 영역을 구해보자.



$\vec{OA} = \vec{OP} + \vec{OX}$ 로 두고 점 A의 자취의 영역을 구해보자.

점 P는 호 DE 위를 움직인다. 점 X가 선분 OP 위를 움직이므로 점 O, 점 P, 점 X는 일직선 위에 있다. 따라서 점 A의 자취의 영역은 위와 같이 그려진다. \widehat{GF} 는 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$ 인 원 위에 있다. \widehat{GF} 의 중심각은 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

2. 점 A의 자취를 구했으므로 $\vec{OZ} = \vec{OA} + \vec{OY}$ 에서 점 Z의 자취의 영역을 구해보자.

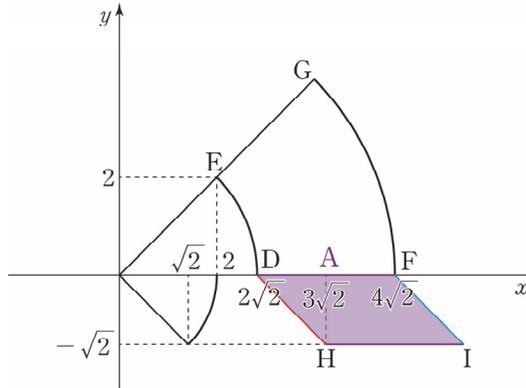
점 A는 \widehat{DE} , \widehat{GF} , \widehat{EG} , \widehat{DF} 로 둘러싸인 영역의 테두리와 그 내부를 움직인다.

점 Y가 \widehat{OQ} 위를 움직이므로 점 O, 점 Q, 점 Y는 일직선 위에 있다.

$\angle POQ = \frac{\pi}{4}$ 를 만족시키려면 $\angle AOY = \frac{\pi}{4}$ 를 만족시키며 점 Y가 움직여야 한다.

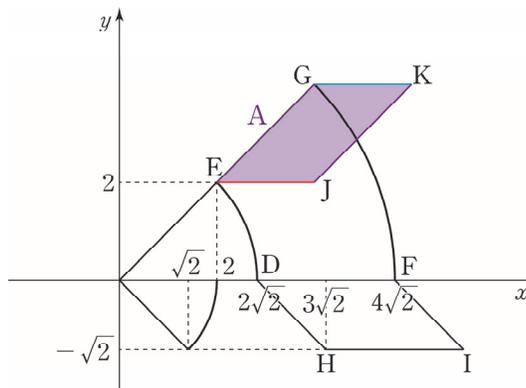
먼저 점 A가 \overline{EG} 위를 움직일 때와 점 A가 \overline{DF} 위를 움직일 때로 각각 나누어 점 Z가 나타내는 자취의 영역 일부를 구해보자. 미안하지만 동점을 경계점에 고정하여 자취를 그리는 방법을 충분히 알려줬으므로 설명을 생략하고 바로 자취의 영역을 그리도록 하겠다.

점 A가 \overline{DF} 위를 움직일 때 점 Z가 나타내는 자취의 영역은 아래와 같다.



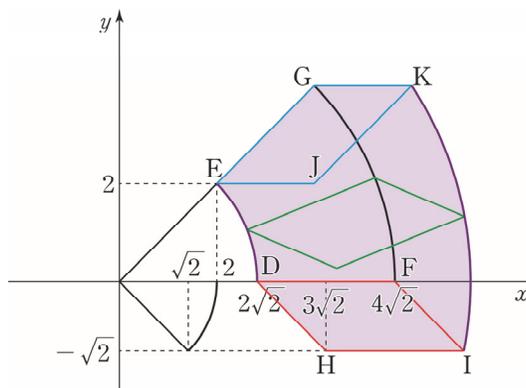
평행사변형 DFIH가 그려진다.

점 A가 \overline{EG} 위를 움직일 때 점 Z가 나타내는 자취의 영역은 아래와 같다.



평행사변형 EGKJ가 그려진다.

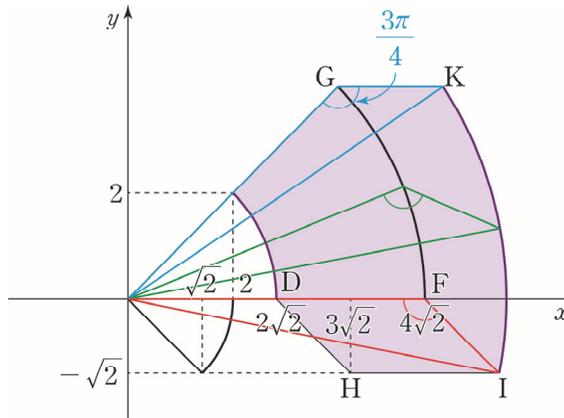
점 A의 자취는 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 선분이 \overline{DF} 에서 \overline{EG} 까지 \widehat{DE} 를 따라 회전하는 형태이다. 따라서 점 Z가 나타내는 자취의 영역의 '테두리'는 평행사변형 DFIH을 평행사변형 EGKJ까지 회전시켜 구할 수 있다.



따라서 점 Z가 나타내는 자취의 영역의 '테두리'는 \widehat{DE} , \widehat{IK} , \overline{EG} , \overline{GK} , \overline{HI} , \overline{DH} 이다.

\widehat{IK} 가 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{13}$ 인 원 위에 있다. \widehat{IK} 의 중심각은 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

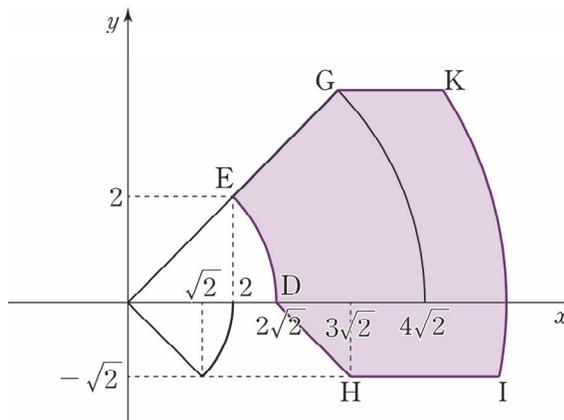
※ \widehat{IK} 가 중심이 원점 O이고 반지름이 $2\sqrt{13}$ 인 원 위에 있으면서 중심각이 $\frac{\pi}{4}$ 인 호라는 것을 어떻게 알 수 있을까?



한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$, 다른 한 변의 길이가 2이고 그사이 끼인 각이 $\frac{3}{4}\pi$ 인 삼각형이 회전하는 형태이다.

끼인 각의 대변의 길이가 일정하므로 \widehat{IK} 가 중심이 원점 O인 원 위에 있으면서 중심각이 $\frac{\pi}{4}$ 인 호라는 것을 알 수 있다. 이 호의 반지름의 길이는 원점 O와 점 K(6, 4) 사이의 거리인 $2\sqrt{13}$ 이다.

3. 점 Z가 나타내는 자취의 영역 D는 \widehat{DE} , \widehat{IK} , \overline{EG} , \overline{GK} , \overline{HI} , \overline{DH} 로 둘러싸인 영역의 테두리와 그 내부이다.



영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점은 점 E이므로 점 R은 점 E와 일치한다. 따라서 점 R(2, 2)이다.

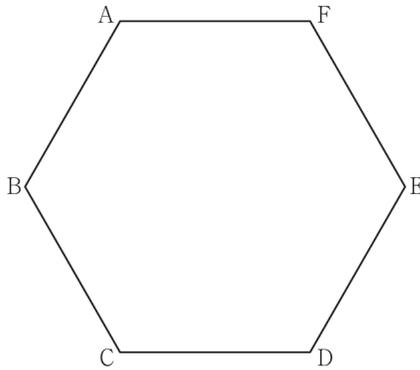
예제(8) 23학년도 6월 평가원 기하 30번

좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k 에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CX}|$ 의 값이 최소가 되도록 하는 k 의 값을 α , $|\overrightarrow{CX}|$ 의 값이 최대가 되도록 하는 k 의 값을 β 라 하자.

$$(가) \overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$$

$$(나) \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD} = k\overrightarrow{CD}$$

$\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하시오. [4점]





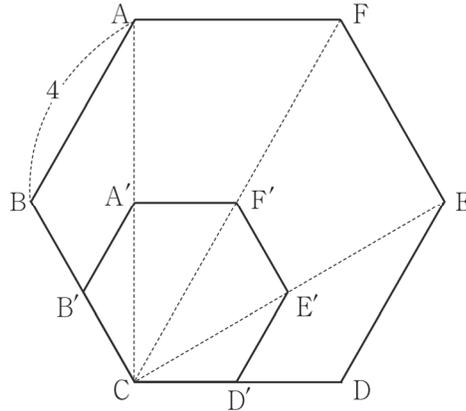
1. $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}$ 에서 $\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$ 와 \overrightarrow{CQ} 가 의미하는 바를 살펴보자.

점 P가 정육각형 ABCDEF 위의 점이므로

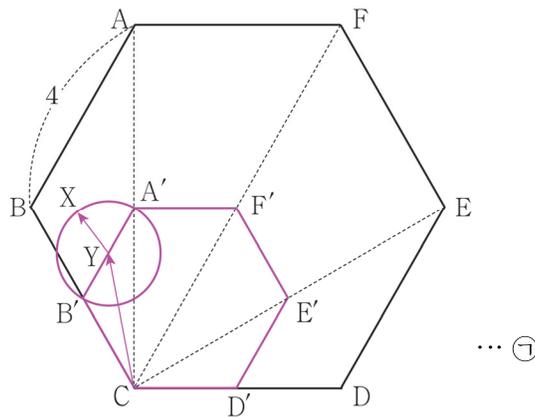
선분 CA의 중점을 A', 선분 CB의 중점을 B', 선분 CD의 중점을 D',

선분 CE의 중점을 E', 선분 CF의 중점을 F'이라 할 때 $\frac{1}{2}\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CY}$ 라 하면

점 Y는 정육각형 A'B'CD'E'F' 위에 존재한다.



\overrightarrow{CQ} 에서 점 Q는 점 C를 중심으로 하고 반지름이 1인 원 위의 점이므로 $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CY} + \overrightarrow{CQ}$ 에서 점 X는 정육각형 A'B'CD'E'F' 위의 점 Y를 중심으로 하고 반지름이 1인 원 위의 점을 의미한다.



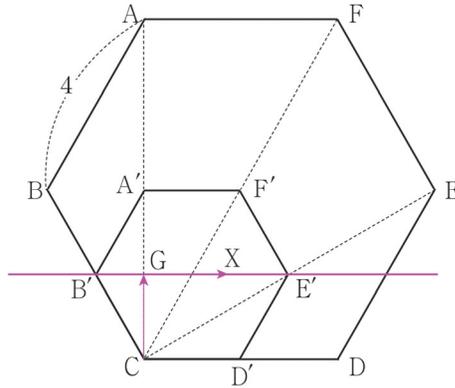
2. $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + 2\overrightarrow{XD} = k\overrightarrow{CD}$ 에서 좌변의 벡터를 모두 시점이 C인 벡터로 바꾸어보자.

$(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CX}) - \overrightarrow{CX} + 2(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CX}) = k\overrightarrow{CD}$ 이고 정리하면 $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$ 이므로

$\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$ 와 $\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$ 가 의미하는 바를 살펴보자.

$\frac{1}{4}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CG}$ 라 하면 점 G는 선분 CA를 1:3으로 내분하는 점이므로 선분 CA'의 중점이다.

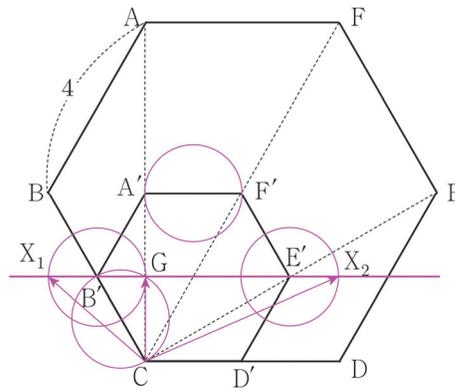
$\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$ 는 \overrightarrow{CD} 와 평행하고 길이가 $\frac{2-k}{4} \times |\overrightarrow{CD}| = 2-k$ 인 벡터이다.



이때, 점 G를 지나고 \overrightarrow{CD} 와 평행한 직선은 두 점 B', E'을 지나므로

$$\overrightarrow{CX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD} \text{에서 점 X는 직선 B'E' 위의 점이다.} \dots \textcircled{C}$$

3. ㉠, ㉡에 의하여 점 X는 정육각형 A'B'CD'E'F' 위의 점 Y를 중심으로 하고 반지름이 1인 원과 직선 B'E'의 교점이다.



점 B'을 중심으로 하는 반지름이 1인 원과 직선 B'E'의 교점 중 점 C에서 더 먼 것을 X_1 , 점 E'을 중심으로 하는 반지름이 1인 원과 직선 B'E'의 교점 중 점 C에서 더 먼 것을 X_2 라 하면 점 X는 선분 X_1X_2 위에 존재한다.

두 직선 CG와 B'E'은 수직이므로 $|\overrightarrow{CX}|$ 가 최솟값을 가질 때 점 X는 G이다.

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CG} + \frac{2-\alpha}{4}\overrightarrow{CD} \text{에서 } \frac{2-\alpha}{4} = 0 \text{이므로 } \alpha = 2 \text{이다.}$$

$\overline{CX_1} < \overline{CX_2}$ 이므로 $|\overrightarrow{CX}|$ 가 최댓값을 가질 때 점 X는 X_2 이다.

$$\overrightarrow{CX_2} = \overrightarrow{CG} + \frac{2-\beta}{4}\overrightarrow{CD} \text{에서 } \frac{2-\beta}{4}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GX_2} \text{이고}$$

$$\overline{CD} = 4, \overline{GX_2} = 4 \text{이므로 } \frac{2-\beta}{4} = 1, \beta = -2 \text{이다.}$$

$$\alpha = 2, \beta = -2 \text{이므로 } \alpha^2 + \beta^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8 \text{이다.}$$

답은 8!!

예제(9) 23학년도 9월 평가원 기하 30번

좌표평면 위에 두 점 $A(-2, 2)$, $B(2, 2)$ 가 있다.

$$(|\overrightarrow{AX}| - 2)(|\overrightarrow{BX}| - 2) = 0, |\overrightarrow{OX}| \geq 2$$

를 만족시키는 점 X 가 나타내는 도형 위를 움직이는 두 점 P, Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vec{u} = (1, 0)$ 에 대하여 $(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u})(\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{u}) \geq 0$ 이다.

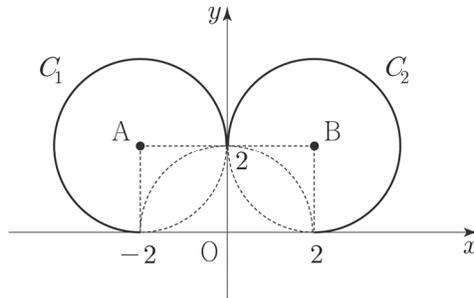
(나) $|\overrightarrow{PQ}| = 2$

$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 를 만족시키는 점 Y 의 집합이 나타내는 도형의 길이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



1. $(|\overrightarrow{AX}| - 2)(|\overrightarrow{BX}| - 2) = 0$ 에서 $|\overrightarrow{AX}| = 2$ 또는 $|\overrightarrow{BX}| = 2$ 이므로 점 X 는 점 $A(-2, 2)$ 를 중심으로 하는 반지름이 2인 원 또는 점 $B(2, 2)$ 를 중심으로 하는 반지름이 2인 원 위의 점이다.

이때, $|\overrightarrow{OX}| \geq 2$ 이므로 점 X 가 나타내는 도형은 다음과 같다.



점 $A(-2, 2)$ 를 중심으로 하는 반지름이 2인 원의 일부를 도형 C_1 , 점 $B(2, 2)$ 를 중심으로 하는 반지름이 2인 원의 일부를 도형 C_2 라 하자.

2. 조건 (가)에서 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 라 하면 $\vec{u} = (1, 0)$ 에 대하여 $(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u})(\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{u}) = x_1 \times x_2 \geq 0$ 이므로 x_1 과 x_2 의 부호는 서로 같다.

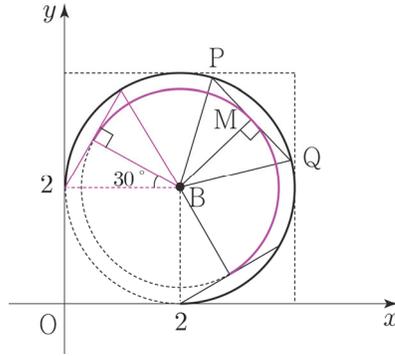
따라서 두 점 P, Q 는 동시에 도형 C_1 위에 존재하거나 동시에 도형 C_2 위에 존재해야 한다.

이때, 대칭성에 의하여 두 가지 경우에서 $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 를 만족시키는 점 Y 가 나타내는 도형은 서로 y 축에 대하여 대칭이므로 일반성을 잃지 않고 한 가지 경우만 살펴봐도 충분하다.

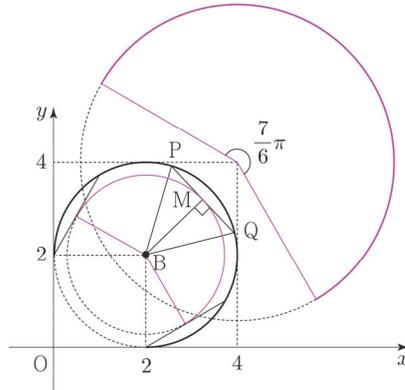
3. 두 점 P, Q가 모두 도형 C_2 위에 존재하는 경우를 살펴보자.

선분 PQ의 중점을 M이라 하면 $|\overline{PQ}| = 2$ 에서 $|\overline{PM}| = |\overline{QM}| = 1$ 이고
 $\overline{OY} = \overline{OP} + \overline{OQ} = 2\overline{OM} = 2(\overline{OB} + \overline{BM}) = 2\overline{OB} + 2\overline{BM}$ 이다.

이때, $|\overline{BM}| = \sqrt{|\overline{BP}|^2 - |\overline{PM}|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ 이므로 점 M이 나타내는 도형은
 점 B를 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{3}$ 인 원의 일부이다.



이때, $\overline{PQ} = \overline{BP} = \overline{BQ} = 2$ 에서 색칠된 삼각형은 정삼각형이므로 점 M이 나타내는 도형의
 중심각의 크기는 $2\pi - \left(\frac{\pi}{6} \times 2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{7}{6}\pi$ 임을 알 수 있다.



$\overline{OY} = 2\overline{OB} + 2\overline{BM}$ 에서 $2\overline{OB} = (4, 4)$ 이고, $2\overline{BM}$ 은 반지름이 $2\sqrt{3}$, 중심각이 $\frac{7}{6}\pi$ 인 호를
 나타내므로 두 점 P, Q가 모두 도형 C_2 위에 존재할 때 점 Y가 나타내는 도형은 점 (4, 4)를
 중심으로 하고 반지름이 $2\sqrt{3}$, 중심각이 $\frac{7}{6}\pi$ 인 호이다.

따라서 두 점 P, Q가 모두 도형 C_2 위에 존재할 때, 점 Y가 나타내는 도형의 길이는

$2\sqrt{3} \times \frac{7}{6}\pi = \frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$ 이므로 두 점 P, Q가 모두 도형 C_1 위에 존재할 때의 점 Y가 나타내는

도형의 길이 또한 $\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$ 이고 구하는 도형의 길이는 $\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi \times 2 = \frac{14\sqrt{3}}{3}\pi$ 이다.

따라서 $p = 3, q = 14$ 이므로 $p + q = 3 + 14 = 17$ 이다.

답은 17!!