지수·로그 그래프 ⇒ ※점근선, ※대칭성 을 이용하여 문자 1개로 모든점을 나타내자.

※ 점근선

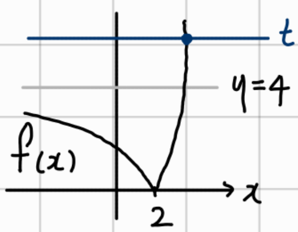
$a^{x-m}+n$은 $y=n$, $\log_a(x-m)+n$은 $x=m$

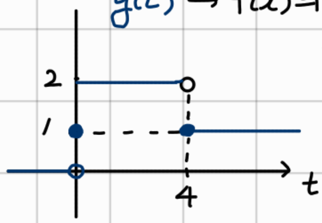
이라는 각각 x축, y축과 나란한 점근선을 갖는다.

• 점근선활용

ex) $f(x)=|2^x-4|$가 $y=t$와 만나는

교점의 개수를 $g(t)$라하면





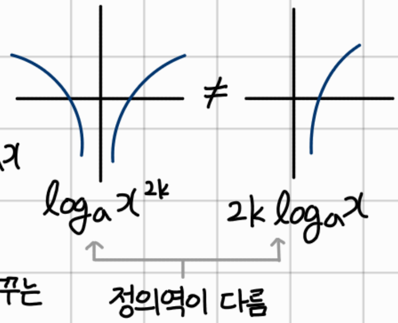
$g(t) \rightarrow f(x)$의 점근선에서 불연속

$\log_a x$함수의 점근선이 생기는 이유는 $(x>0)$이

라는 정의역의 제약 때문이다.

따라서 아래에 주의하자.

$$\begin{cases} \log_a x^{2k} \neq 2k\log_a x \\ \log_a x^{2k+1} = (2k+1)\log_a x \end{cases}$$



$\log_a x^2$를 $2\log_a x$로 바꾸는 것은 계산에는 문제가 없으나

각각의 함수를 관찰할때 정의역이 다름을 간과할 수 있다.

$\log x^2$의 정의역은 0이 아닌 실수전체집합이지만

$2\log x$ 의 정의역은 0보다 큰 실수 전체집합이다.

※ 대칭성

$$ka^x \xrightarrow[\text{평행이동}]{} a^x \xrightarrow[\text{대칭이동}]{} \log_a x \xrightarrow[\text{평행이동}]{} \log_a kx$$

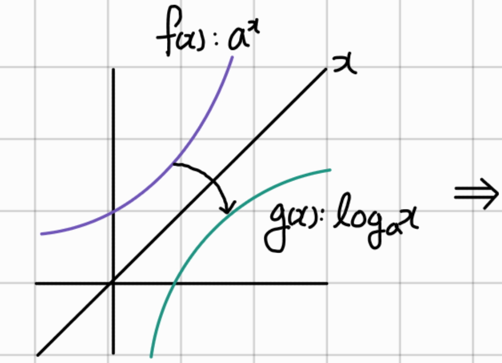
x축으로 $+\log_a k$ $y=x$ 대칭 y축으로 $+\log_a k$

∴ 지수·로그 밑 동일 → 똑같이 생김

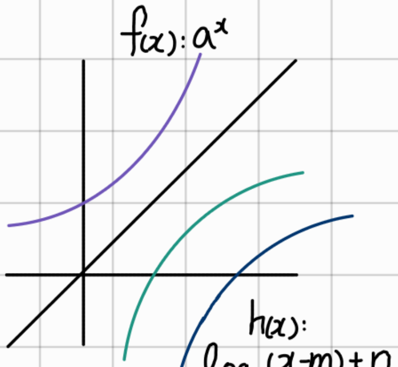
$2^x \backsim 4\cdot2^x \backsim -2^{x+2} \backsim \log_2(x-4) \backsim \log_{\frac{1}{2}}3x$

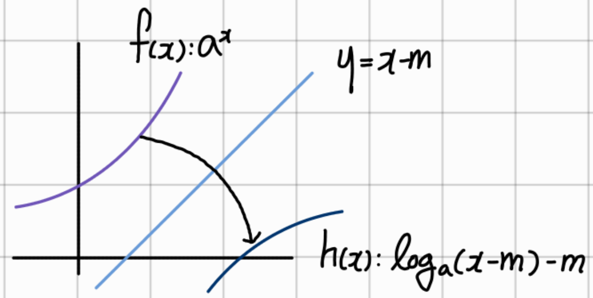
단) $\log_2 x^3 = 3\log_2 x = \log_{\sqrt[3]{2}} x$로

밑이 달라 위의 함수와 모양이 다르다.



⇒





a^x와 $\log_a x$는 $y=x$ 대칭

즉, 서로 역함수 관계

→ 교점이 있다면 $y=x$ 위에 있다.

$h(x)$: $\log_a x$를 x축으로 m, y축으로 n만큼 이동

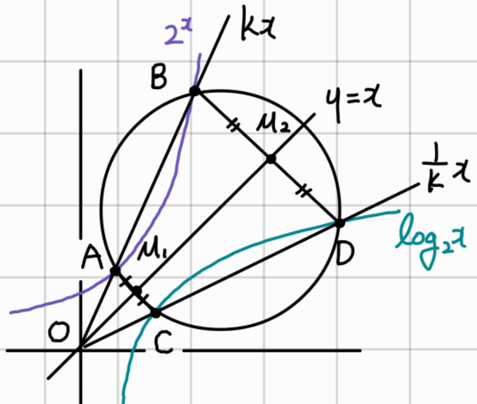
if) $n=-m$이면

$f(x)$와 $g(x)$는 $y=x-m$에 선대칭

if) $n \neq -m$이면

$f(x)$와 $g(x)$는 선대칭이 아니다.

ex) 2^x와 $\log_2 x$를 관찰하자.



• point 1)

점 A, M_1, C는 직선 $y=-x+k$ 위에 있으며 A, C는 $y=x$에 대해 대칭이다.

즉 A가 (a,b)라면 C는 (b,a) M_1은 $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$이다.

• point 2)

2^x와 kx의 교점 A, B는 $\log_2 x$와 $\frac{1}{k}x$의 교점 C, D와 각각 $y=x$ 대칭이다.

• point 3)

△OAC, △OBD는 서로 닮음이며 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

또한 △OAC, △OBD의 무게중심과 A, B, C, D를 지나는 원의 중심은

$y=x$ 위에 있다.

$\boxed{\Sigma}$

$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = S_n$ 으로 부분합을 나타내는 기호다.

S_n 이 주어졌을때 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 임을 이용한다. → 식 정리시 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 임을 이용해 a_n 만, S_n 만 나타나는 식으로 간단히 하자.

ex) $S_n = n^3$ 일때 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^3-(n-1)^3 = 3n^2-3n+1$

ex) $\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}\cdot S_n} \Rightarrow \frac{S_{n+1}-S_n}{S_{n+1}\cdot S_n} \Rightarrow \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$

$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2}a_n$

$\Rightarrow S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2}a_n$

$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$

ex) $S_n = n^2+n+2$ 인 상황을 생각해보자.

만약 상수항이 없었다면 a_n은 등차수열이었다.

$S_n = (n^2+n) + 2$ 이므로 $S_n = n^2+n$을 만족시키는 등차수열에서

첫항만 2만큼 키우면 $S_n = n^2+n+2$ 가 된다

$a_n = n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\} = 2n$ 이므로

S_n이 n^2+n+2인 a_n은 2, 4, 6, 8, 10, 12 ⋯ → $\boxed{4, 4, 6, 8, 10, 12\cdots}$ 가 된다.

ex) $\frac{1}{\square} + \frac{1}{\triangle} + \frac{1}{☆} + \cdots$ (분수들을 더하는 경우)

$\frac{1}{\square} = \frac{1}{A\cdot B}$ 일때 $\frac{1}{A\cdot B} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$ 임을 이용한다.

$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{9\cdot 10} = \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{9}} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}$ 로 계산 가능하다.

→ 이렇게 항들을 더했을 때 몇개항만 빼고 사라지는 형태를 망원급수 (telescoping series)라 한다.

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$: 등차수열의 합과 같다.

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ← '$k^3-(k-1)^3$' 이용

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ ← 같은 원리로 $k^4-(k-1)^4$ 이용

$\sum_{k=1}^{n} k^3-(k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n} 3k^2-3k+1$

$\cancel{1^3} - 0^3$

$2^3 - \cancel{1^3}$

$3^3 - \cancel{2^3}$

$\vdots$

$n^3 - (\cancel{n-1})^3$

$\Downarrow$

$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n$

$\therefore n^3 + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n = 3\sum_{k=1}^{n} k^2$

수열의 귀납적 정의

수열 a_n을 그 이전항 (a_{n-1}, a_{n-2} 등)으로 정의하는 것을 의미하며

이렇게 나타난 식을 점화식이라 한다.

※ $a_{n+1} = \begin{cases} \square & (\quad) \\ \square & (\quad) \end{cases}$, $a_k = \square$

규칙 / 조건 / 구체적인 값

① 구체적 수치와 관련된 항을 미지수로 설정해 값을 구한다.

② 위에서 구한 값을 기준으로 수형도를 거꾸로 그려 a_1까지 거슬러 올라간다.

③ 구한 수열이 조건에 부합하는지 확인한다.

→ ③은 수열 전 과정에 적용되므로 미지수를 설정하고 새로운 값을 구할 때마다 반드시 확인하자.

ex)

(가) $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n + 2n & (a_n = 4\text{의 배수}) \\ a_n + 2n & (a_n \neq 4\text{의 배수}) \end{cases}$ → 규칙 I, → 규칙 II

(나) $a_3 > a_5$ (다) $50 < a_4 + a_5 < 60$

규칙에 이름을 붙이면 덜 헷갈린다

① 문제에서 구체적 수치를 알려주는 조건은 (다)이다.

⇒ 미지수를 설정해 a_4, a_5가 될수 있는 후보군을 찾자.

a_4: k

a_5: I: $\frac{k}{2}+8$, II: $k+8$

I: $50 < \frac{3}{2}k+8 < 60 \Rightarrow 28 < k < \frac{104}{3}$

II: $50 < 2k+8 < 60 \Rightarrow 21 < k < 26$

I 에서 (k = 4의 배수) 이므로 $k = 32$

II 에서 ($k \neq 4$ 의 배수) 이므로 $k = 22, 23, 25$

③ 조건에 부합해야 함을 명심하자.

② 거꾸로 수형도를 그리자. ($a_4 = 22$ 일때만 해보자.)

a_3: x, y

a_4: 22 (I: x, II: y)

I: $\frac{1}{2}x+6 = 22$ $\therefore x = 32$ (x=4의 배수)

II: $y+6 = 22$ $\therefore \cancel{y=16}$ ($y \neq 4$의 배수)

③ 조건에 부합하지 않으므로 $a_3 = 16$일 수 없다.

⇒ 같은 방법으로 조건을 확인하며 a_1까지 거슬러 올라가자.