

성취 기준 - 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

개념 파악하기

(1) 급수의 수렴과 발산이란 무엇일까?

급수의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 덧셈 기호 $+$ 로 연결한 식 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ 을 **급수**라 하고,

기호 \sum 를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 같이 나타낸다. 또 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n ,

즉 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 를 이 급수의 제 n 항까지의 **부분합**이라 한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$ 이 일정한 값 S 에 수렴할 때,

즉 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$ 일 때, 이 급수는 S 에 수렴한다고 한다.

이때 S 를 이 **급수의 합**이라 하고, 이것을 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$ 또는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 와 같이 나타낸다.

한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$ 이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 한다.

Tip 1

$\sum_{k=1}^n a_k = S_n$ 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 이다.

Tip 2

급수의 합은 부분합으로 이루어진 수열 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ 의 극한으로 정의한다.

ex1 급수 $1+3+5+\cdots+(2n-1)+\cdots$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$ 이다. 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

ex2 급수 $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$S_n = \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$ 이다. 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} = \frac{1}{2}$ 이므로

주어진 급수는 $\frac{1}{2}$ 에 수렴한다.

Tip 3

수열 $\{a_n\}$ 의 수렴과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 수렴을 혼동하지 않도록 유의해야 한다.

수열 $\{a_n\}$ 의 수렴, 발산은 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 조사하는 것이고, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 수렴, 발산은 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 조사하는 것이다.

규토 라이트 N제
수열의 극한

Master step

심화 문제편

2. 급수

첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 각각

수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right), \quad 3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n} = S$ 일 때, $120S$ 의 값을

구하시오. [4점]

등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) = \frac{40}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n) = \frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \times a_{m+k} \right) > \frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합을 구하시오. [4점]

첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} (20a_{2n} + 21|a_{3n-1}|) = 0$$

이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3|a_n| + b_n}{a_n}$ 이 수렴할 때, $b_1 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 값을

구하시오. [4점]

성취 기준 - 함수의 몫을 미분할 수 있다.

개념 파악하기

(1) 함수의 몫은 어떻게 미분할까?

함수의 몫의 미분법

함수 $g(x)$ 가 미분가능할 때, 함수 $y = \frac{1}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) 의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} y' &= \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \times \frac{1}{g(x+h)g(x)} \right\} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \\ &= -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

한편 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때, $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ 이므로 함수 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) 의 도함수는 함수의 곱의 미분법을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} y' &= \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \left\{ f(x) \times \frac{1}{g(x)} \right\}' = f'(x) \times \frac{1}{g(x)} + f(x) \times \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \times \frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

Tip 1 미분가능한 함수 $g(x)$ 는 연속이므로 $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$

Tip 2 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때, $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Tip 3 $\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 로 판단하지 않도록 유의하자.

함수의 몫의 미분법 요약

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ ($g(x) \neq 0$) 가 미분가능할 때

① $y = \frac{1}{g(x)}$ 이면 $y' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

② $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 이면 $y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

090 2014학년도 고3 9월 평가원 B형 □□□□□

함수 $f(x) = \ln(\tan x) \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4g(8h) - \pi}{h}$ 의 값을 구하시오. [4점]

091 2022학년도 고3 6월 평가원 미적분 □□□□□

$t > 2e$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(x) = t(\ln x)^2 - x^2$ 이
 $x = k$ 에서 극대일 때, 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 는
 미분가능한 함수이다. $g(\alpha) = e^2$ 인 실수 α 에 대하여
 $\alpha \times \{g'(\alpha)\}^2 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
 (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

092 2021년 고3 7월 교육청 미적분 □□□□□

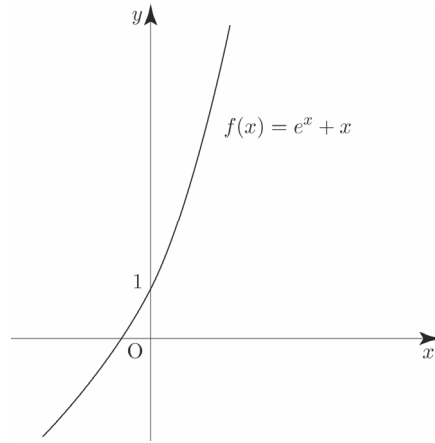
함수 $f(x) = x^3 - x$ 와 실수 전체의 집합에서 미분가능한
 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x) = ax^3 + x^2 + bx + 1$ 이
 있다. 함수 $g(x)$ 의 역함수 $g^{-1}(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} (f \circ g^{-1})(x) & (x < 0 \text{ 또는 } x > 1) \\ \frac{1}{\pi} \sin \pi x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할
 때, $g(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

093 2023학년도 고3 9월 평가원 미적분 □□□□□

함수 $f(x) = e^x + x$ 가 있다. 양수 t 에 대하여 점 $(t, 0)$ 과
 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x = s$ 에서 최소일 때,
 실수 $f(s)$ 의 값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 의 역함수를
 $h(t)$ 라 할 때, $h'(1)$ 의 값을 구하시오. [4점]



094 2024년 고3 10월 교육청 미적분 □□□□□

점 $(0, 1)$ 을 지나고 기울기가 양수인 직선 l 과
 곡선 $y = e^{\frac{x}{a}} - 1$ ($a > 0$)이 있다. 직선 l 이 x 축의
 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ 일 때, 직선 l 이
 곡선 $y = e^{\frac{x}{a}} - 1$ ($a > 0$)과 제1사분면에서 만나는 점의
 x 좌표를 $f(\theta)$ 라 하자. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a$ 일 때,

$\sqrt{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = pe + q$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오.

(단, a 는 상수이고 p, q 는 정수이다.) [4점]

099

2022학년도 고3 6월 평가원 미적분

□□□□□

$t > \frac{1}{2} \ln 2$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$ 과 직선 $y = x + t$ 가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p} \sqrt{2}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

100

2024학년도 고3 6월 평가원 미적분

□□□□□

세 실수 a, b, k 에 대하여 두 점 $A(a, a+k), B(b, b+k)$ 가 곡선 $C: x^2 - 2xy + 2y^2 = 15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A 에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B 에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2 의 값을 구하시오.
(단, $a+2k \neq 0, b+2k \neq 0$) [4점]

101

□□□□□

$t > 1$ 인 실수 t 에 대하여 y 축 위의 점 $(0, t)$ 에서 반원 $(x-1)^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$ 에 그은 접선의 접점을 A 라 하고, 접선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하자.
점 $C(2, 0)$ 에 대하여 호 AC 와 두 선분 AB, BC 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(2)$ 의 값은?
(단, 점 A 의 x 좌표는 양수이다.)

- ① $-\frac{14}{45}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{16}{45}$
④ $-\frac{17}{45}$ ⑤ $-\frac{6}{15}$

102

□□□□□

함수 $f(x) = |\ln x|$ 에 대하여 $g(0) = h(0) = 1$ 인 두 함수 $g(x), h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 양의 실수 t 에 대하여 방정식 $f(x) = t$ 의 두 실근은 $g(t), h(t)$ 이고 $g(t) < h(t)$ 이다.
(나) $F(x) = af(x+b) - 10\sqrt{h(x^2) - g(x^2)}$
(단, a 와 b 는 상수이다.)

함수 $F(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능할 때, $(ab)^2$ 의 값을 구하시오.

양의 실수 t 에 대하여 곡선 $y = (2\ln x)^2$ 와 직선 $y = t$ 가
만나는 두 점의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 라 할 때, 함수 $f(t)$ 를
 $f(t) = |x_1 - x_2|$ 라 하자. 미분가능한 함수 $f(t)$ 에 대하여
양수 a 가 $f(a) = \frac{e^2 - 1}{e}$ 을 만족시킨다. $f'(a)$ 의 값은?

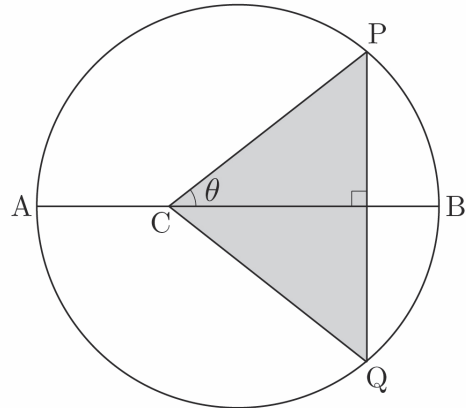
- ① $\frac{1}{8}\left(e + \frac{1}{e}\right)$ ② $\frac{1}{6}\left(e + \frac{1}{e}\right)$ ③ $\frac{1}{4}\left(e + \frac{1}{e}\right)$
④ $\frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$ ⑤ $e + \frac{1}{e}$

$l + m + n \leq 10$ 를 만족시키는 세 자연수 l, m, n 에 대하여
실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 $x = \pi$ 에서
미분가능하고

$$x^n f(x) = \left| (x - \pi) \sin^m \frac{l}{2} x \right|$$

를 만족시킬 때, 모든 순서쌍 (l, m, n) 의 개수를 구하시오.

길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에
 $\overline{AC} = 4$ 인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle PCB = \theta$ 가
되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이
이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.
삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때,
 $-7 \times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$F(x) = \ln |f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여

$$G(x) = \ln |g(x) \sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F'(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{4}$$

일 때, $f(3) + g(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 57 ② 55 ③ 53
④ 51 ⑤ 49

예제 7

함수 $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 의 그래프의 개형을 그리시오.

풀이

- ① 분모 $x^2+1 \neq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
- ② $f(-x) = -f(x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (기함수)
- ③ $f(0)=0$ 이므로 점 $(0, 0)$ 을 지난다.
- ④ $f'(x) = -\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$ 이므로 Semi 도함수 $f'(x) = -(x+1)(x-1)$

$f(1)=1, f(-1)=-1$ ($x=1$ 에서 극대, $x=-1$ 에서 극소)

- ⑤ $f''(x) = \frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$ 이므로

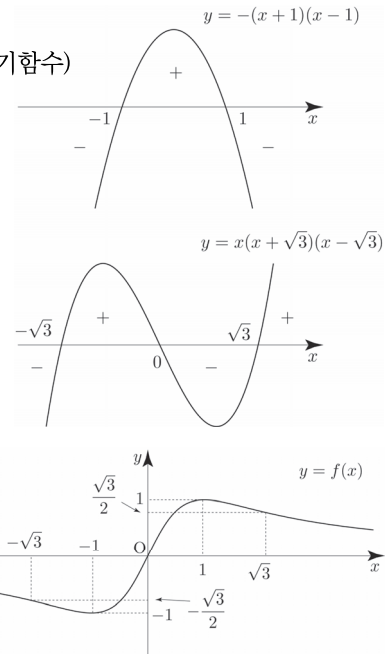
Semi 이계도함수 $f''(x) = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

변곡점은 $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), (0, 0), (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

- ⑥ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로

주어진 함수의 그래프의 점근선은 x 축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



Tip 1 굳이 증감표를 그릴 필요 없이 Semi 도함수 $f'(x)$ 를 바탕으로 도함수의 부호를 판별하면 된다. 대략적인 개형을 그린 후 점근선과 이계도함수를 종합하여 조금 더 디테일하게 그려주면 된다.

Tip 2 <실수하기 좋은 point>

Semi 도함수 $f'(x)$ 를 미분하여 $f''(x)$ 를 구하면 안 된다.

Semi 도함수 $f'(x)$ 는 증감을 쉽게 따지기 위해서 도입한 새로운 함수이므로

$f''(x)$ 를 구하기 위해서는 원래 $f'(x)$ 를 미분해서 구해야 한다.

Tip 3 기함수이므로 $x > 0$ 인 부분만 그린 뒤 원점 대칭하여 전체의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

이때 분모 분자를 x 로 나누면 $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{x}}$ 이므로 분모에서 산술기하평균을 사용하면

$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2$ 이고 등호조건은 $x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1$ ($\because x > 0$) 이므로 분모의 최솟값은 2이다.

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 1을 갖는다.

Tip 4 모든 문제를 풀 때 반드시 이계도함수를 구해야 하는 것은 아니다.

따라서 무조건 이계도함수를 조사하기보다는 문제에 따라 조사 여부를 탄력적으로 판단하면 된다. 판단의 기준은 경험이다.

Tip 5 곡선 $y = \frac{ax}{x^2+1}$ 의 그래프는 매우 잘 나오므로 개형을 기억해 두자.

개념 확인문제 7

다음 함수의 그래프의 개형을 그리시오.

(1) $f(x) = xe^{-x}$

(2) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

(3) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 3}$

(4) $f(x) = e^x + e^{-x}$

(5) $f(x) = x^2 e^x$

(6) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$)

(7) $f(x) = (\ln x)^2$

성취 기준 - x 절편을 이용하여 다항함수×지수함수 형태의 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있다.

개념 파악하기

(7) 다항함수×지수함수 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있는 방법은 없을까?

다항함수×지수함수 그래프의 개형 빨리 그리기

이때까지는 도함수와 이계도함수를 바탕으로 여러 가지 함수의 그래프의 개형을 그리는 방법에 대하여 배웠다. 실전에서 문제를 접근할 때, 대략적인 개형을 알고 난 뒤 문제를 접근하면 훨씬 더 용이한 경우가 존재한다. 따라서 이번에는 빈출 소재인 다항함수×지수함수 그래프의 개형을 빨리 그리는 방법에 대하여 알아보자.

[1단계] 다항함수 그래프의 개형을 그린다. (x 절편이 핵심)

[2단계] $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 를 조사한다. (점근선 체크)

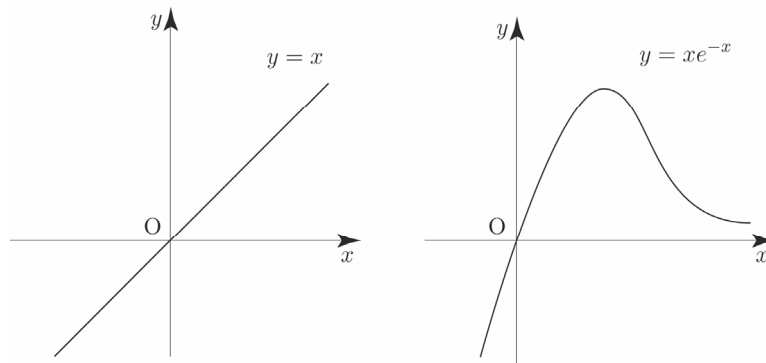
[3단계] 다항함수 그래프의 개형에서 점근선이 그려지려면 어떤 모양이 되어야 하는지 생각해본다.

ex1 $y = xe^{-x}$

$y = x$ 를 그린 후 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이 반영되도록 그래프의 개형을 그려주면 된다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 x 축이 점근선이다. 즉, $x \rightarrow \infty$ 일 때, 아래로 볼록하면서 x 축으로 한없이 가까이 가야 한다.

$y = x$ 가 위로 올라가는 힘보다 $y = e^{-x}$ 가 아래로 내려가는 힘이 더 크기 때문에 x 축으로 한없이 가까이 간다고 생각하면 된다. 이를 반영하여 그래프를 그려주면 다음과 같다.



Tip

이때 극값을 갖는 x 를 구하려면 도함수를 구하여 조사하면 된다.

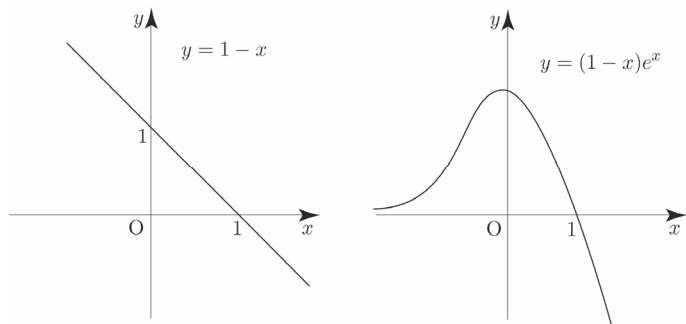
지금 우리가 궁금한 것은 대략적인 그래프의 개형이다.

ex2 $y = (1-x)e^x$

$1-x$ 를 그리고 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이

반영되도록 그래프의 개형을 그려주면 된다.

이를 반영하여 그래프를 그려주면 다음과 같다.

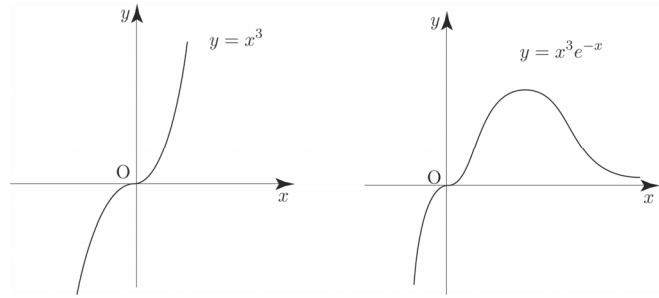


ex6 $y = x^3 e^{-x}$

$y = x^3$ 를 그린 후 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이

반영되도록 그래프의 개형을 그려주면 된다.

이를 반영하여 그래프를 그려주면 다음과 같다.



Tip

$x=0$ 에서 뚫는 접선을 갖는데 실제로 그런지 확인해보자.

$$f(x) = x^3 e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (3x^2 - x^3) e^{-x} = x^2(3-x) e^{-x} \Rightarrow f''(x) = x(x^2 - 6x + 6) e^{-x} \text{ 이므로}$$

$x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호 변화가 없으므로

극값을 갖지 않고 뚫는 접선을 갖는다.

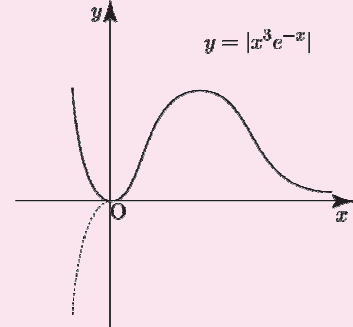
또한 $x=0$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호 변화가 있으므로

$f(x)$ 는 변곡점 $(0, 0)$ 을 갖는다.

즉, 함수 $y = |f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 뚫는 접선을 가지므로

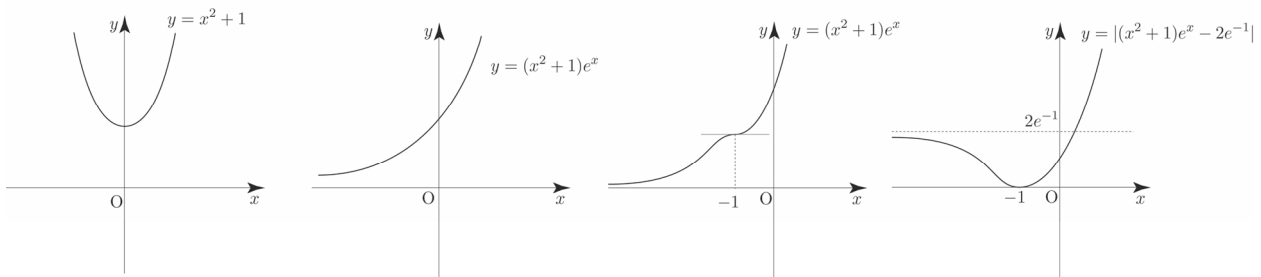
$f(x)$ 가 음수인 부분을 x 축위로 접어 올렸을 때,

스무스(smooth)하므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



ex7 $y = (x^2 + 1)e^x$

$y = x^2 + 1$ 를 그린 후 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이 반영되도록 그래프의 개형을 그려주면 된다.



대략적인 개형을 그렸을 때는 두 번째 그림처럼 그려질 것 같은데 실제로 그런지 확인해보자.

$f'(x) = (x+1)^2 e^x$ 이므로 $f(x)$ 가 증가함수인 것은 맞지만 세 번째 그림처럼 $x = -1$ 에서 뚫는 접선을 갖는다.

즉, 대략적인 개형만 판단가능하지 디테일한 것은 도함수와 이계도함수를 조사해 보아야 한다.

$f(x) = (x^2 + 1)e^x$ 는 $x = -1$ 에서 뚫는 접선을 가지므로 함수 $y = |f(x) - f(-1)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

Tip

x 절편이 모두 존재하지 않는(only 실근이 아닌) 다항함수의 경우 도함수를 구하여 판단하도록 하자.

사실 필자도 ex1 ~ ex6과 같이 x 절편이 모두 존재하는 꼴(only 실근)만 빨리 그리기를 사용하고

그렇지 않은 꼴은 직접 도함수를 구하여 판단한다. 그 편이 더 안전하기도 하고 출제자 입장에서 뚫는 접선과 같은 특수한 포인트를 물어보도록 문제를 설계했을 확률이 높기 때문이다.

오히려 ex7에서 대략적인 두 번째 그림으로 선불리 판단했다면 오답으로 이어질 수 있다.

(오히려 독이 됨)

성취 기준 - 합성함수의 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있다.

개념 파악하기

(8) 합성함수의 그래프의 개형을 빨리 그릴 수 있는 방법은 없을까?

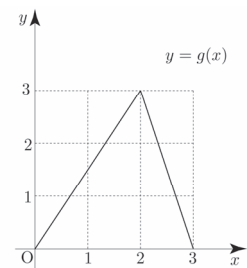
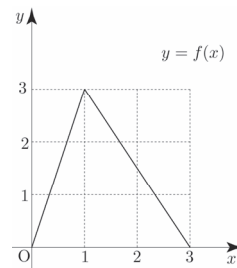
합성함수의 그래프의 개형 빨리 그리기

함수 $f(g(x))$ 의 그래프를 그린다고 가정해보자. $f(g(x))$ 를 미분하여 도함수 $g'(x)f'(g(x))$ 를 구한 후 $g'(x)f'(g(x))$ 의 부호변화를 바탕으로 증감을 파악하여 합성함수의 그래프를 그릴 수 있다.

허나 문제에 따라서는 도함수 $g'(x)f'(g(x))$ 의 부호변화를 파악하기 힘든 경우가 존재할 수 있다.

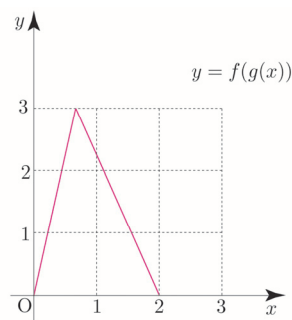
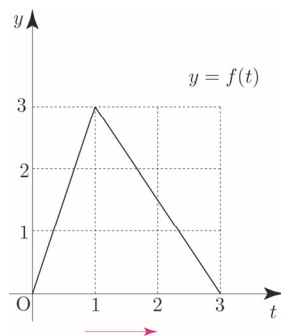
따라서 이번에는 도함수를 구하지 않고 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 각각의 증감만을 이용하여 함수 $f(g(x))$ 의 그래프의 대략적인 개형을 빨리 그리는 방법에 대하여 알아보자.

이해를 돕기 위해 오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프를 바탕으로 함수 $y=f(g(x))$ 의 그래프를 그려보자.

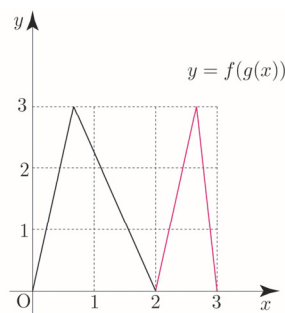
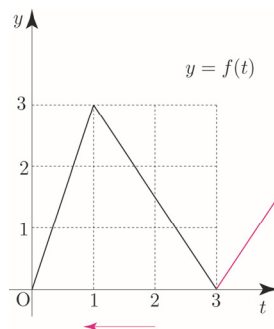


함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $x=2$ 를 경계로 $0 < x < 2$ 에서 증가하고 $2 < x < 3$ 에서 감소한다.

$g(x)=t$ 라 하면 x 가 $0 \rightarrow 2$ 일 때, t 는 $0 \rightarrow 3$ 이므로 함수 $y=f(t)$ 에서 $0 < t < 3$ 의 범위의 그래프를 복사하여 정의역 $0 < x < 2$ 에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다.



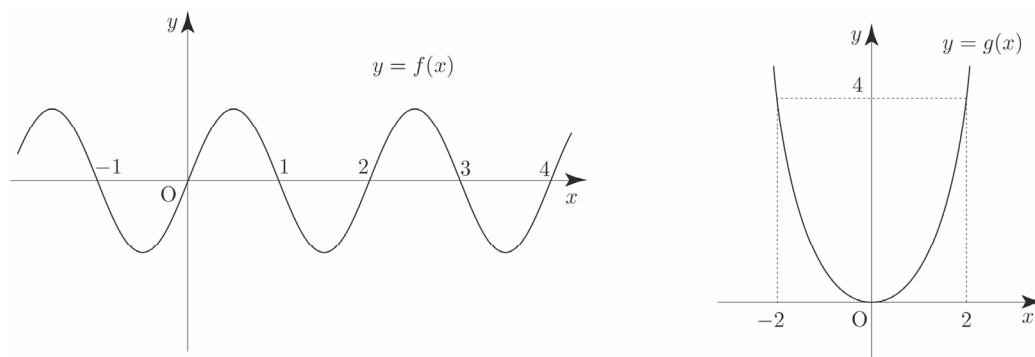
x 가 $2 \rightarrow 3$ 일 때, t 는 $3 \rightarrow 0$ 이므로 함수 $y=f(t)$ 에서 $0 < t < 3$ 의 범위의 그래프를 좌우 반전시킨 후 복사하여 정의역 $2 < x < 3$ 에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다.



이번에는 실전문제를 통해 합성함수의 그래프 그리기가 어떻게 적용될 수 있는지 알아보자.

ex7 방정식 $\sin(\pi x^2) = \frac{2}{3}$ ($-2 < x < 2$)의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

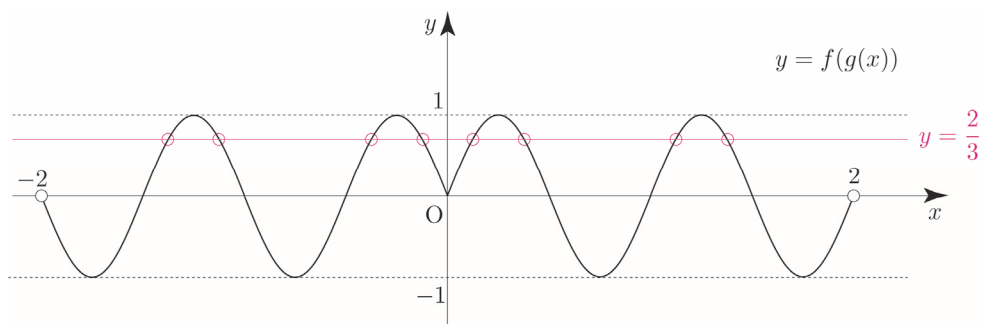
$g(x) = x^2$ 라 보고 $f(x) = \sin \pi x$ 라 하면 $y = \sin(\pi x^2)$ 는 $y = f(g(x))$ 와 같다.



함수 $y = g(x)$ ($-2 < x < 2$)의 그래프는 $x = 0$ 을 경계로 $-2 < x < 0$ 에서 감소하고 $0 < x < 2$ 에서 증가한다.

$g(x) = t$ 라 하면 x 가 $0 \rightarrow 2$ 일 때, t 는 $0 \rightarrow 4$ 이므로 함수 $y = f(t)$ 에서 $0 < t < 4$ 의 범위의 그래프를 복사하여 정의역 $0 < x < 2$ 에 들어가도록 확대 및 축소한 뒤 붙여넣어 그리면 된다.

$y = \sin(\pi x^2)$ 은 y 축에 대하여 대칭이므로 대칭성을 이용하여 정의역 $-2 < x < 0$ 에 해당하는 그래프를 마저 그려주면 된다.



$-2 < x < 2$ 에서 함수 $y = f(g(x))$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{2}{3}$ 의 교점의 개수가 8이므로

방정식 $\sin(\pi x^2) = \frac{2}{3}$ ($-2 < x < 2$)의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

Theme

1

접선의 방정식
(접점이 주어질 때)

001

□□□□□

곡선 $y = \ln(x-2)+4$ 위의 점 $(3, 4)$ 에서의 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?
(단, a, b 는 상수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

002

□□□□□

곡선 $y = \frac{1}{x-3}$ 위의 점 $(5, \frac{1}{2})$ 에서의 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

003

□□□□□

곡선 $x^2 + e^{xy} - y^2 = 0$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선과 원점 사이의 거리는?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

004

□□□□□

함수 $f(x) = 3x + \cos \frac{x}{2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,
곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(3\pi, \pi)$ 에서의 접선이 점 $(2\pi, a)$ 를 지난다. 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}\pi$ ② $\frac{2}{5}\pi$ ③ $\frac{3}{5}\pi$
④ $\frac{4}{5}\pi$ ⑤ π

005

□□□□□

함수 $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ 의 그래프 위의 두 점 $(-2, 2), (\frac{1}{2}, -3)$ 에서의 접선을 각각 l, m 이라 하자. 두 직선 l, m 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $30\tan\theta$ 의 값을 구하시오.

006

□□□□□

매개변수 $t(t > \sqrt{3})$ 로 나타낸 곡선
 $x = \ln(t^2 - 3), y = e^{-2t+4} + t^2$
에 대하여 $t=2$ 에 대응하는 점에서의 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $10(a+b)$ 의 값을 구하시오.

007

□□□□□

곡선 $y = e^{\sin 2x}$ 위의 점 $(\pi, 1)$ 를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식이 $(a, \frac{\pi}{2})$ 를 지날 때,
상수 a 의 값을 구하시오.

008

□□□□□

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \ln(1 + \sin 3x)$ 의
그래프와 x 축이 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y = f(x)$
위의 점 A에서의 접선의 y 절편은?

- ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π
④ 4 ⑤ 5

009

□□□□□

곡선 $2x = y\sqrt{y+1}$ 위의 점 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ 에서의 접선의
방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?
(단, a, b 는 상수이다.)

- ① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

149

□□□□□

음의 실수 k 에 대하여 최고차항의 계수가 1인
삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $\ln|f(x)|$ 는 $x \neq k$ 인 모든 실수에서 정의
된다.
(나) 함수 $\ln|f(x)|$ ($k < x$)의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,
 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분이 불가능하다.

$\frac{10}{g'(\ln 2)}$ 의 값을 구하시오.

150

□□□□□

최고차항의 계수가 $\frac{\pi}{8}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을
만족시킨다.

- (가) $\lim_{x \rightarrow k} \frac{\sin\{f(x)\} - f(k)}{x - k + f(x)} = \frac{k(2-\pi)}{\pi}$ ($k=0, 1$)
(나) 방정식 $|f(x)| = f(1)$ 는 오직 서로 다른
세 실근만을 갖는다.

$f(2)$ 의 값은?

- ① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π
④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

151

□□□□□

실수 t ($0 < t < 8$)와 함수 $f(x) = 4|x^2 + x|$ 에 대하여
집합 S 는

$$S = \left\{ x \mid f(\cos x) = t, 0 < x < \frac{9}{2}\pi \right\}$$

이다. S 의 모든 원소들의 합을 $g(t)$ 라 하자.
상수 a, b ($b \neq 0$)에 대하여 함수 $g(t)$ 는 다음 조건을
만족시킨다.

$$g(a) + \lim_{t \rightarrow a-} g(t) = b\pi + \lim_{t \rightarrow a+} 2g(t)$$

$\frac{1}{\left\{ g' \left(\frac{ab}{8} \right) \right\}^2}$ 의 값을 구하시오.

152

□□□□□

실수 k 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에
대하여 함수

$$g(x) = 1 + \cos\{f(x-k)\}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=k$ 에서 극댓값 1을 갖는다.
(나) $f(0) = f(3)$, $-20\pi < f(0) < 20\pi$

서로 다른 모든 $f(4)$ 의 값의 합은 $a+b\pi$ 이다.
 $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.)

실수 a ($0 < a < 2$)에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} 2|\sin 4x| & (x < 0) \\ -\sin ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수

$$g(x) = \left| \int_{-a\pi}^x f(t) dt \right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a 의 최솟값은?

[4점]

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{3}{4}$

③ 1

④ $\frac{5}{4}$

⑤ $\frac{3}{2}$

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이고, $x < 0$ 일 때 $f(x) = -4xe^{4x^2}$ 이다.

모든 양수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$ 라 하자.

두 함수 $g(t)$, $h(t)$ 는 모든 양수 t 에 대하여

$$2g(t) + h(t) = k \quad (k \text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x) dx = e^4 - 1$ 일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$ 의 값은?

[4점]

① $\frac{3}{2}e^5$

② $\frac{4}{3}e^7$

③ $\frac{5}{4}e^9$

④ $\frac{6}{5}e^{11}$

⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = |\sin x| \cos x$$

이다. 양수 a 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식을 $y = g(x)$ 라 하자. 함수

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt$$

가 $x = a$ 에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a 를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를

a_n 이라 하자. $\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = 0$$

(나) $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$ 는 $0 \leq x < 1$ 일 때 $g(x) = f(x)$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = g(x)$ 이다.

$g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,

$$\int_0^5 xg(x) dx = \frac{q}{p} \text{ 이다. } p+q \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

ii) $|r| > 1 \Rightarrow r < -1$ or $r > 1$
(분모와 분자 중 절댓값이 가장 큰
항끼리 비교하여 구한다.)

iii) $|r| = 1 \Rightarrow r = -1$ or $r = 1$
(r 에 직접 대입하여 구한다.)

공비가 r^2 인 경우는 정말 자주 나오는 편이니
위의 내용을 잘 기억해두도록 하자.

(공비가 r 일 때와 달리 공비가 r^2 일 때는
 $r = -1$ 인 경우도 물을 수 있기 때문에
출제자 입장에서 문제를 내기 용이하다.)

예를 들어 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n} + 2}$ 을 보자마자

실전에서 해야 하는 사고 과정은 다음과 같다.

- ① 공비를 찾는다. 공비는 x^2 이다.
- ② 공비가 x^2 일 때는 공비 x 일 때와
마찬가지로 $|x| < 1$, $|x| > 1$, $|x| = 1$ 인 경우로
case분류하여 구한다.

i) $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n} + 2} = \frac{0 + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$$

ii) $|x| > 1 \Rightarrow x < -1$ or $x > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \times x^{2n} + 1}{x^{2n} + 2} = x$$

iii) $|x| = 1 \Rightarrow x = -1$ or $x = 1$

$x = 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n+1} + 1}{1^{2n} + 2} = \frac{2}{3}$$

$x = -1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n+1} + 1}{(-1)^{2n} + 2} = \frac{0}{3} = 0$$

2 등비수열의 극한은 수능에서 출제될 확률이 가장 높은
파트이므로 이번 기회에 확실히 알아 두도록 하자. 특히,
공비가 미지수일 때는 출제하기 좋은 요소이기도 하다.
참고로 2021학년도 수능 가형 18번 문항에서도 출제된 적이
있다. (풀 같은 4점)
추후 Training-2step에서 풀어보기로 하자.

수열의 극한 | Training - 1 step

1	7	25	13
2	10	26	20
3	4	27	3
4	15	28	1
5	9	29	80
6	140	30	12
7	3	31	4
8	4	32	27
9	5	33	16
10	1	34	10
11	16	35	3
12	13	36	14
13	7	37	8
14	100	38	20
15	4	39	7
16	1	40	③
17	20	41	①
18	36	42	5
19	5	43	¬, ⊂, ⊃, ⊆
20	2	44	4
21	15	45	10
22	7	46	50
23	②	47	20
24	5	48	32

001

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - b_n}{a_n + b_n} = \frac{3\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{12 + 2}{2} = 7 \text{ 이다.}$$

답 7

수열의 극한 | Master step

105	65	109	③
106	50	110	30
107	4	111	25
108	②		

105

자연수 a 에 대하여 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|x-a|^n + 1}{|x-a|^n + 1}$

공비가 $|x-a|$ 이므로 공비에 따라 case분류해 보자.

$$\textcircled{1} -1 < |x-a| < 1 \Rightarrow |x-a| < 1 \Rightarrow a-1 < x < a+1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|x-a|^n + 1}{|x-a|^n + 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

$$\textcircled{2} |x-a| > 1 \text{ or } |x-a| < -1 \Rightarrow |x-a| > 1$$

$$\Rightarrow x < a-1 \text{ or } x > a+1$$

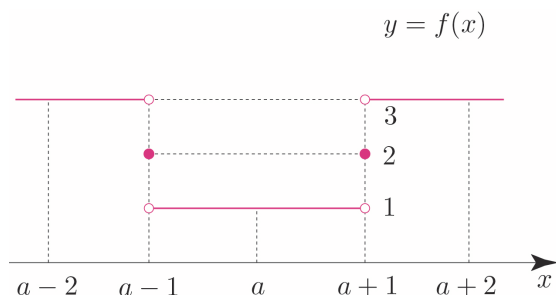
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|x-a|^n + 1}{|x-a|^n + 1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\textcircled{3} |x-a| = 1 \text{ or } |x-a| = -1 \Rightarrow |x-a| = 1$$

$$\Rightarrow x = a-1 \text{ or } x = a+1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3|x-a|^n + 1}{|x-a|^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 1^n + 1}{1^n + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

①, ②, ③를 바탕으로 $f(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$$\sum_{k=11}^{15} f(k) = f(11) + f(12) + f(13) + f(14) + f(15) \leq 12$$

가 되도록 하는 a 의 값을 구해보자.

(x 값이 연속하는 5개의 자연수라는 것에 유의하자.)

$\sum_{k=11}^{15} f(k)$ 이 최솟값이 되도록 하려면

함숫값 1을 한 번 가지고 함숫값 2를 두 번 가져야 한다.

함숫값 1을 한 번 가지고 함숫값 2를 두 번 가지는 경우를 구하면 다음과 같다.

$$(f(11), f(12), f(13), f(14), f(15))$$

$$= (3, 2, 1, 2, 3) \text{ or } (3, 3, 2, 1, 2) \text{ or } (2, 1, 2, 3, 3)$$

$$\text{i) } (3, 2, 1, 2, 3) \Rightarrow a = 13$$

$$\sum_{k=11}^{15} f(k) = 11 \text{ 이므로 조건을 만족한다.}$$

$$\text{ii) } (3, 3, 2, 1, 2) \Rightarrow a = 14$$

$$\sum_{k=11}^{15} f(k) = 11 \text{ 이므로 조건을 만족한다.}$$

$$\text{iii) } (2, 1, 2, 3, 3) \Rightarrow a = 12$$

$$\sum_{k=11}^{15} f(k) = 11 \text{ 이므로 조건을 만족한다.}$$

$\sum_{k=11}^{15} f(k) = 12$ 가 되도록 하는 경우를 구하면 다음과 같다.

$$(f(11), f(12), f(13), f(14), f(15))$$

$$= (1, 2, 3, 3, 3) \text{ or } (3, 3, 3, 2, 1)$$

$$\text{iv) } (1, 2, 3, 3, 3) \Rightarrow a = 11$$

$$\sum_{k=11}^{15} f(k) = 12 \text{ 이므로 조건을 만족한다.}$$

$$\text{v) } (3, 3, 3, 2, 1) \Rightarrow a = 15$$

$$\sum_{k=11}^{15} f(k) = 12 \text{ 이므로 조건을 만족한다.}$$

i), ii), iii), iv), v)에 의하여 조건을 만족하는 모든 a 의 값을 구하면 11, 12, 13, 14, 15이다.

따라서 모든 a 의 값의 합은 $11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 65$ 이다.

답 65

Tip

$e^x > 0$ 이므로 산술기하평균을 사용하면

$$e^x + e^{-x} = e^x + \frac{1}{e^x} \geq 2\sqrt{e^x \times \frac{1}{e^x}} = 2 \text{ 이고}$$

등호조건은 $e^x = \frac{1}{e^x} \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 2를 갖는다.

(5) $f(x) = x^2 e^x$

① 함수 $f(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

② 대칭성과 주기성은 없다.

③ $f(0)=0$ 이므로 점 $(0, 0)$ 을 지난다.

④ $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x)e^x = x(x+2)e^x$ 이므로

Semi 도함수 $f'(x) = x(x+2)$

$f(-2)=4e^{-2}$, $f(0)=0$ ($x=-2$ 에서 극대, $x=0$ 에서 극소)

⑤ $f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x$

$$= \{x - (-2 + \sqrt{2})\} \{x - (-2 - \sqrt{2})\} e^x$$

변곡점은

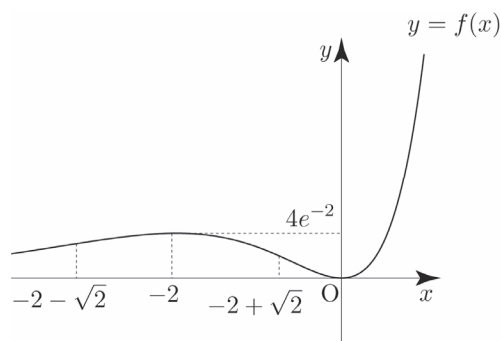
$$(-2 + \sqrt{2}, (6 - 4\sqrt{2})e^{-2 + \sqrt{2}}),$$

$$(-2 - \sqrt{2}, (6 + 4\sqrt{2})e^{-2 - \sqrt{2}})$$

⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로 주어진 함수의 그래프의 점근선은

x 축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



(6) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

① 진수조건에 의하여 함수 $f(x)$ 의 정의역은 양의 실수이다.

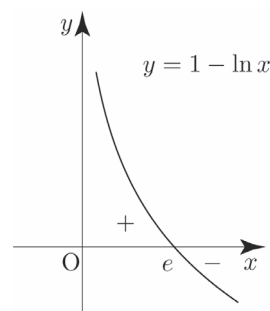
(+분모 $x \neq 0$)

② 대칭성과 주기성은 없다.

③ $f(1)=0$ 이므로 점 $(1, 0)$ 을 지난다.

④ $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 이므로 Semi 도함수 $f'(x) = 1 - \ln x$

$f(e)=e^{-1}$ ($x=e$ 에서 극대)



Tip

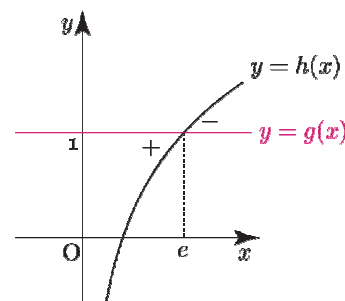
<빼기함수 Technique>

$$f'(x) = g(x) - h(x)$$

Semi 도함수 $f'(x) = 1 - \ln x$ 를 그려서 부호를

판단할 수 있지만 $g(x)=1$, $h(x)=\ln x$ 라 하고

빼기함수 Technique을 적용시켜 부호를 판단할 수도 있다.

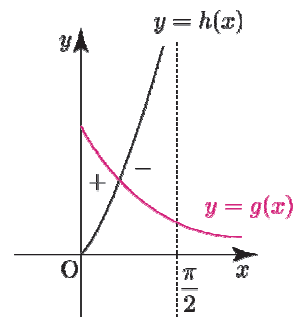


$f'(x)$ 가 복잡해지면 빼기함수 Technique을 사용하는 것이 훨씬 유리하다.

ex $f'(x) = e^{-x} - \tan x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)

$$g(x) = e^{-x}, h(x) = \tan x \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = g(x) - h(x)$$



$x > 0$ 에서

$$f(x) = \frac{1}{27}(x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 19x)$$

ㄱ. 점 (2, 2)는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

$$f'(x) = \frac{1}{27}(4x^3 - 18x^2 + 24x + 19)$$

$$f''(x) = \frac{1}{27}(12x^2 - 36x + 24)$$

$$= \frac{4}{9}(x-1)(x-2)$$

$x=2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 변하고,

$f(2)=2$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 변곡점 (2, 2)을 갖는다.

따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=x$ 의 실근 중 양수인 것은 $x=2$ 하나뿐이다.

$$\frac{1}{27}(x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 19x) = x$$

$$\Rightarrow x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 19x = 27x$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-2)^3 = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ or } x=2$$

따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. 함수 $|f(x)-g(x)|$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

Tip

<함수 $|h(x)|$ 의 미분가능성>

Q. 미분가능한 함수 $h(x)$ 에 대하여 함수 $|h(x)|$ 가 $x=k$ 에서 미분이 가능한지 불가능한지 확인하려면 어떻게 해야 할까?

$h(k)$ 의 함숫값에 따라 크게 2가지 case가 존재한다.

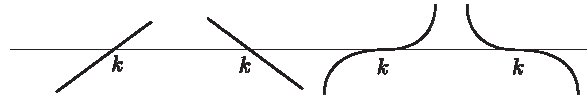
① $h(k) \neq 0$

$h(k) \neq 0$ 인 경우에는 미분가능한 함수를 x 축 아래 부분을 접어 올리지만 하는 것이므로 실수 전체에서 미분가능하면 $h'(k)$ 도 당연히 존재한다.

② $h(k) = 0$

문제는 ② case인데 $h(k)=0$ 일 때에는 case분류를 해주어야 한다.

i) $x=k$ 를 경계로 부호가 바뀔 때는 총 4가지의 개형이 가능하다.



첫 번째와 두 번째 개형은 $h'(k) \neq 0$ 이므로

접어 올렸을 때 좌미분계수와 우미분계수가 같아질

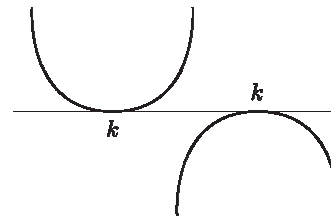
수 없다. ($h'(k) = -h'(k) \Rightarrow h'(k) = 0$ 모순!)

결국 미분가능하려면 세 번째와 네 번째 개형과

같이 $h'(k) = 0$ 이어야 한다.

즉, $x=k$ 에서 뚫는 접선이 나와야 한다.

ii) $x=k$ 를 경계로 부호가 바뀌지 않을 때는 총 2가지 개형이 가능하다.



(예초에 $h(x)$ 가 실수 전체에서 미분가능하다고 했기 때문에 첨점(뾰족점)은 나올 수가 없다.)

결국 ② case에서 미분 가능하려면

i), ii) 모두 $h'(k) = 0$ 이어야 한다.

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $f(g(x))=x$ 가 성립한다.

$f(2)=2$ 이므로 $g(2)=2$ 이다.

$$f'(2) = \frac{1}{27}(32 - 72 + 48 + 19) = 1$$

$f(g(x))=x$ 의 양변을 x 에 대해 미분하면

$$g'(x)f'(g(x)) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

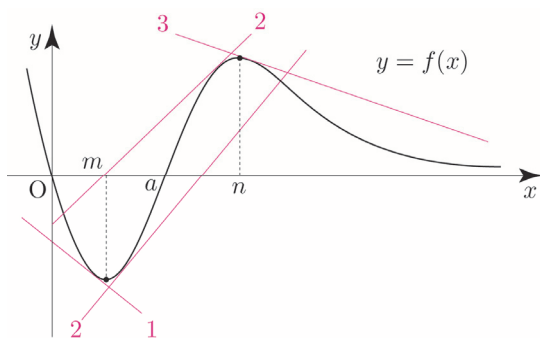
$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(2)} = 1$$

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(2) = f(2) - g(2) = 0$$

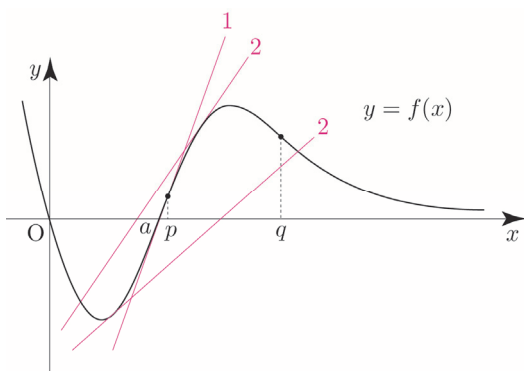
$$h'(2) = f'(2) - g'(2) = 0$$

먼저 접점이 극점인 특수한 상황을 가정하여 살펴보자.

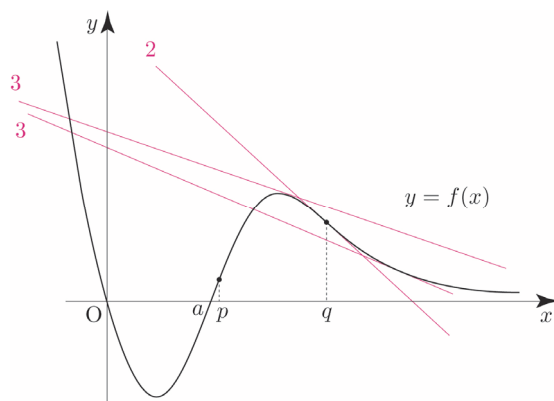


위 그림과 같이 $t=m$ or $t=n$ 인 경우 좌우극한 값이 서로 다르므로 극한값이 존재하지 않아 조건을 만족시킬 수 없다.

이번에는 접점이 변곡점인 특수한 상황을 가정하여 살펴보자. ($f''(x)$ 를 구해서 변곡점이 2개인 것을 보일 수도 있지만 해당 그래프는 정말 많이 접한 그래프 중 하나이기도 하고 그래프 개형상 변곡점이 2개인 것이 자명하다.)



위 그림과 같이 변곡점의 x 좌표가 p 이면 $g(p)=1, \lim_{t \rightarrow p} g(t)=2 \Rightarrow g(p)+\lim_{t \rightarrow p} g(t)=3$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.



위 그림과 같이 변곡점의 x 좌표가 q 이면

$$g(q)=2, \lim_{t \rightarrow q} g(t)=3 \Rightarrow g(q)+\lim_{t \rightarrow q} g(t)=5 \text{ 이므로}$$

조건을 만족시킨다. 즉, $q=5$ 이다.

$$f''(x) = \{x^2 - (a+4)x + 2a + 2\}e^{-x} \text{ 이므로}$$

$$f''(5)=0 \Rightarrow 25 - (a+4)5 + 2a + 2 = 0 \Rightarrow 7 - 3a = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{7}{3}$$

$\lim_{t \rightarrow k-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow k+} g(t)$ 를 만족시키려면

t 가 극점의 x 좌표이어야 한다.

$$f'(x) = -\left(x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{7}{3}\right)e^{-x} \text{ 에서}$$

이차방정식 $x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{7}{3} = 0$ 의 근과 계수의 관계에 의해

극점의 x 값의 합은 $\frac{13}{3}$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow k-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow k+} g(t)$ 를

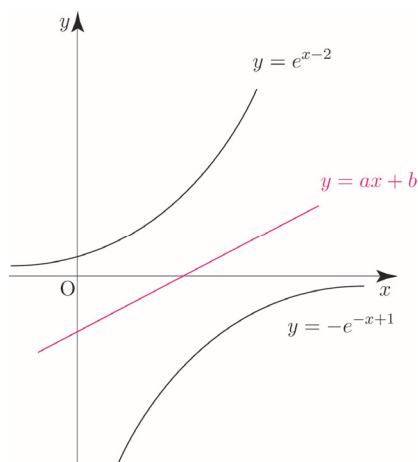
만족시키는 모든 실수 k 의 값의 합은 $\frac{13}{3}$ 이다.

따라서 $p+q=16$ 이다.

답 16

126

모든 실수 x 에 대하여 $-e^{-x+1} \leq ax+b \leq e^{x-2}$



주어진 부등식을 만족하려면 직선 $y=ax+b$ 는

두 곡선 $y=-e^{-x+1}, y=e^{x-2}$ 의 사이에 존재해야 하므로 $a \geq 0$ 이어야 한다.

$$f'(x) = (-x^2 + 3x - 1)e^{4-x}$$

$$f(t) = kt \Rightarrow (t^2 - t)e^{4-t} = kt$$

$$\Rightarrow (t-1)e^{4-t} = k \quad (\because t > 1)$$

$$f'(t) = k \Rightarrow (-t^2 + 3t - 1)e^{4-t} = k$$

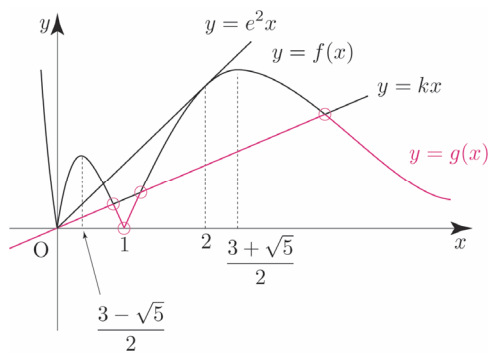
두 식을 연립하면

$$(t-1)e^{4-t} = (-t^2 + 3t - 1)e^{4-t} \Rightarrow t^2 - 2t = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \quad (\because t > 1)$$

$t = 2$ 에서 접할 때, $k = e^2$ 이므로

$0 < k < e^2$ 일 때, $g(x)$ 를 그리면 다음과 같다.



$0 < k < e^2$ 일 때, 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수는 4이므로 $h(k)$ 의 최댓값은 4이다.

따라서 ㄴ은 참이다.

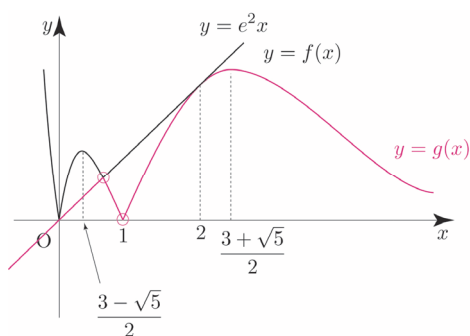
ㄷ. $h(k) = 2$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$e^2 \leq k < e^4 \text{ 이다.}$$

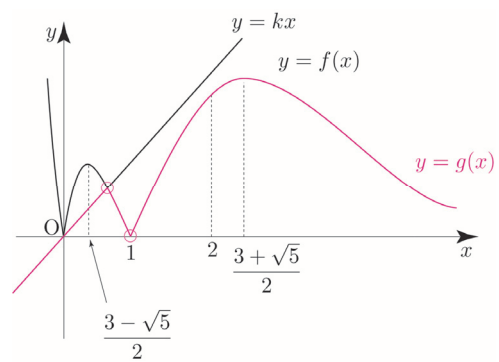
$0 < x < 1$ 일 때, $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{4-x}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = e^4$$

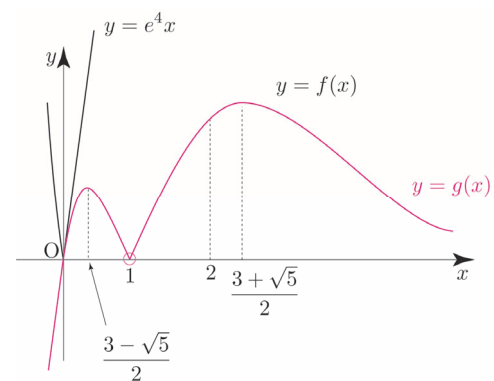
$$k = e^2 \text{ 일 때, } h(k) = 2$$



$$e^2 < k < e^4 \text{ 일 때, } h(k) = 2$$

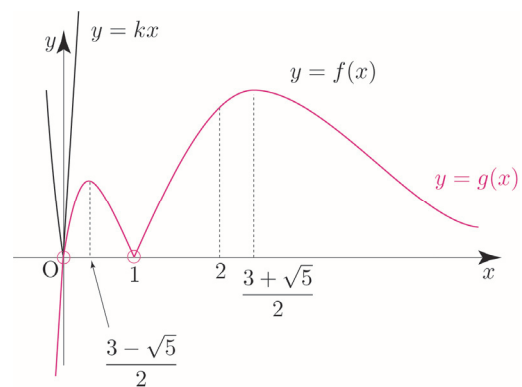


$$k = e^4 \text{ 일 때, } h(k) = 1$$



$$k > e^4 \text{ 일 때, } h(k) = 2$$

(실수하는 포인트!!)



$h(k) = 2$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$e^2 \leq k < e^4 \text{ or } k > e^4 \text{ 이다.}$$

따라서 ㄷ은 거짓이다.

답 ②

함수 $(h \circ g)(t) = h(g(t))$ 가 실수 전체의 집합에서
연속이어야 하므로 $t = -2, t = -1, t = 0, t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서
연속이어야 한다.

(i) $t = -2$ 에서 연속

$$\lim_{t \rightarrow -2^-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow -2^+} h(g(t)) = h(g(-2)) \\ \Rightarrow h(1) = h(2)$$

(ii) $t = -1$ 에서 연속

$$\lim_{t \rightarrow -1^-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow -1^+} h(g(t)) = h(g(-1)) \\ \Rightarrow h(2) = h(4) = h(3)$$

(iii) $t = 0$ 에서 연속

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} h(g(t)) = h(g(0)) \\ \Rightarrow h(4) = h(3) = h(2)$$

(iv) $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 연속

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}^-} h(g(t)) = \lim_{t \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}^+} h(g(t)) = h\left(g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ \Rightarrow h(3) = h(1)$$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$h(1) = h(2) = h(3) = h(4)$$

사차함수 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 이고

$$h(1) = h(2) = h(3) = h(4) = p \text{ 라 하면}$$

식세우기 Technique에 의하여

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + p$$

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 = a, \quad g(0) = 2 = b, \quad g(-1) = 3 = c \text{ 이므로} \\ a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3$$

$$\text{따라서 } h(a+5) - h(b+3) + c = h(6) - h(5) + 3$$

$$= (120 + p) - (24 + p) + 3$$

$$= 99$$

이다.

Tip

1 <그때 그랬지>

2019학년도 고3 6월 평가원 21번에 출제되었던 문항인데 이때
정답률이 23% 였으니 5지선다임을 고려 고려했을 때,
사실상 실전에서는 거의 다 찍었다고 보는게 맞다.

보통 문제와 달리 함수 $|f(x) - t|$ 의
미분가능성을 물어보지 않고 독특하게
 $\sqrt{|f(x) - t|}$ 의 미분가능성을 물어보았다.

눈여겨 봐야 할 부분은 아래와 같다.

③ $t = 0$ 일 때 $x = 0$ 에서의 미분가능성

⑤ $t = -1$ 일 때 $x = \pi$ 에서의 미분가능성

눈대중으로 판단하는 것이 아니라 직접 미분계수의 정의를
이용하여 미분가능성을 판단하도록 하여 smooth하니까
(침점이 아니니까) 당연히 미분가능할 것이라는 관성적인 접근에
익숙한 학생들의 허를 찔렀던 문항이었다.

2 <역함수의 미분가능성>

smooth하더라도 미분가능하지 않는 경우는 역함수의
미분가능성에서도 찾을 수 있다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 의 역함수
 $g(x)$ 도 실수 전체의 집합에서 미분가능할까?

함수 $f(x) = x^3 + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하면

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \text{ 이 성립한다.}$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow g(1) = 0 \text{ 이고, } f'(0) = 0 \text{ 이므로}$$

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{0}$$

$$\Rightarrow g'(1) \text{ 이 존재} \times$$

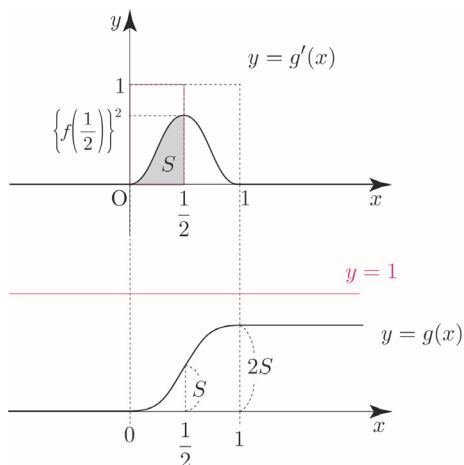
따라서 역함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 미분가능하지 않다.

즉, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서
미분가능하더라도 $f'(a) = 0$ 이고, $f(a) = b$ 라면
역함수 $g(x)$ 는 $x = b$ 에서 미분가능하지 않다.

$f(x)$ 의 접선의 기울기가 0 인 것을 바탕으로
역함수의 미분가능성을 판단하는 문제는 아직 수능에 출제되지
않았기에 이번 기회를 통해 기억해 두도록 하자.

역함수의 미분가능성을 묻는 고난도 문제는 추후 141번
문제에서 자세히 다루기로 하자.

이를 바탕으로 $g(x)$ 를 그리면 다음과 같다.
 $(g'(x))$ 의 넓이는 $g(x)$ 의 함숫값의 차이와 같다.
 2026 규토 라이트 수2 문제편 정적분의 활용
 Guide step 참고)



ㄴ에 의하여 $g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right) = 2S$ 이고,
 $S < \frac{1}{2} \Rightarrow 2S < 1$ 이므로 $g(a) \geq 1$ 을 만족시키는
 실수 a 는 존재하지 않는다.
 따라서 ㄷ은 거짓이다.

답 ②

Tip

$g'(x) = f(x)f(1-x)$
 $g'(1-x) = f(1-x)f(x)$
 즉, $g'(x) = g'(1-x)$ 가 성립하므로
 $y = f(x)f(1-x)$ 의 그래프는 $x = \frac{1}{2}$ 에 대하여
 대칭인 것이 자명하다.

082

$$0 \leq a \leq 8$$

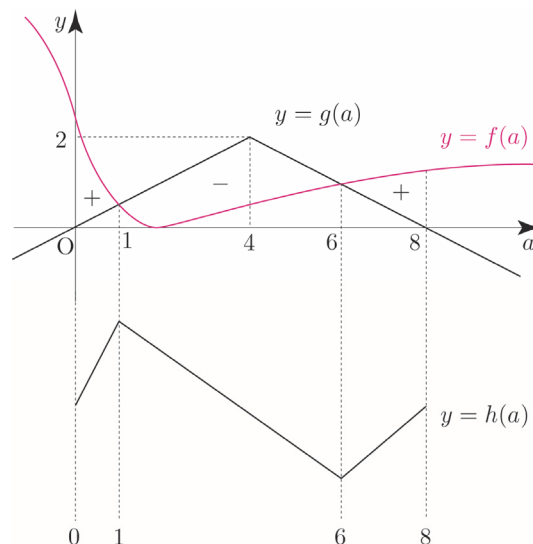
$$h(a) = \int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx \text{라 하자.}$$

(New 함수 Technique)

$$h(a) = F(a) - F(0) + G(8) - G(a)$$

$$h'(a) = f(a) - g(a)$$

두 함수 $y = f(a)$, $y = g(a)$ 의 그래프를 이용하여
 빼기함수 Technique으로 $h'(a)$ 의 부호를 처리해 보자.



$h(a)$ 는 $x=6$ 에서 극소를 갖는다.

$$h(0) = \int_0^8 g(x)dx = 8$$

$$h(6) = \int_0^6 f(x)dx + \int_6^8 g(x)dx$$

$$= \int_0^6 \left(\frac{5}{2} - \frac{10x}{x^2+4} \right) dx + 1$$

$$= \left[\frac{5}{2}x - 5\ln|x^2+4| \right]_0^6 + 1$$

$$= 15 - 5\ln 40 + 5\ln 4 + 1$$

$$= 16 - 5\ln 10$$

$$10 = 5\ln e^2 < 5\ln 10 \text{ 이므로 } h(6) < h(0)$$

따라서 최솟값은 $h(6) = 16 - 5\ln 10$ 이다.

답 ④

이번에는 a 의 범위에 따라 case분류하여 $h(a)$ 를 직접
 구해보자.

① $0 \leq a \leq 4$ 일 때

$$\int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{5}{2} - \frac{10x}{x^2+4} \right) dx + \int_a^4 \frac{x}{2} dx + \int_4^8 \frac{-x+8}{2} dx$$

$$= \left[\frac{5}{2}x - 5\ln|x^2+4| \right]_0^a + \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_a^4 + \left[-\frac{1}{4}x^2 + 4x \right]_4^8$$

$$= \frac{5}{2}a - 5\ln(a^2+4) + 5\ln 4 + 4 - \frac{1}{4}a^2 + 4$$

여러 가지 적분법 | Master step

100	8	121	49
101	93	122	125
102	④	123	②
103	①	124	283
104	⑤	125	18
105	40	126	12
106	30	127	②
107	16	128	①
108	36	129	77
109	143	130	39
110	35	131	25
111	⑤	132	90
112	25	133	③
113	12	134	20
114	16	135	52
115	127	136	132
116	②	137	6
117	②	138	63
118	125	139	28
119	115	140	23
120	83		

100

$f(ab) = f(a) + f(b)$ 를 이용해서

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(1+\tan x) dx$ 를 구해야 할 것 같다.

간단한 문제 같은데 막상 구하려니 막막하다.

정확한 $f(x)$ 를 구할 수도 없고 $\log x$ 라고 생각하더라도 적분을 하기 쉽지 않다.

부분적분도 아닌 것 같고 그럼 어떻게 해야 할까?

여기서 아이디어! 치환적분을 사용해보자.

$x = \frac{\pi}{4} - t$ 라 하면

Tip

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(a+b-t) dt$$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(1+\tan x) dx = k$ 라 했을 때,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) dt = k$$

$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ 를 이용하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{2}{1+\tan t}\right) dt = k$$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ 를 이용해보자.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(1+\tan x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{2}{1+\tan x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2) dx = 2k$$

$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2) dx = k$ 이므로 결국 $f(2)$ 값만 구하면 된다.

$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{128}{\pi}$ 와 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 를 통해 구해 보자.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{128}{\pi} \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{64}{\pi}$$

$f(1) = f(1) + f(1)$ 이므로 $f(1) = 0$

$$f\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\therefore f(2) = \frac{64}{\pi}$$

$$\text{따라서 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(1+\tan x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{64}{\pi} dx = 8$$

이다.

답 8

㉠의 양변에 $t = \frac{9}{2}$, $t = \frac{7}{2}$ 을 각각 대입하면

$$G\left(\frac{11}{2}\right) - G\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{4}{9}$$

$$G\left(\frac{9}{2}\right) - G\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{4}{7}$$

두 식을 각 변끼리 더하여 정리하면 다음과 같다.

$$G\left(\frac{11}{2}\right) - G\left(\frac{9}{2}\right) + G\left(\frac{9}{2}\right) - G\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{11}{2}\right) - G\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{64}{63}$$

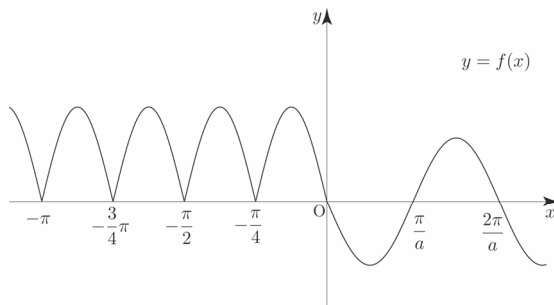
$$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x} dx = G\left(\frac{11}{2}\right) - G\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{64}{63} = \frac{q}{p}$$

따라서 $p+q=63+64=127$ 이다.

답 127

116

$$f(x) = \begin{cases} 2|\sin 4x| & (x < 0) \\ -\sin ax & (x \geq 0) \end{cases}$$



$$h(x) = \int_{-a\pi}^x f(t) dt \text{ 라 하면 } h'(x) = f(x), \quad h(-a\pi) = 0$$

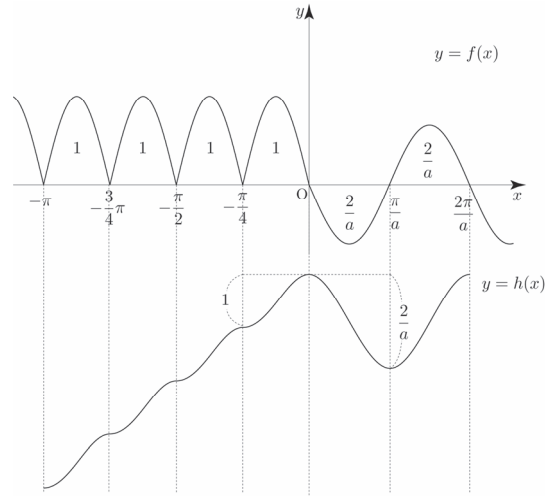
$$g(x) = \left| \int_{-a\pi}^x f(t) dt \right| = |h(x)|$$

대략적인 판단을 위해 $f(x)$ 를 바탕으로 $h(x)$ 을 그려보자.
대략적인 $h(x)$ 를 그리기 위해서는 $f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인
부분의 넓이를 알아야 한다. (얼마만큼 증가하나? 넓이만큼
증가한다. t2 95번과 맥이 같은 문제이다.)

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 -2\sin 4x dx \\ &= \left[\frac{\cos 4x}{2} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} -f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin ax dx$$

$$= \left[-\frac{\cos ax}{a} \right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{2}{a}$$



$|h(x)|$ 의 그래프를 그리려면 x 축이 중요한데
 $|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
 $h(k)=0$ 을 만족시키는 $x=k$ 에서 $h'(k)=0$ 이어야 한다.

이때, $h(-a\pi)=0$ ($0 < a < 2$) 이므로 우선적으로
 $h'(-a\pi)=0$ ($0 < a < 2$) 을 만족시켜야 한다.

$$\text{즉, } a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \dots$$

문제에서 a 의 최솟값을 구하라고 했으므로 가능한 a 의
후보 중에서 작은 수부터 차례대로 case분류해보자.

㉠ $a = \frac{1}{4}$ 인 경우

$h\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$ 이고, $\frac{2}{a}=8$ 이므로 정의역이 양수인 부분에서
첨점이 발생하여 함수 $|h(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서
미분가능하지 않아 조건을 만족시키지 않는다.

