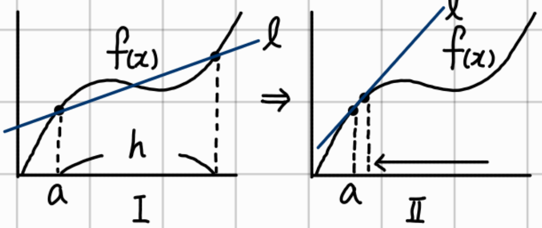
미분계수

평균변화율 $\Rightarrow$ 순간변화율 (미분계수)



왼쪽 I에서 l의 평균변화율은 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 다.

이때 $\lim\limits_{h\to0}$ 를 해주면 아주 가까운 두 점 사이의 평균변화율이 되고 이는 곧 $x=a$에서 접선의 기울기가 된다.

$\lim\limits_{h\to0}$ 은 $h\neq0$ 이기 때문에 가능하다. 만약 $h=0$ 이었으면 두점이 서로 같은 점이 되므로 기울기의 개념자체가 사라진다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\ (\text{미분계수})$$

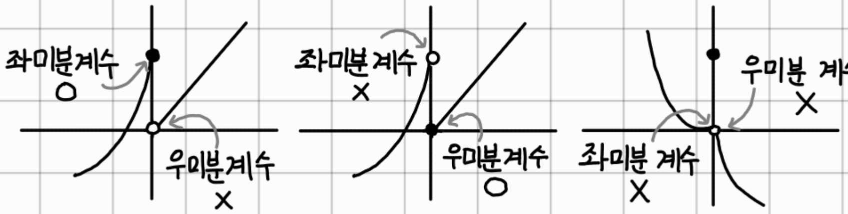
이때 $\lim\limits_{\square\to\triangle}\dfrac{f(\square)-f(\triangle)}{\square-\triangle}=f'(\square)$ 다.

$f(\ )$ 안의 차이가 분모에 있어야 한다.

※ 미분가능성

$$\underbrace{\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\text{우미분계수}}=\underbrace{\lim_{h\to0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\text{좌미분계수}}=f'(a)$$ 면 $x=a$에서 미·가 이다.

〈□의 좌미분계수·우미분계수 = (□, f(□))를 포함한 기울기의 극한〉



$f'(c)$가 존재하면 (=미·가 이면) $f(x)$는 $x=c$에서 연속이다. 명제의 대우는 참이므로 $x=c$에서 $f(x)$가 불연속이면 $f(x)$는 $x=c$에서 미분불가능이다.
(단, 위명제의 역은 거짓이다.)

pf) $x\neq c$에서 $f(x)=f(c)+\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c)$

$$\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}\left\{f(c)+\frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c)\right\}$$

$$=f(c)+f'(c)\cdot0=f(c)\Rightarrow\lim_{x\to c}f(x)=f(c)\ (\text{연속})$$

※ $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+\square h)-f(a-\triangle h)}{(\square+\triangle)h}$ 꼴 해석

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{(f(a+h)-f(a))+(f(a)-f(a-h))}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\underbrace{\boxed{\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}}_{\text{우미분 계수}}+\underbrace{\boxed{\lim_{h\to0+}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}}}_{\text{좌미분 계수}}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\underbrace{\boxed{\lim_{h\to0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}}_{\text{좌미분 계수}}+\underbrace{\boxed{\lim_{h\to0-}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}}}_{\text{우미분 계수}}\right\}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}$(좌미분계수 + 우미분계수)

= 좌미분계수와 우미분계수의 평균이 된다.

$\Rightarrow$ 이는 좌미분계수와 우미분계수의 1:1 내분점으로도 해석 가능하다. 같은 원리로 아래의 식을 관찰해보자.

미분가능한 $f(x)$에대해 모든 x에서 좌미분계수 = 우미분계수 이다. (미분가능성의 정의)

$\Rightarrow \dfrac{\text{좌미분계수}+\text{우미분계수}}{2}$ = 좌미분계수 = 우미분계수 이므로

∴미분가능한 $f(x)$에서 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$ 다.

미분불가능한 $f(x)=|x|$에 대해

$g(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ 에서 $g(0)$의 값을 구하자

$\dfrac{\text{좌미분계수}+\text{우미분계수}}{2}=\dfrac{+1+(-1)}{2}=0$ 이다

하지만 $f'(0)$은 존재하지 않는다.

∴미분불가능한 $f(x)$에서 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\neq f'(x)$ 다.

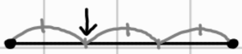
ex) $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{3h}=\dfrac{2f'(a+)+f'(a-)}{3}$

우미분 계수와 좌미분 계수의 1:2 내분점이다.

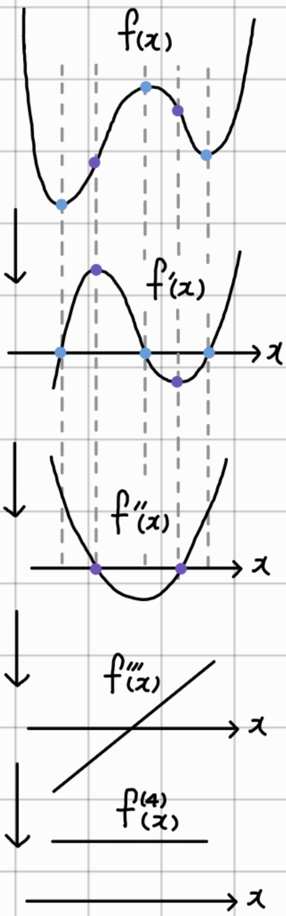
좌미분계수  우미분계수

ex) $\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{f(a+2h)-f(a-h)}{3h}=\dfrac{2f'(a-)+f'(a+)}{3}$

우미분 계수와 좌미분 계수의 2:1 내분점이다.

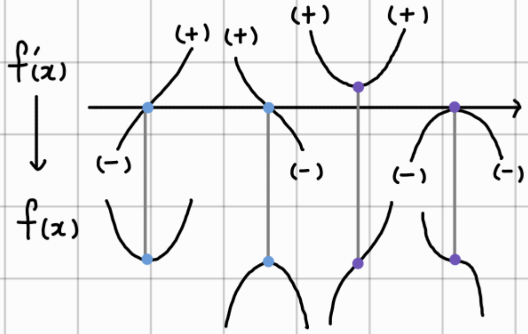
좌미분계수  우미분계수

그래프 해석



※ $f'(x)$

$f'(x)$의 부호는 함수의 증·감을 나타낸다. f가 구간 I에서 미·가 일때 $f'(x)>0$이면 구간 I에서 증가하고 $f'(x)<0$이면 구간 I에서 감소한다.



$f'(x)>0 \overset{O}{\underset{X}{\rightleftarrows}}$ $f(x)$는 증가함수 $\overset{O}{\underset{X}{\rightleftarrows}} f'(x)\geq 0$

$f'(a)>0 \overset{O}{\underset{O}{\rightleftarrows}}$ $f(x)$가 $x=a$에서 증가상태 $\overset{X}{\underset{X}{\rightleftarrows}} f'(a)\geq 0$

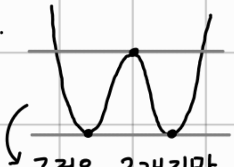
이때 미·가인 f에 대해 $f'(a)=0$이면서 $x=a$를 기준으로 f'의 부호가 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다. (극값 $=f(a)$)

$f'(a)$가 $\begin{cases} (-)\to 0 \to (+) \text{ 면 } x=a\text{에서 극소} \\ (+)\to 0 \to (-) \text{ 면 } x=a\text{에서 극대} \end{cases}$

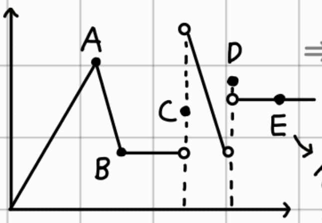
※ 극값 (극대, 극소)

극대(*local maximum*)와 극소(*local minimum*)는 미·가와 상관없다.

$f(x)$에 대해 $x=a$를 포함한 열린구간 (m,n)에서
$f(x) \leq f(a)$면 $f(a)$가 극대값 $(a, f(a))$는 극대점
$f(x) \geq f(a)$면 $f(a)$가 극소값 $(a, f(a))$는 극소점이라 한다.

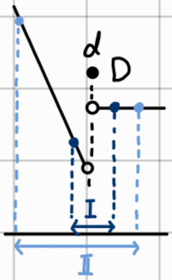


극점은 3개지만 극값은 2개다.



⇒ 극대: A, D, E
극소: B, E
둘다 아님: C

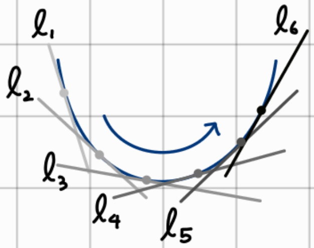
상수함수는 모든점에서 극대이며 극소다.



왼쪽에서 구간 I에서 $f(d) \geq f(x)$지만 구간 II에서는 그렇지 않다. 극대극소는 $f(d) \geq f(x)$거나 $f(d) \leq f(x)$인 구간이 존재하면 성립되므로 구간 I이 존재함이 점 D가 극대점이라는 증거이다.

※ $f''(x)$

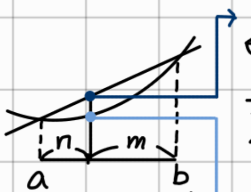
$f''(x)>0$ 이라는 것은 $f'(x)$가 증가한다는 것이다. l_1에서 l_6로 갈수록 f' 값이 증가하며 이때 원함수는 아래로 볼록함을 알 수 있다.

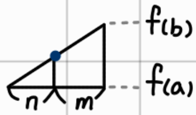


$f''(x)<0$ 이라는 것은 $f'(x)$가 감소한다는 것이다. 이때는 반대로 원함수가 위로 볼록함을 알 수 있다.

• 아래로 볼록 (위로 오목)

$$\frac{mf(a)+nf(b)}{m+n} > f\left(\frac{ma+nb}{m+n}\right)$$

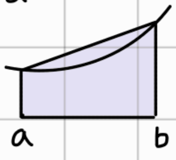




$f(a)$값과 $f(b)$값의 $n:m$ 내분점이다.

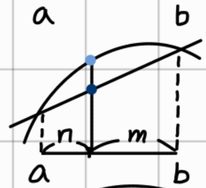
$f(x)$에 a와 b의 $n:m$ 내분점을 대입한 값이다.

$$\int_a^b f(x)dx < \frac{(b-a)}{2}\{f(a)+f(b)\}$$



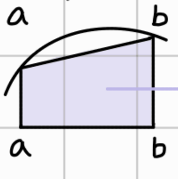
• 위로 볼록 (아래로 오목)

$$\frac{mf(a)+nf(b)}{m+n} < f\left(\frac{ma+nb}{m+n}\right)$$



ex) $\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$\int_a^b f(x)dx > \frac{(b-a)}{2}\{f(a)+f(b)\}$$



적분값이 사다리꼴 넓이보다 크다.

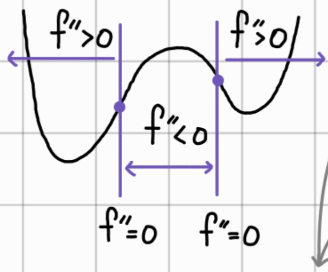
※ 변곡점

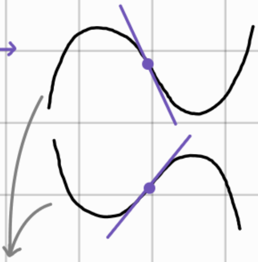
오목성과 볼록성이 바뀌는 지점이다.

$f''(x)$가 연속일 때, $f''(a)=0$이며 $x=a$를 기준으로 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 변곡점이다.

$f''(x)$는 $(f'(x))'$이므로 변곡점은 $f'(x)$가 극값인 곳이다. $f''(x)$가 연속일 필요는 없다.

$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x\leq 0) \\ x^2 & (x>0) \end{cases}$ $x=0$에서 변곡이다.





삼차 f에서 변곡점이 $x=a$일 때 $f'(a)$는 f의 최고차항이 양수면 f의 미분계수의 최솟값, f의 최고차항이 음수면 f의 미분계수의 최댓값이다.

함수의 대칭

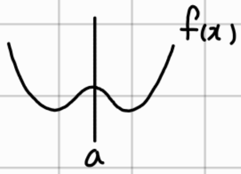
$f(x)=f(2a-x)$

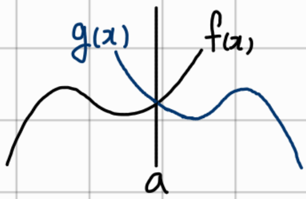
$f(a+x)=f(a-x)$

VS

$g(x)=f(2a-x)$

$g(x+a)=f(a-x)$





$f(x)$ 자체가 $x=a$ 대칭 / $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$ 대칭

전자는 한 함수 내의 대칭성에 대한 식이고
후자는 서로 다른 두 함수의 대칭적 관계를 나타내는 식이다.

함수가 $x=a$ 대칭이라면 $x=a$에서 같은 거리만큼
떨어진 x_1, x_2를 조사해야 하고 이때 $\frac{x_1+x_2}{2}=a$ 다.
즉 $x=a$대칭인 함수 $f(x)$는 $f(a+x)=f(a-x)$에서
$a+x$ 와 $a-x$ 의 평균이 a다.
$f(m+x)=f(3m-x)$ (m은 상수)는
$\frac{m+x+3m-x}{2}=2m$ 에 대해 대칭이다.

※ 우함수 & 기함수

다항함수에서

우함수 : $f(x)=f(-x)$, y축 대칭, $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}$

기함수 : $f(x)=-f(-x)$, 원점대칭, $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1}$

$f(x)=f(-x)$는 $f(x)$의 평균이 $\frac{x+(-x)}{2}=0$ 으로
$x=0$, 즉 y축에 대해 대칭이라는 뜻이다.

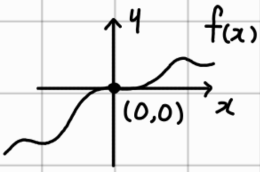
<우함수>

$f(x)=f(-x)$

$f'(x)=-f'(-x)$

$f(x)$가 미.가 라면
$f'(0)=-f'(0)$에서
$f'(0)=0$ 이다.

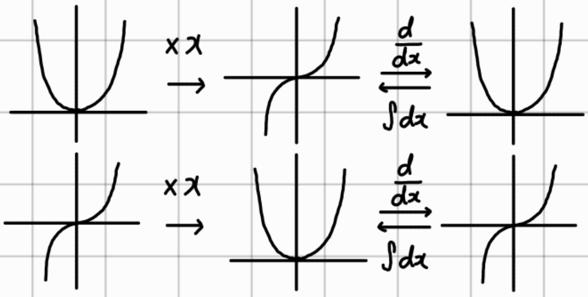
<기함수>



$f(x)=-f(-x)$

$f'(x)=f'(-x)$

$f(x)$가 연속이면
$f(0)=-f(0)$에서
$f(0)=0$이다.

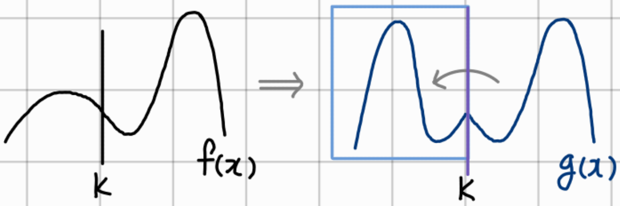


x와 x^2으로 바뀌서 빠르게 생각

① $x \xrightarrow[x=a\text{대칭}]{} (2a-x)$

• $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge k) \\ f(2k-x) & (x<k) \end{cases}$

"x가 k보다 작으면 $f(x)$를 $x=k$에 대칭시키시오."



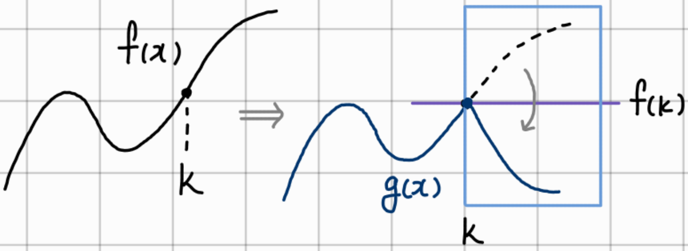
② $y \xrightarrow[y=a\text{대칭}]{} (2a-y)$, $f(x) \to 2a-f(x)$

• $g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge k) \\ 2k-f(x) & (f(x)<k) \end{cases}$

"$f(x)$가 k보다 작으면 $f(x)$를 $y=k$에 대칭시키시오."

• $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le k) \\ 2f(k)-f(x) & (x>k) \end{cases}$

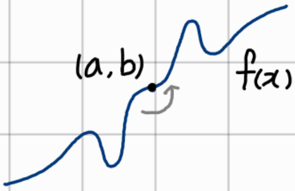
"x가 k보다 크면 $f(x)$를 $y=f(k)$에 대칭시키시오."



③ $x \to 2a-x$, $y \to 2b-y$
(a,b) 점대칭

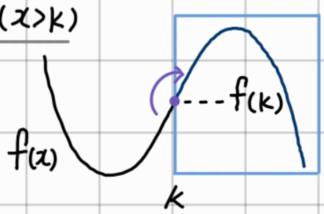
$f(a+x)+f(a-x)=2b$

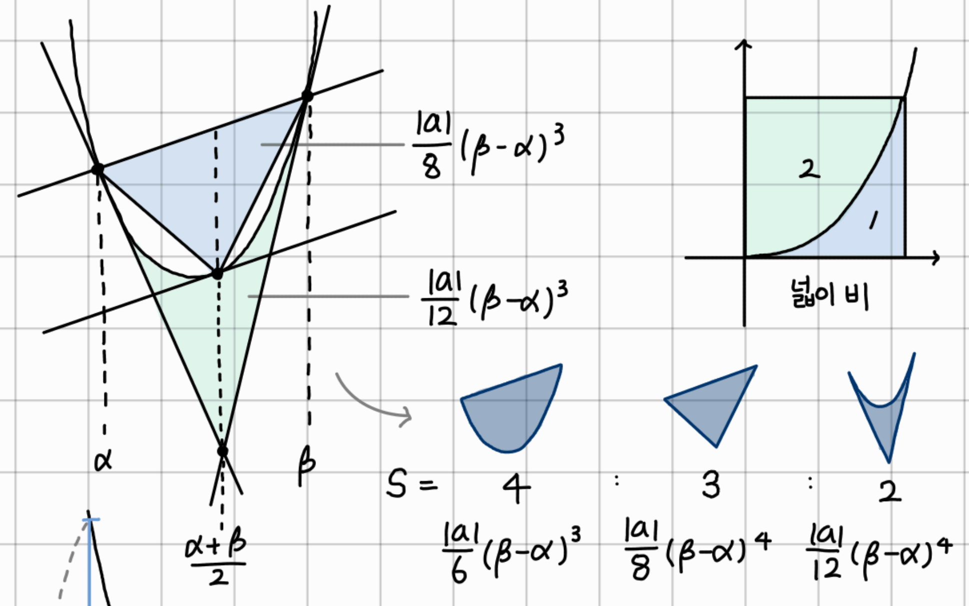
x의 평균은 a y의 평균은 b ⇒ $f(x)$ 자체가 (a,b) 점대칭

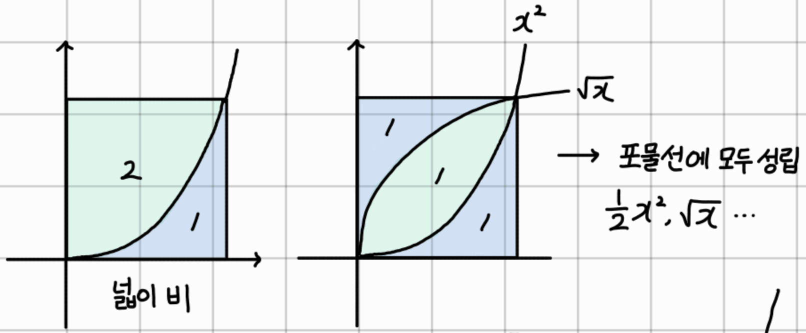


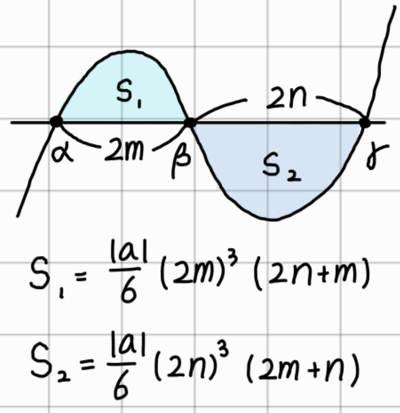
• $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le k) \\ 2f(k)-f(2k-x) & (x>k) \end{cases}$

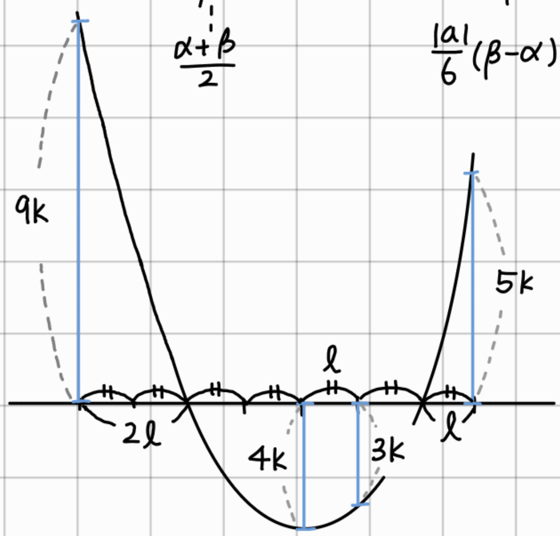
"x가 k보다 크면 $f(x)$를 $(k, f(k))$에 점대칭 하시오."

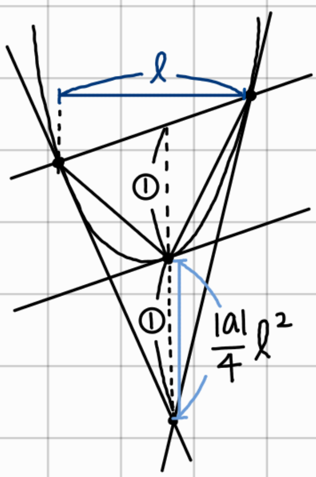


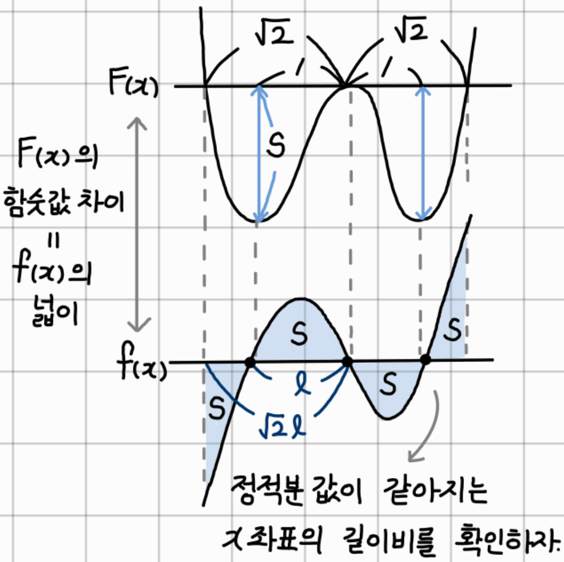


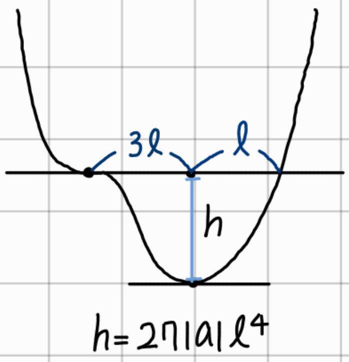


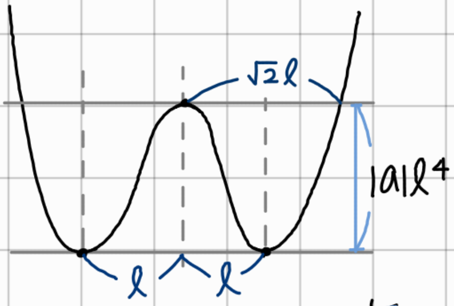


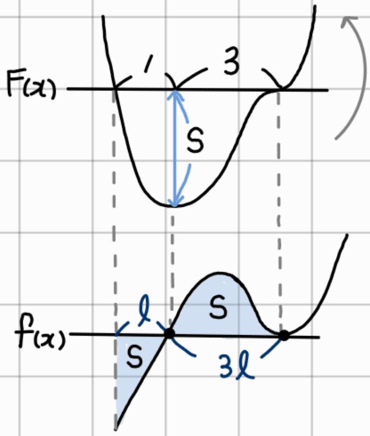


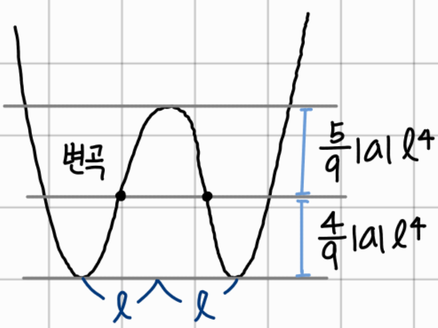


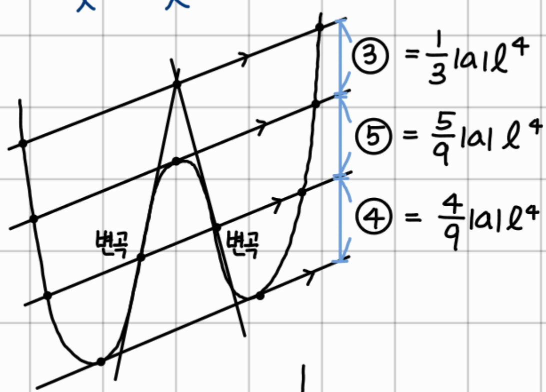


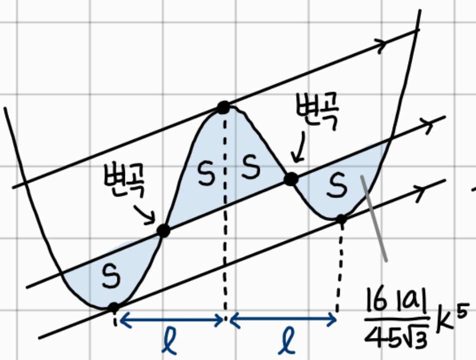


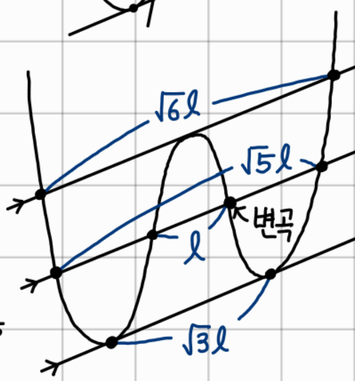












⇒ 사차함수에서 이중접선과 두 변곡점을 지나는 직선의 기울기는 같다.
이때 이중접선의 기울기를 k, 이중접선의 두 접점을 α, β라 하면 사차함수와 $kx+C$ 의 교점은 $\frac{\alpha+\beta}{2}$에 대칭이다.