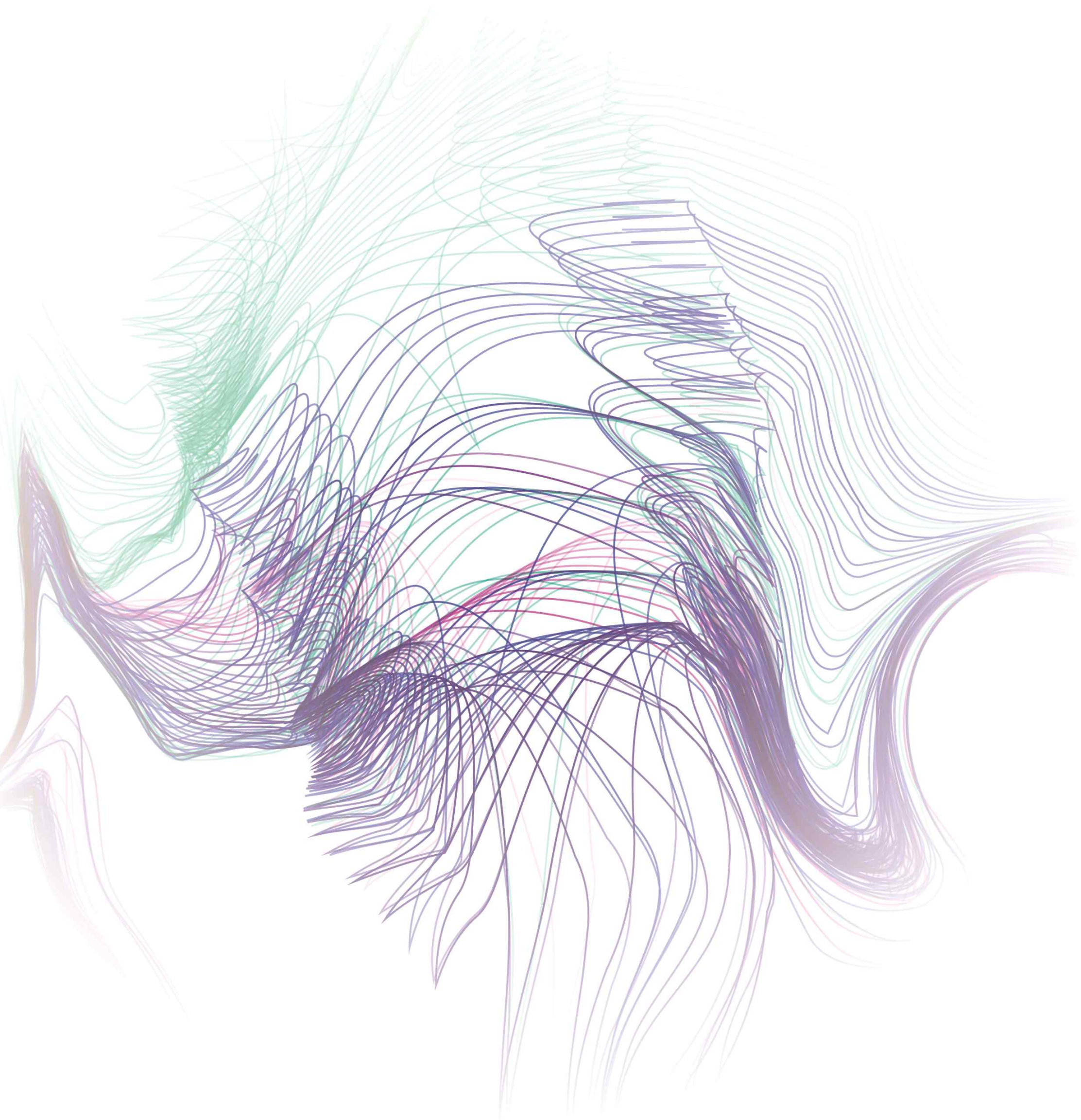


ebs 선별집 Note ver.
이대은 지음

2025학년도
추석특강

확률과 통계



저는 22학년도 이대은 선생님 수업을 들은 한 여학생입니다! 제가 수은쌤 수업을 들으면서 가장 좋았던 점은 크게 두가지로 꼽을 수 있습니다. 첫째로는 어떠한 문제가 나왔을때 이 문제에서 필요로 하는 개념, 떠올려야하는 풀이방식이 어떤건지에 대해 정리해 주신다는 점입니다. 선생님의 이런 수업방식은 제가 처음 보는 문제를 풀 때, 이 문제에 어떤 개념이 들어가 있고 어떤 풀이방식을 적용해야하는지에 대한 풀이 방향을 잡아하는데 큰 도움이 되었습니다. 따라서 선생님을 믿고 공부를 해나가면서 선생님이 강조하시는 실전적인 풀이에 대해서 익힐 수 있었습니다. 둘째로는, 선생님이 학생을 대하는 방식입니다. 저는 수업시간에 질문하기를 두려워하는 학생이었습니다. 학생들의 수업참여를 유도하는 선생님의 수업방식은 제가 모르는부분에 대해서 적극적으로 이야기하고 질문할 수 있도록 만들어주셨습니다.

그 외에도 선생님께서 수업외의 시간에도 학생들에게 친근하게 다가와 고민을 들어주고 같이 고민해주신다는 점에서 학생을 위한 선생님이란 대은쌤을 보고 하는 말이 아닐까?라는 생각을 하게되었습니다. 문제 유형별로 풀이방식을 진행하는데 어려움을 겪거나 새로운 문제를 푸는데 체계가 뚜렷하지 않은 학생들에게 이대은 선생님의 수업을 추천합니다! 제 재수시간에 대은쌤이 함께해서 힘든시절이 찾아올 때마다 든든하게 다시 이겨낼 수 있었던 것 같습니다. 감사했습니다!!

다 못하고 가너 너무 아쉬워요. 그리고 저 진짜 쌤때문에 공부 열심히 했어요. 하도 칭찬도 안해주시고 잔소리만 해서 처음에는 잔소리 듣기 싫어서 공부하긴 나중엔 칭찬 받으려고 열심히 했는데 성격이 요즈나 더 열심히 하고 싶어지더라고요. 지금도 잘하는 과목이 하나도 없지만 그래도 여기까지 올린건 정말 쌤 덕분에 맞아요. 특히 수학은 더 많아요.

그리고 제가 털어놓을 수 있을만큼 편하게 대해주시고 감사해요. 매개로 잘 들으시고 해결하려고 해주셔요.

쌤 오늘 마지막 당직이라는 스토리 봤어요 ㅎㅎ 쌤 수업을 마지막까지 들었으면 좋았을텐데.. 아쉬운 마음이 커요.

그래도 전까지 배운거 잘 기억해서 열심히 엔제와 실모를 푸니 9평에서는 백분위 97을 받았어요

처음엔 스킬처럼 겉가지 내용들이 중요한 줄 알았는데, 수학을 더 하면 할수록 쌤이 알려주신 당위성을 찾고 불안하지 않게 확실히 답을 낼 수 있는 논리를 확립하는게 훨씬 더 중요하단 걸 깨달았어요. 너무 늦게 깨달았나요.. ㅎㅎ

9평 때 연락을 드리고 싶었는데 미처 못드렸고.. 수능 후에 과연 연락을 드릴 수 있을까 싶어 오늘 연락드립니다!

올 한해 정말 수고하셨습니다

마지막으로 저 수능 잘 볼 수 있도록 응원해주세요!

재수하면서 이 선생님 듣고 6등급에서 2등급으로 올랐어요. 딱 7개월 걸렸어요.

실전 개념이 쓰이는 당위성을 대은T의 수업을 통해 배우며 문제 푸는데 큰 도움을 받았습니다. 굉장히 유익한 수업입니다!

수은쌤 수업 들었던 1인으로써 정말 좋습니다 항상 상냥하고 친절하게 가르쳐주시는 선생님입니다 🥰 대은쌤 파이팅!!

대은쌤 수업을 듣고 대학을 간 사람으로 써 한번 속아준다고 생각하고 들어보시면 후회하지 않으실꺼예요 그리고 무엇보다 재밌습니다 🥰 수업중에 졸 수가 없어요!



유튜브



오르비

수학 이대은T

현) 오르비학원 대치

현) 대치명인학원 중계

전) 여주비상에듀기숙학원

*2023, 2024년 수강생수 전과목 1위



추석특강

1. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는?

- (가) $a + b + c + d = 12$
 (나) 서로 다른 세 점 $A(a, b), B(b, c), C(c, d)$ 는 모두 직선 $y = x$ 위에 있지 않다.
 (다) 서로 다른 세 점 $A(a, b), B(b, c), C(c, d)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심은 직선 $y = x$ 위에 있다.

[2025학년도 수능완성 77쪽 18번]

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

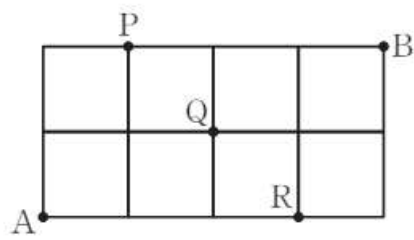
Unit

- ① 부정방정식에서 기하적 조건이 주어진 경우
 ② 세 점이 일직선 위에 있음과 관련된 경우

Note

- Note1.** 세 점이 일직선 위인 경우
 ⇒ 세 점을 이용해 구한 기울기가 서로 같음을 이용하기
- Note2.** 세 점 $A(a, d), B(b, e), C(c, f)$ 의 무게중심
 ⇒ $\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{d+e+f}{3}\right)$
- Note3.** 부정방정식으로 나타낼 수 있는 경우
 ⇒ 중복조합 이용하기

2. 그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.



이 도로망을 따라 갑은 A지점에서 출발하여 세 지점 P, Q, R중의 한 지점까지 최단거리로 가고, 을은 B지점에서 출발하여 세 지점 P, Q, R 중의 한 지점까지 최단거리로 간다. 두 사람은 동시에 출발하여 같은 속력으로 가고, 갈림길에서 방향을 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$ 로 같다고 할 때, 두 사람이 만나지 못할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[2025학년도 수능완성 86쪽 14번]

Unit

- ① 최단경로 문제에서 서로 반대방향으로 움직이는 두 점이 만나는 경우
- ② 여사건을 이용하는 경우

Note

- Note1.** 최단경로 문제에서 서로 반대방향으로 움직이는 두 점이 만나는 경우
⇒ 서로 같은 칸 떨어진 점에서만 만날 수 있다.
- Note2.** 모든 경우의 수 또는 확률 문제는 역함수를 이용한 풀이가 빠르지 않을까라는 의심을 해야 한다.
- Note3.** 최단경로 문제
⇒ 모서리까지 최단경로들을 더하여 구하는 것이 같은 것이 있는 순열보다 빠른 경우가 많다.

3. 1부터 20까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 20장의 카드가 들어 있는 상자에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적혀 있는 수가 홀수인 사건을 A 라 하고, 10 이상이고 20 이하인 자연수 n 에 대하여 n 의 약수인 사건을 B_n 이라 하자. $P(B_n|A) = P(B_n|A^C)$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합을 구하시오. (단, A^C 은 A 의 여사건이다.)

[2025학년도 수능완성 87쪽 17번]

Unit

Note

4. 숫자 1이 적혀 있는 공이 1개, 숫자 2가 적혀 있는 공이 2개, 숫자 3이 적혀 있는 공이 3개, y , 숫자 n 이 적혀 있는 공이 n 개 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 그 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} E(9X_n+1)$ 의 값은? (단, n 은 자연수이다.)

[2025학년도 수능완성 96쪽 11번]

- ① 280 ② 310 ③ 340 ④ 370 ⑤ 400

Unit

Note

5. $0 \leq x \leq 6$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 2) \\ x-2 & (2 \leq x < 4) \\ x-4 & (4 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

에 대하여 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 6$ 이고 X 의 확률밀도함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = k \times |f(x) - 1| (k > 0)$$

이다. $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq a\right) = \frac{5}{12}$ 일 때, $k+a$ 의 값은? (단, k, a 는 상수이다.)

[2025학년도 수능완성 98쪽 17번]

- ① $\frac{10}{3}$
 ② $\frac{7}{2}$
 ③ $\frac{11}{3}$
 ④ $\frac{23}{6}$
 ⑤ 4

Unit

- ① 확률밀도함수가 미지수를 포함하는 경우

Note

- Note1.** 확률밀도함수가 미지수를 포함하는 경우
 ⇒ 넓이가 1임을 이용해 미지수 관계식 구하기
- Note2.** 대칭이동, 평행이동
 ⇒ 기하적해석 이용하기

b. 숫자 2, 4, 6, 8이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이 시행을 2번 반복할 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 숫자의 평균을 $\bar{X}$ 라 하자. $V(\bar{X})$ 의 값은?

[2025학년도 수능완성 102쪽 31번]

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{3}{2}$
- ③ $\frac{5}{2}$
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ $\frac{9}{2}$

Unit

- ① 복원추출로 카드뽑기
- ② 이산확률분포에서 표본평균

Note

- Note1. 공 뽑기에 관한 문제
⇒ 복원추출, 비복원추출 먼저 확인하기
- Note2. 표본평균에 관한 문제는
⇒ $E(\bar{X})=E(X)$, $V(\bar{X})=\frac{1}{n}V(X)$, $\sigma(\bar{X})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$
- Note3. 이산확률분포에서 표본평균에 대한 문제
① 모평균에 대한 평균, 분산, 표준편차 구하기
② $E(\bar{X})=E(X)$, $V(\bar{X})=\frac{1}{n}V(X)$, $\sigma(\bar{X})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$
이용하여 문제에서 요구하는 값 구하기

7. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에서 집합 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는?

4 이하의 자연수 n 에 대하여 집합 $\{x | f(x) = n, x \in X\}$ 의 원소의 개수를 a_n 이라 하면 3 이하의 모든 자연수 k 에 대하여 $a_k + a_{k+1} = 3$ 이다.

[2025학년도 수능완성 128쪽 28번]

- ① 320 ② 340 ③ 360 ④ 380 ⑤ 400

Unit

- ① 복잡한 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하는 경우
- ② 동일한 함수값을 갖는 x 의 개수에 대한 조건이 주어진 경우
- ③ 함수의 개수 조건에 수열이 등장하는 경우

Note

Note1. 정의역 r 개, 공역 n 개인 함수의 개수

조건이 없는 경우 $\Rightarrow {}_n\Pi_r$

$f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow {}_nH_r$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow {}_nC_r$

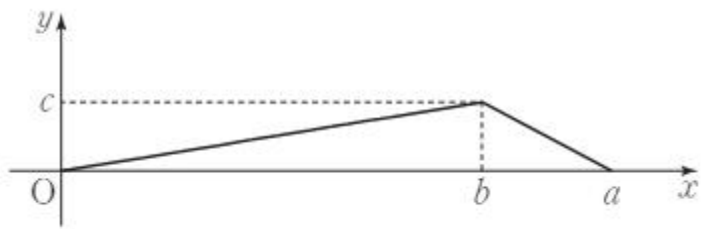
$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow {}_nP_r$

Note2. 모든 경우의 수와 확률 문제는 여사건이 빠르지 확인해야 한다.

Note3. 지역의 개수가 정해진 경우

$\Rightarrow$ 해당 지역을 적어도 한 번씩 선택해야 한다.

8. 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq a$ 이고, X 의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$4P\left(0 \leq X \leq \frac{b}{2}\right) = 3P(b \leq X \leq a)$ 일 때, $P\left(\frac{b}{2} \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{q}{p}$ 이다.
 $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[2025학년도 수능완성 129쪽 29번]

Unit

- ① 확률밀도함수가 미지수를 포함하는 경우
- ② 확률밀도함수에 대한 관계식이 주어진 경우

Note

- Note1. 확률밀도함수가 미지수를 포함하는 경우
⇒ 넓이가 1임을 관계식으로 이용하기
- Note2. 확률밀도함수의 넓이를 구할 때
⇒ 도형의 성질을 반드시 이용한다.

9. 3보다 큰 상수 k 에 대하여 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq k$ 이고 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} ax & (0 \leq x \leq 2) \\ 2a & (2 \leq x \leq k) \end{cases}$$

연속확률변수 Y 가 갖는 값의 범위는 $0 \leq Y \leq 6$ 이고 Y 의 확률밀도함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq 3) \\ f(6-x) & (3 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

일 때, $P\left(1 \leq X \leq \frac{2}{3}k\right)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

[2025학년도 수능완성 164쪽 28번]

- ① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{11}{24}$ ③ $\frac{12}{48}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{25}{48}$

Unit

- ① 확률밀도함수가 미지수를 포함하는 경우
- ② 대칭성을 이용하여 확률밀도함수를 준 경우

Note

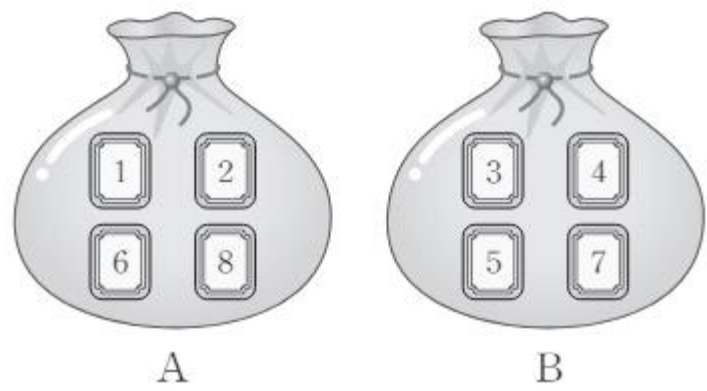
- Note1.** 확률밀도함수가 미지수를 포함하는 경우
 $\Rightarrow$ 넓이가 1임을 이용해 관계식을 잡는다.
- Note2.** $f(x)$, $f(2a-x)$ 가 주어지는 경우
 $\Rightarrow$ 대칭성 관점에서 해석을 시도한다.

10. 주머니 A에는 숫자 1, 2, 6, 8이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 3, 4, 5, 7이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져
나온 눈의 수가 6의 약수이면
주머니 A에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 주머니 B에 넣고,
나온 눈의 수가 6의 약수가 아니면
주머니 B에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 주머니 A에
넣는다.

이 시행을 두 번 반복한 후 주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합이 주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합보다 클 때, 두 주머니 A, B에 들어 있는 카드의 개수가 같을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[2025학년도 수능완성 165쪽 29번]



Unit

① 특정 시행의 결과마다 규칙이 다른 경우

Note

- Note1.** 케이스 마다 식이 다르면
⇒ 해당 케이스 분류하기
- Note2.** 공 뽑기
⇒ 복원추출, 비복원추출 확인하기

11. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오.

- (가) 5 이하의 모든 자연수 x 에 대하여 $f(x) \leq f(x+1)$ 이다.
 (나) $3 \leq x \leq 4$ 일 때, $f(x)$, $f(x+1)$, $f(x+2)$ 의 값은 3의 배수이다.

[2025학년도 수능완성 165쪽 30번]

Unit

① 복잡한 조건의 함수의 개수를 구하는 경우

Note

Note1. 정의역 r 개, 공역 n 개인 함수의 개수

조건이 없는 경우 $\Rightarrow {}_n\Pi_r$

$f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow {}_n\mathbf{H}_r$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow {}_n\mathbf{C}_r$

$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow {}_n\mathbf{P}_r$

Note2. 케이스 분류시

$\Rightarrow$ 조건이 많이 붙은 것을 기준으로 케이스를 나누는 것이 유리하다.

12. 다음 조건을 만족시키는 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 세 부분집합 A , B , C 의 모든 순서쌍 (A, B, C) 의 개수를 구하시오.

- (가) $n(A \cup B) = 3, A \cap C = \emptyset$
(나) 두 집합 A, C 는 공집합이 아니다.

[2025학년도 수능특강 14쪽 2번]

Unit

① 교집합, 합집합 등 원소의 개수가 주어진 경우

Note

Note1. 부분집합의 개수 구하기
⇒ 조건을 만족시키는 벤다이어그램을 그려서 각각의 원소가 들어갈 수 있는 자리의 수를 이용해 구하면 된다.

- 13.** 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 카드가 각각 2장씩 있다. 이 12장의 카드를 모두 일렬로 나열하려고 할 때, 서로 이웃한 카드에 적힌 두 수의 최대공약수가 항상 5의 약수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)



[2025학년도 수능특강 14쪽 3번]

- ① 9640 ② 9720 ③ 9800 ④ 9880 ⑤ 9960

Unit

- ① 일렬로 나열하는 문제에서 이웃관련 최대공약수와 관련된 조건이 주어진 경우

Note

Note1. 일렬로 나열하기에서 조건이 붙은 경우

⇒ 제한조건이 가장 많은 것부터 먼저 나열하기

Note2. 약수, 배수와 관련된 문제

⇒ 소인수분해를 이용하는 경우가 많다.

14. ${}_4C_0 - {}_4C_1 \times 5 + {}_4C_2 \times 5^2 - {}_4C_3 \times 5^3 + {}_4C_4 \times 5^4$ 의 값은?
[2025학년도 수능특강 21쪽 4번]
① 64 ② 128 ③ 192 ④ 256 ⑤ 320

Unit

① 이항계수의 성질 응용

Note

Note1. ${}_nC_r$ 들의 합에서 n 이 일정한 경우
⇒ 이항계수의 성질을 이용하여 해석하기

15. 두 집합 $X = \{x | x \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$,
 $Y = \{x | x \text{는 } -9 \leq x \leq 9 \text{인 정수}\}$ 에 대하여 다음 조건을
만족시키는 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수는?

- (가) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면
 $f(x_1) + 2 \leq f(x_2)$ 이다.
- (나) $f(6) = f(3) + 10$

[2025학년도 수능특강 28쪽 2번]

- ① 525 ② 540 ③ 555 ④ 570 ⑤ 585

Unit

- ① 증가함수의 응용
- ② 복잡한 조건이 주어진 함수의 개수 구하기

Note

Note1. 정의역 r 개, 공역 n 개인 함수의 개수
조건이 없는 경우 $\Rightarrow {}_n\Pi_r$
 $f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow {}_n\mathrm{H}_r$
 $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow {}_n\mathrm{C}_r$
 $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow {}_n\mathrm{P}_r$

16. 검은색 볼펜 5개, 빨간색 볼펜 3개, 파란색 볼펜 1개가 있다.
숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4개의 필통에 이 9개의 볼펜을
다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 넣는 경우의 수를 구하
시오. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않는다.)

- (가) 파란색 볼펜을 넣지 않는 필통에는 검은색 볼펜을 1개
이상씩 넣는다.
- (나) 숫자 k ($k=1, 2, 3, 4$)가 적혀 있는 필통에 넣는 모든
볼펜의 개수를 S_k 라 할 때, 4 이하의 임의의 두 자연수
 m, n 에 대하여 $|S_m - S_n| \leq 3$ 이다.

[2025학년도 수능특강 28쪽 3번]

Unit

① 상자에 넣는 개수의 차에 대한 조건이 주어진 경우

Note

- Note1.** 서로 같은 것을 서로 같은 것에 넣기 $\Rightarrow$ 자연수 분할
서로 같은 것을 서로 다른 것에 넣기 $\Rightarrow$ 중복조합
서로 다른 것을 서로 다른 것에 넣기 $\Rightarrow$ 중복순열
서로 다른 것을 서로 같은 것에 넣기 $\Rightarrow$ 집합의 분할
- Note2.** 서로 다른 것을 넣을 때 최소 개수가 정해진 경우
 $\Rightarrow$ 미리 넣기는 서로 같은 것만 할 수 있다.
- Note3.** ‘적어도’, ‘또는’, ‘이상 이하’
 $\Rightarrow$ 여사건을 이용하면 빠른 경우가 많다.

17. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 선택한 함수 f 가 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여
 $\{x - f(3)\} \{f(x) - 3\} \leq 0$ 이다.

[2025학년도 수능특강 40쪽 3번]

Unit

- ① $\{x - f(a)\} \{f(x) - a\} \leq 0$ 형태의 조건이 주어진 함수의 개수를 구하는 경우이다.

Note

Note1. 케이스 나누는 경우

$\Rightarrow$ 조건에 따라 영향을 가장 많이 받는 것을 기준으로 케이스를 나누는 게 계산에 있어서 유리하다.

Note2. 정의역 r 개, 공역 n 개인 함수의 개수

조건이 없는 경우 $\Rightarrow {}_n\Pi_r$

$f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow {}_n\mathrm{H}_r$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow {}_n\mathrm{C}_r$

$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow {}_nP_r$

18. 그림과 같이 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 1개의 동전은 뒷면이 보이도록 탁자 위에 놓여 있다.



탁자 위의 4개의 동전 중 임의로 서로 다른 3개를 택하여 동시에 뒤집는 시행을 한다. 이 시행을 3번 반복할 때, 3번째 시행 후 처음으로 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 확률은?

[2025학년도 수능특강 42쪽 2번]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

Unit

- ① 특정 번째에 처음으로 특정 결과가 나와야 하는 경우
- ② 동전 뒤집기에서 공식 없이 직접 규칙을 파악하는 경우

Note

- Note1.** 동전 뒤집기에서 시행을 여러번 하는 경우
⇒ 동전이 뒤집어진 횟수가 홀수번인 경우와 짝수번인 경우로 케이스 나누기
- Note2.** 특정 번째에 특정 결과가 나와야 하는 경우
⇒ 특정 번째 이전에 결과가 나오지 않도록 제외시켜야 한다.

19. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택한다. 선택한 함수 f 가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 3일 확률은?

함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소 중 홀수의 개수는 3이다.

[2025학년도 수능특강 56쪽 1번]

- ① $\frac{6}{73}$ ② $\frac{7}{73}$ ③ $\frac{8}{73}$ ④ $\frac{9}{73}$ ⑤ $\frac{10}{73}$

Unit

- ① 합성함수의 치역의 원소의 개수가 정해진 경우

Note

Note1. 치역의 개수가 정해진 경우

$\Rightarrow$ 선택된 치역은 적어도 한 번씩 선택받아야 한다.

Note2. A 일 때, B 일 확률

$\Rightarrow A$ 가 전사건이 아니면 조건부확률이다.

20. 어느 대학교 수시 면접장에 모인 n 명의 학생들의 수험번호를 확인해보니 수험번호가 20 이하인 학생이 15명이고 홀수인 학생이 12명이었다. 이 n 명의 학생들 중 임의로 한 명의 학생을 택할 때, 이 학생의 수험번호가 20 이하인 사건과 홀수인 사건이 서로 독립이 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. (단, 수험번호는 자연수이다.)

[2025학년도 수능특강 56쪽 3번]

Unit

① 서로 독립이 되도록 하는 조건 구하기

Note

Note1. 두 사건 A, B 가 독립일 때
 $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 또는
 $n(S)n(A \cap B) = n(A)n(B)$ 이용하기

21. 이산확률변수 X 가 갖는 값이 $0, 1, 2, 3$ 이고

$$P(X=k+1)=\frac{1}{2}P(X=k) \quad (k=1, 2)$$

이다. $E(X)=\frac{11}{16}$ 일 때, $P(X=0)+P(X=2)$ 의 값은?

[2025학년도 수능특강 69쪽 1번]

- ① $\frac{9}{16}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{11}{16}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{13}{16}$

Unit

- ① 확률질량함수의 관계식이 주어진 경우

Note

Note1. $P(X=k+1)$ 와 $P(X=k)$ 의 관계식이 주어진 경우

$\Rightarrow$ 수열의 점화식으로 해석할 수 있다.

Note2. 점화식 $a_{n+1}=a_n \times r$

$\Rightarrow$ 등비수열을 나타내는 점화식이다.

22. 두 이산확률변수 X, Y 의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	a	$2a$	$3a$	$4a$	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	1

Y	a^2+b	$2a^2+b$	$3a^2+b$	$4a^2+b$	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	1

$E(X)=\frac{5}{4}$ 일 때, $E(Y)$ 의 값은?

[2025학년도 수능특강 69쪽 4번]

- ① $\frac{3}{4}$
- ② $\frac{7}{8}$
- ③ 1
- ④ $\frac{9}{8}$
- ⑤ $\frac{5}{4}$

Unit

- ① 이산확률분포에서 확률이 같은 두 확률변수에 대한 확률분포표가 주어진 경우

Note

- Note1.** 이산확률분포에서 확률이 같은 두 확률변수에 대한 확률분포표가 주어진 경우
⇒ 두 확률변수 사이의 관계를 파악하여 이용하기
- Note2.** 확률질량함수가 미지수를 포함하는 경우
⇒ 확률의 합이 1임을 이용해 관계식 구하기

23. 자연수 n 에 대하여 이산확률변수 X 가 갖는 값은 $1, 2, 3, \dots, 2n$ 이고 X 의 확률질량함수는

$$P(X=k)=c\{(-1)^{k+1}+k\} \quad (k=1, 2, 3, \dots, 2n)$$

이다. $E(X)=\frac{48}{5}$ 일 때, 자연수 n 의 값은? (단, c 는 상수이다.)

[2025학년도 수능특강 71쪽 1번]

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

Unit

- ① 확률질량함수가 미지수를 포함하는 경우

Note

Note1. 확률질량함수가 미지수를 포함하는 경우

⇒ 확률의 합이 1임을 이용해 관계식 구하기

Note2. 확률질량함수와 평균 또는 분산이 주어진 경우

⇒ $E(X)=\sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad V(X)=\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i$ 이용하기

24. 양의 실수 t 에 대하여 확률변수 X 는 평균이 t^2 이고 표준편차가 $\frac{1}{t}$ 인 정규분포를 따른다. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(t)$ 를 $f(t)=P(X\leq 3)$ 이라 할 때, 함수 $f(t)$ 의 최댓값을 아래 쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

[2025학년도 수능특강 85쪽 3번]

- ① 0.8413 ② 0.9104 ③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

Unit

- ① 정규분포에서 평균 또는 표준편차가 변수를 포함하는 경우
- ② 정규분포에서 확률의 최댓값 구하기

Note

Note1. 정규분포에서 확률에 대한 조건이 주어진 경우
⇒ 표준화하여 정규분포곡선을 그리고 조건을 만족시키는 경우를 그래프를 이용해 해석하기

25. 어느 모집단의 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 아래쪽과 같다. 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\bar{X}$ 라 하자. 3 이하의 어떤 자연수 k 에 대하여

$$P(\bar{X}=k)=P(X=k)$$

를 만족시킨다. $a > b > 0$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	a	$\frac{1}{7}$	b	1

[2025학년도 수능특강 99쪽 7번]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

Unit

- ① 이산확률분포에서 모집단과 표본평균의 관계식이 주어진 경우

Note

Note1. 확률질량함수가 미지수를 포함하는 경우

⇒ 확률의 합이 1임을 이용해 관계식 구하기

Note2. 이산확률분포에서 표본평균에 대한 특정 확률 구하기

⇒ 표본평균을 만족시키는 경우를 직접 구해서 주어진 모집단의 확률을 이용해 직접 구해야 한다.

Note3. 확률끼리 곱하는 경우

⇒ 사건의 발생 순서를 고려해야 한다.

26. 각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자와 각 면에 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 사용하여 다음의 시행을 한다.

두 개의 상자를 동시에 한 번 던져
바닥에 닿은 두 면에 적혀 있는 두 수가 다르면 두 수 중 작은 수를 기록하고,
바닥에 닿은 두 면에 적혀 있는 두 수가 같으면 6을 기록한다.

위의 시행을 2번 반복하여 기록한 두 수의 평균을 $\overline{X}$ 라 할 때,
 $P(\overline{X}=4)=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

[2025학년도 수능특강 100쪽 1번]

Unit

① 문제에 제시된 조건에 대한 확률분포표를 직접 그려서 푸는 경우

Note

Note1. 이산확률분포에서 표본평균에 대한 특정 확률 구하기
⇒ 표본평균을 만족시키는 경우를 직접 구해서 주어진 모집단의 확률을 이용해 직접 구해야 한다.
표가 그려져 있지 않은 경우 해당 표본평균이 되는 경우만 구해도 된다.

27. 확률변수 X 는 정규분포 $N(m_1, \sigma_1^2)$, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(m_2, \sigma_2^2)$ 을 따르고, 확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 와 확률변수 Y 의 확률밀도함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = f(-x)$ 이다.
(나) $g(1) = f(9)$

확률변수 X 의 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\bar{X}$ 라 하고, 확률변수 Y 의 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\bar{Y}$ 라 하자.

$P(\bar{X} \leq 3) = P(\bar{Y} \geq -1)$ 일 때, 자연수 n 의 값을 구하시오.

[2025학년도 수능특강 100쪽 2번]

Unit

- ① 서로 다른 정규분포에 대한 관계식이 주어진 경우

Note

Note1. 정규분포인 서로 다른 두 확률변수가 나오는 경우

⇒ 표준화하여 비교하기

Note2. 서로 다른 정규분포에 대한 관계식이 주어진 경우

⇒ 정규분포 곡선을 그려서 조건을 만족시키는 경우 구하기

정답 및 해설

추석특강_확률과 통계									
1	④	2	111	3	42	4	④	5	④
6	③	7	⑤	8	55	9	⑤	10	19
11	254	12	344	13	②	14	④	15	①
16	688	17	43	18	②	19	④	20	104
21	③	22	②	23	③	24	④	25	②
26	287	27	144						

■ 1. ④

두 조건 (나), (다)에 의하여 서로 다른 세 점 $A(a, b)$, $B(b, c)$,

$C(c, d)$ 의 무게중심 $\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}\right)$ 가 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\frac{b+c+d}{3} = \frac{a+b+c}{3}, a=d$$

조건 (가)에서

$$2a+b+c=12$$

(i) $a=1$ 일 때

$$b+c=10 \text{이므로}$$

$c=10-b$ 이고 세 점 A, B, C 의 좌표는 각각

$$(1, b), (b, 10-b), (10-b, 1) \text{이다.}$$

이 세 점 A, B, C 가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b \neq 1$ 이고

$$b \neq 5 \text{이고 } b \neq 9 \text{이다.}$$

$b=b'+1, c=c'+1$ (b', c' 은 음이 아닌 정수)라 하면

$$(b'+1) + (c'+1) = 10$$

$$b'+c'=8$$

이고, 이를 만족시키는 b', c' 의 순서쌍 (b', c') 의 개수는

$${}_2H_8 = {}_{2+8-1}C_8 = {}_9C_8 = {}_9C_1 = 9$$

이때 $b'=0, b'=4, b'=8$ 인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$9-3=6$$

(ii) $a=2$ 일 때

$$b+c=8 \text{이므로}$$

$c=8-b$ 이고 세 점 A, B, C 의 좌표는 각각

$$(2, b), (b, 8-b), (8-b, 2) \text{이다.}$$

이 세 점 A, B, C 가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b \neq 2$ 이고

$$b \neq 4 \text{이고 } b \neq 6 \text{이다.}$$

$b=b'+1, c=c'+1$ (b', c' 은 음이 아닌 정수)라 하면

$$(b'+1) + (c'+1) = 8$$

$$b'+c'=6$$

이고, 이를 만족시키는 b', c' 의 순서쌍 (b', c') 의 개수는

$${}_2H_6 = {}_{2+6-1}C_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$$

이때 $b'=1, b'=3, b'=5$ 인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$7-3=4$$

(iii) $a=3$ 일 때

$$b+c=6 \text{이므로}$$

$c=6-b$ 이고 세 점 A, B, C 의 좌표는 각각

$$(3, b), (b, 6-b), (6-b, 3) \text{이다.}$$

이 세 점 A, B, C 가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b \neq 3$ 이다.

$b=b'+1, c=c'+1$ (b', c' 은 음이 아닌 정수)라 하면

$$(b'+1) + (c'+1) = 6$$

$$b'+c'=4$$

이고, 이를 만족시키는 b', c' 의 순서쌍 (b', c') 의 개수는

$${}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

이때 $b'=2$ 인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍

(a, b, c, d) 의 개수는

$$5-1=4$$

(iv) $a=4$ 일 때

$$b+c=4 \text{이므로}$$

$c=4-b$ 이고 세 점 A, B, C 의 좌표는 각각

$$(4, b), (b, 4-b), (4-b, 4) \text{이다.}$$

이 세 점 A, B, C 가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b \neq 2$ 이다.

$b=b'+1, c=c'+1$ (b', c' 은 음이 아닌 정수)라 하면

$$(b'+1) + (c'+1) = 4$$

$$b'+c'=2$$

이고, 이를 만족시키는 b', c' 의 순서쌍 (b', c') 의 개수는

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

이때 $b'=1$ 인 경우를 제외하면 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍

(a, b, c, d) 의 개수는

$$3-1=2$$

(v) $a=5$ 일 때

$$b+c=2 \text{이므로}$$

$c=2-b$ 이고 세 점 A, B, C 의 좌표는 각각

$$(5, b), (b, 2-b), (2-b, 5) \text{이다.}$$

이 세 점 A, B, C 가 직선 $y=x$ 위에 있지 않으므로 $b \neq 1$ 이다.

이때 $b+c=2$ 를 만족시키는 자연수 b, c 의 순서쌍 (b, c) 가 존재하지 않는다.

즉, 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 는 존재하지 않는다.

(i)~(v)에 의하여 구하는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍

(a, b, c, d) 의 개수는

$$6+4+4+2+0=16$$

■ 2. 111

갑이 A지점을 출발하여 P지점으로 갈 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

갑이 A지점을 출발하여 Q지점으로 갈 확률은

$$3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

갑이 A지점을 출발하여 R지점으로 갈 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

마찬가지로 을이 B지점을 출발하여 P지점으로 갈 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

을이 B지점을 출발하여 Q지점으로 갈 확률은

$$3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

을이 B지점을 출발하여 R지점으로 갈 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

두 사람이 세 지점 P, Q, R에서 만날 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{64}$$

이므로 두 사람이 만나지 못할 확률은

$$1 - \frac{17}{64} = \frac{47}{64}$$

따라서 $p=64, q=47$ 이므로 $p+q=111$

■ 3. 42

집합 A 는 20 이하의 홀수의 집합이고, 집합 A^C

은 20 이하의 짝수의

집합이므로 두 집합 A, A^C

의 원소의 개수는 같다.

$P(B_n|A) = P(B_n|A^C)$ 이라면 집합 B_n 의 원소 중 짝수의 개수와 홀수의 개수가 같아야 한다.

$n=10$ 일 때 $B_{10}=\{1, 2, 5, 10\}$

$n=14$ 일 때 $B_{14}=\{1, 2, 7, 14\}$

$n=18$ 일 때 $B_{18}=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

이 세 가지 경우만 집합 B_n 의 원소 중 짝수의 개수와 홀수의 개수가 같다.
따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 값의 합은
 $10 + 14 + 18 = 42$

■4. ④

주머니 안에 들어 있는 모든 공의 개수는

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이고, 확률변수 X_n 이 갖는 값은 1, 2, 3, ..., n 이다.

$$P(X_n=1)=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2\times 1}{n(n+1)}$$

$$P(X_n=2)=\frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2\times 2}{n(n+1)}$$

$$P(X_n=3)=\frac{3}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2\times 3}{n(n+1)}$$

⋮

$$P(X_n=n)=\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2\times n}{n(n+1)}$$

확률변수 X_n 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_n	1	2	3	⋯	n	합계
$P(X_n=x)$	$\frac{2\times 1}{n(n+1)}$	$\frac{2\times 2}{n(n+1)}$	$\frac{2\times 3}{n(n+1)}$	⋯	$\frac{2\times n}{n(n+1)}$	1

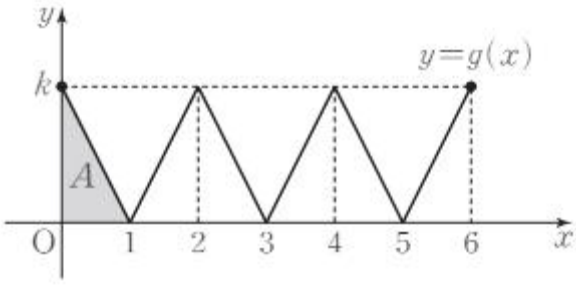
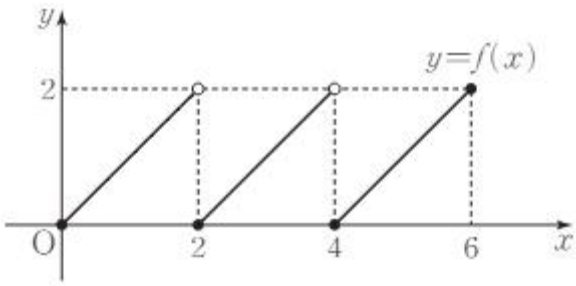
$$\begin{aligned} E(X_n) &= 1\times\frac{2\times 1}{n(n+1)}+2\times\frac{2\times 2}{n(n+1)}+3\times\frac{2\times 3}{n(n+1)} \\ &\quad +\cdots+n\times\frac{2\times n}{n(n+1)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2n+1}{3} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10}E(9X_n+1) &= \sum_{n=1}^{10}\{9E(X_n)+1\} \\ &= \sum_{n=1}^{10}\left(9\times\frac{2n+1}{3}+1\right) \\ &= \sum_{n=1}^{10}(6n+4) \\ &= 6\times\frac{10\times 11}{2}+4\times 10 \\ &= 370 \end{aligned}$$

■5. ④

$0\leq x\leq 6$ 에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 가 확률밀도함수이므로 $0\leq x\leq 6$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0, x=6$ 으로 둘러싸인 부분이 넓이가 1이다.
이 넓이는 밑변의 길이가 1이고 높이가 k 인 직각삼각형 A의 넓이의 6

배와 같으므로 직각삼각형 A의 넓이는 $\frac{1}{6}$ 이다.

$$\text{즉, } \frac{1}{2}\times 1\times k=\frac{1}{6}, \quad k=\frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 1\right)$ 의 값은 직각삼각형 A의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 배와 같고,

$P(1\leq X\leq 3)$ 의 값은 직각삼각형 A의 넓이의 2배와 같다.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 3\right) &= P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 1\right)+P(1\leq X\leq 3) \\ &= \frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times 2=\frac{3}{8}<\frac{5}{12} \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 4\right) &= P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 3\right)+P(3\leq X\leq 4) \\ &= \frac{3}{8}+\frac{1}{6}=\frac{13}{24}>\frac{5}{12} \end{aligned}$$

이므로 $3<a<4$ 이다.

이때

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq a\right) &= P\left(\frac{1}{2}\leq X\leq 1\right)+P(1\leq X\leq 3)+P(3\leq X\leq a) \\ &= \frac{1}{24}+\frac{1}{3}+P(3\leq X\leq a)=\frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\text{에서 } P(3\leq X\leq a)=\frac{1}{24} \text{ 이므로 } a=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

$$\text{따라서 } k+a=\frac{1}{3}+\frac{7}{2}=\frac{23}{6}$$

■6. ③

카드에 적혀 있는 숫자를 확률변수 X 라 하면 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$E(X)=2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{4}=5$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ &= 2^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}+6^2\times\frac{1}{4}+8^2\times\frac{1}{4}-5^2=5 \end{aligned}$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$V(\bar{X})=\frac{V(X)}{2}=\frac{5}{2}$$

{다른 풀이}

$$E(X)=5$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X-m)^2) \\ &= (2-5)^2 \times \frac{1}{4} + (4-5)^2 \times \frac{1}{4} + (6-5)^2 \times \frac{1}{4} + (8-5)^2 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{20}{4} = 5 \end{aligned}$$

표본평균 $\bar{X}$ 에 대한 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\bar{X}$	2	3	4	5	6	7	8	합계
$P(\bar{X}=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

이때

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{2}{16} + 4 \times \frac{3}{16} + 5 \\ &\times \frac{4}{16} + 6 \times \frac{3}{16} + 7 \times \frac{2}{16} + 8 \times \frac{1}{16} \\ &= \frac{80}{16} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 \\ &= 2^2 \times \frac{1}{16} + 3^2 \times \frac{2}{16} + 4^2 \times \frac{3}{16} + 5^2 \times \frac{4}{16} + 6^2 \times \frac{3}{16} \\ &\quad + 7^2 \times \frac{2}{16} + 8^2 \times \frac{1}{16} - 5^2 \\ &= \frac{55}{2} - 25 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

■ 7. ⑤

3 이하의 자연수 k 에 대하여 $a_k + a_{k+1} = 3$ 이므로

$$a_1 + a_2 = 3, a_2 + a_3 = 3, a_3 + a_4 = 3$$

$$a_1 = 0 \text{ 이면 } a_2 = 3, a_3 = 0, a_4 = 3$$

$$a_1 = 1 \text{ 이면 } a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 2$$

$$a_1 = 2 \text{ 이면 } a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 1$$

$$a_1 = 3 \text{ 이면 } a_2 = 0, a_3 = 3, a_4 = 0$$

$a_1 \geq 4$ 이면 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(i) $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 0, a_4 = 3$ 인 경우

$f(x) = 2$ 인 x 의 개수와 $f(x) = 4$ 인 x 의 개수가 모두 3이므로 구하는 함수 f 의 개수는

$$2, 2, 2, 4, 4, 4$$

를 일렬로 나열한 다음 맨 왼쪽에 있는 수부터 차례로 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ 의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{3!3!} = 20$$

$a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = 3, a_4 = 0$ 인 경우도 같은 방법으로 구하면

함수 f 의 개수는 20

(ii) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 2$ 인 경우

$f(x) = 1$ 인 x 의 개수와 $f(x) = 3$ 인 x 의 개수가 모두 1이고,

$f(x) = 2$ 인 x 의 개수와 $f(x) = 4$ 인 x 의 개수가 모두 2이므로

구하는 함수 f 의 개수는

$$1, 2, 2, 3, 4, 4$$

를 일렬로 나열한 다음 맨 왼쪽에 있는 수부터 차례로 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ 의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{2!2!} = 180$$

$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 1$ 인 경우도 같은 방법으로 구하면

함수 f 의 개수는 180

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$2 \times 20 + 2 \times 180 = 400$$

■ 8. 55

$P(0 \leq X \leq a) = 1$ 이므로 연속확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프로 부터

$$\frac{1}{2} \times a \times c = 1, \text{ 즉 } ac = 2, \dots, \text{ ㉠}$$

$P(0 \leq X \leq b) = a$ 라 하면 연속확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프로부터

$$\frac{1}{2} \times b \times c = a, \text{ 즉 } bc = 2a, \dots, \text{ ㉡}$$

두 점 $(0, 0), (b, c)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{c}{b}x$$

$$\text{이므로 } P\left(0 \leq X \leq \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{b}{2} \times \frac{c}{2} = \frac{1}{8}bc = \frac{1}{4}a$$

$$P(b \leq X \leq a) = 1 - P(0 \leq X \leq b) = 1 - a$$

$$\text{이므로 } 4P\left(0 \leq X \leq \frac{b}{2}\right) = 3P(b \leq X \leq a) \text{에서}$$

$$a = 3 - 3a, 4a = 3$$

$$a = \frac{3}{4}$$

$$a = \frac{3}{4} \text{을 ㉡에 대입하면}$$

$$bc = \frac{3}{2} \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉠에서 } a = \frac{2}{c}, \text{ ㉢에서 } b = \frac{3}{2c} \text{이므로 } \frac{a}{2} < b$$

그러므로 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여

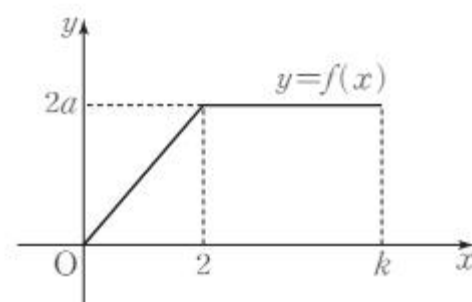
$$\begin{aligned} P\left(\frac{b}{2} \leq X \leq \frac{a}{2}\right) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{c}{2} + \frac{ac}{2b}\right) \times \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{c}{2} + \frac{2}{3}c\right) \times \left(\frac{1}{c} - \frac{3}{4c}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{6}c \times \frac{1}{4}c \\ &= \frac{7}{48} \end{aligned}$$

따라서 $p = 48, q = 7$ 이므로

$$p + q = 48 + 7 = 55$$

■ 9. ⑤

확률밀도함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다



함수 $f(x)$ 가 연속확률변수 X 의 확률밀도함수이므로

$$P(0 \leq X \leq k) = 1 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2a + (k-2) \times 2a = 1$$

$$\text{즉, } 2a(k-1) = 1. \dots\dots \text{㉠}$$

함수 $y = f(6-x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고, 함수 $g(x)$ 가 연속확률변수 Y 의 확률밀도함수이므로

$$P(0 \leq Y \leq 3) = \frac{1}{2}$$

이어야 한다.

$$0 \leq x \leq 3 \text{에서 } g(x) = f(x) \text{이므로}$$

$$P(0 \leq Y \leq 3) = P(0 \leq X \leq 3) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2a + 2a \times 1 = 4a$$

$$\text{즉, } 4a = \frac{1}{2} \text{에서 } a = \frac{1}{8} \text{이므로 ㉠에서}$$

$$\frac{1}{4}(k-1) = 1$$

$$k = 5$$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{8}x & (0\leq x\leq 2) \\ \frac{1}{4} & (2\leq x\leq 5) \end{cases}$

이므로

$$\begin{aligned} P(1\leq X\leq \frac{2}{3}k) &= P(1\leq X\leq \frac{10}{3}) \\ &= P(1\leq X\leq 2)+P(2\leq X\leq \frac{10}{3}) \\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)\times 1+\left(\frac{10}{3}-2\right)\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{25}{48} \end{aligned}$$

■10. 19

주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 모든 수의 합은

$1+2+6+8=17$

주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 모든 수의 합은

$3+4+5+7=19$

두 번의 시행은 다음 세 가지 경우로 나눌 수 있다. 이때 두 번의 시행을 한 후 두 주머니 A, B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합을 각각 S_1, S_2 라 하자.

(i) 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수가 모두 6의 약수인 경우
두 번의 시행에서 주머니 A에 들어 있는 카드 2장을 꺼내어 주머니 B에 넣으므로 $S_1\leq 17-1-2=14, S_2\geq 19+1+2=22$

그러므로 $S_1<S_2$ 이다.

(ii) 한 개의 주사위를 두 번 던져 6의 약수가 한 번, 6의 약수가 아닌 수가 한 번 나온 경우

첫 번째 시행에서 6의 약수가 나오고 두 번째 시행에서 6의 약수가 아닌 수가 나왔을 때, 주머니 A에서 꺼내어 주머니 B에 넣은 카드에 적혀 있는 숫자를 a, 주머니 B에서 꺼내어 주머니 A에 넣은 카드에 적혀 있는 숫자를 b라 하고 $S_1>S_2$ 인 경우를 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)로 나타내면

$(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 7), (2, 4), (2, 5), (2, 7)$

이므로 $S_1>S_2$ 인 경우의 수는 7이다.

마찬가지 방법으로 첫 번째 시행에서 6의 약수가 아닌 수가 나오고

두 번째 시행에서 6의 약수가 나왔을 때, $S_1>S_2$ 인 경우의 수는 7이다.

(iii) 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수가 모두 6의 약수가 아닌 경우
두 번의 시행에서 주머니 B에 들어 있는 카드 2장을 꺼내어 주머니 A에 넣으므로 $S_1\geq 17+3+4=24, S_2\leq 19-3-4=12$

그러므로 $S_1>S_2$ 이다.

한편, 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 이고, 6의 약수가 아닐 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이다.

그러므로 두 번의 시행 후 주머니 A에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합이 주머니 B에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수의 합보다 큰 사건을 S, 두 주머니 A, B에 들어 있는 카드의 개수가 같은 사건을 T라 하면 (i), (ii), (ii)에서

$$P(S)=2\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{4\times 5}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{45}+\frac{1}{9}=\frac{4}{15}$$

$$P(S\cap T)=2\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{4\times 5}\right)=\frac{7}{45}$$

이므로 구하는 확률은

$$P(T|S)=\frac{P(S\cap T)}{P(S)}=\frac{\frac{7}{45}}{\frac{4}{15}}=\frac{7}{12}$$

따라서 $p=12, q=7$ 이므로

$p+q=12+7=19$

■11. 254

조건 (가)에 의하여

$f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq f(5)\leq f(6)$

조건 (나)에 의하여 $f(3)f(4)f(5), f(4)f(5)f(6)$ 의 값이 모두 3의 배수이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $f(4) f(5)$ 의 값이 3의 배수인 경우

① $f(4)=1$ 일 때

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1

$f(4)f(5)$ 의 값이 3의 배수이려면

$f(5)=3$ 일 때 $f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 4

$f(5)=6$ 일 때 $f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$1\times(4+1)=5$

② $f(4)=2$ 일 때

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

$f(4) f(5)$ 의 값이 3의 배수이려면

$f(5)=3$ 일 때 $f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 4

$f(5)=6$ 일 때 $f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$4\times(4+1)=20$

③ $f(4)=3$ 일 때

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

$f(4) f(5)$ 의 값이 3의 배수이므로 $f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4H_2={}_5C_2=10$

그러므로 이 경우의 수는

$10\times 10=100$

④ $f(4)=4$ 일 때

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

$f(4) f(5)$ 의 값이 3의 배수이려면 $f(5)=6$ 이어야 하고,

이때 $f(6)=6$ 이다.

그러므로 이 경우의 수는

$20\times 1=20$

⑤ $f(4)=5$ 일 때

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5H_3={}_7C_3=35$

$f(4) f(5)$ 의 값이 3의 배수이려면 $f(5)=6$ 이어야 하고,

이때 $f(6)=6$ 이다.

그러므로 이 경우의 수는

$35\times 1=35$

⑥ $f(4)=6$ 일 때

$f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

${}_6H_3={}_8C_3=56$

$f(4) f(5)$ 의 값이 3의 배수이므로 $f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1

그러므로 이 경우의 수는

$56\times 1=56$

①~⑥에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$5+20+100+20+35+56=236$

(ii) $f(4) f(5)$ 의 값이 3의 배수가 아닌 경우

조건 (나)를 만족시키기 위해서는 $f(3)$ 의 값과 $f(6)$ 의 값이 모두 3의 배수이어야 한다.

① $f(3)=f(6)=3$ 일 때

$f(4)=f(5)=3$ 이므로 $f(4) f(5)$ 의 값이 3의 배수가 되어 주어진 경우를 만족시키지 않는다.

② $f(3)=3, f(6)=6$ 일 때

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3H_2={}_4C_2=6$

이 각각에 대하여 $f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우는

$f(4)=f(5)=4$ 또는 $f(4)=4, f(5)=5$ 또는 $f(4)=f(5)=5$ 의

3가지이다.

그러므로 이 경우의 수는

$6\times 3=18$

③ $f(3)=f(6)=6$ 일 때

$f(4)=f(5)=6$ 이므로 $f(4)f(5)$ 의 값이 3의 배수가 되어 주어진 경우를 만족시키지 않는다.

①, ②, ③에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 18이다.

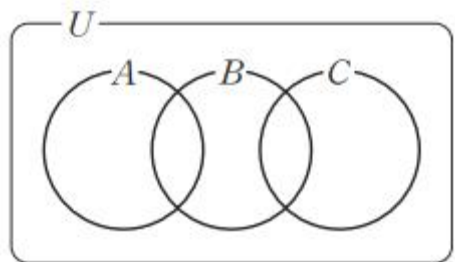
(i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는

$$236 + 18 = 254$$

■12. 344

집합 $A \cup B$ 의 원소를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = 4$$



집합 $A \cup B$ 의 세 원소는 각각 네 집합 $A \cap B^c$, $A \cap B$, $A^c \cap B \cap C^c$, $B \cap C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

집합 $(A \cup B)^c$ 의 원소는 두 집합 $B^c \cap C$, $(A \cup B \cup C)^c$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_1 = 2^1 = 2$$

따라서 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (A, B, C) 의 개수는

$$4 \times 64 \times 2 = 512$$

(i) $A = \emptyset$ 인 경우

집합 $A \cup B$ 의 세 원소는 각각 두 집합 $A^c \cap B \cap C^c$, $B \cap C$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

집합 $(A \cup B)^c$ 의 원소는 두 집합 $B^c \cap C$, $(A \cup B \cup C)^c$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_1 = 2^1 = 2$$

따라서 $A = \emptyset$ 이고, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (A, B, C) 의 개수는

$$4 \times 8 \times 2 = 64$$

(ii) $C = \emptyset$ 인 경우

집합 $A \cup B$ 의 세 원소는 각각 세 집합 $A \cap B^c$, $A \cap B$, $A^c \cap B \cap C^c$ 중 하나의 원소이므로 그 집합을 정하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

집합 $(A \cup B)^c$ 의 원소는 집합 $(A \cup B \cup C)^c$ 의 원소이므로 $C = \emptyset$ 이고, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (A, B, C) 의 개수는

$$4 \times 27 = 108$$

(iii) $A = C = \emptyset$ 인 경우

집합 $A \cup B$ 의 원소는 모두 집합 $A^c \cap B \cap C^c$ 의 원소이고, 집합 $(A \cup B)^c$ 의 원소는 집합 $(A \cup B \cup C)^c$ 의 원소이므로 $A = C = \emptyset$ 이고, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (A, B, C) 의 개수는 4이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $A = \emptyset$ 또는 $C = \emptyset$ 이고, 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (A, B, C) 의 개수는

$$64 + 108 - 4 = 168$$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B, C) 의 개수는

$$512 - 168 = 344$$

■13. ②

서로 이웃한 카드에 적힌 두 수의 최대공약수가 5의 약수가 되려면 2, 4, 6이 적힌 카드는 서로 이웃하면 안 되고, 3, 6이 적힌 카드도 서로 이웃하면 안 된다. 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열한 후 2, 4, 6이 적힌 카드를 나열할 때, 1, 3, 5가 적힌 카드를 나열하는 경우는 다음과 같다.

(i) 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열할 때, 3이 적힌 카드가 서로 이웃하는 경우 3이 적힌 2장의 카드를 한 묶음으로 1, 3, 5가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

나열된 카드의 사이사이와 양 끝 중 3이 적힌 카드와 이웃하는 3개의 자리를 제외한 4개의 자리 중 2개의 자리에 6이 적힌 카드를 나열하고, 3이 적힌 두 카드

사이엔 2, 4가 적힌 카드 중 하나를 나열하고 남은 4개의 자리 중 3개의 자리에 남은 2, 4가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times 2 \times {}_4C_3 \times \frac{3!}{2!} = 144$$

따라서 (i)의 경우의 수는

$$30 \times 144 = 4320$$

(ii) 1, 3, 5가 적힌 카드를 먼저 나열할 때, 3이 적힌 카드가 서로 이웃하지 않는 경우

1, 5가 적힌 카드를 나열하고, 나열한 카드 사이사이 중 2개의 자리에 3이 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times {}_5C_2 = 60$$

나열된 카드의 사이사이와 양 끝 중 3이 적힌 카드와 이웃하는 4개의 자리를 제외한 3개의 자리 중 2개의 자리에 6이 적힌 카드를 나열하고, 6이 적힌 카드와 이웃하는 4개의 자리를 제외한 5개의 자리 중 4개의 자리에 2, 4가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_5C_4 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 90$$

따라서 (ii)의 경우의 수는

$$60 \times 90 = 5400$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$4320 + 5400 = 9720$$

■14. ④

$${}_4C_0 - {}_4C_1 \times 5 + {}_4C_2 \times 5^2 - {}_4C_3 \times 5^3 + {}_4C_4 \times 5^4$$

$$= \{1 + (-5)\}^4$$

$$= 4^4$$

$$= 256$$

■15. ①

조건 (가)에 의하여 5 이하의 자연수 x 에 대하여

$$f(x) + 2 \leq f(x+1) \text{ 임을 알 수 있다.}$$

$$f(2) = f(1) + 2 + a,$$

$$f(3) = f(2) + 2 + b = f(1) + 4 + a + b,$$

$$f(4) = f(3) + 2 + c = f(1) + 6 + a + b + c,$$

$$f(5) = f(4) + 2 + d = f(1) + 8 + a + b + c + d,$$

$$f(6) = f(5) + 2 + e = f(1) + 10 + a + b + c + d + e,$$

(a, b, c, d, e 는 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다.

$$f(6) = f(3) + 10 \text{에서}$$

$$f(1) + 10 + a + b + c + d + e = \{f(1) + 4 + a + b\} + 10$$

$$c + d + e = 4 \text{ (} c, d, e \text{는 음이 아닌 정수)}$$

이므로 c, d, e 를 정하는 경우의 수는 ${}_3H_4$ 이다.

$$f(1) \geq -9 \text{이므로 } p = f(1) + 9 \text{라 하면 } p \text{는 음이 아닌 정수이다.}$$

$$f(6) = (p+1) + a + b + 4 \leq 9 \text{에서}$$

$$p + a + b \leq 4$$

$$p + a + b + q = 4 \text{ (} q \text{는 음이 아닌 정수)}$$

이므로 p, a, b, q 를 정하는 경우의 수는 ${}_4H_4$ 이다.

따라서 a, b, c, d, e, p, q 가 정해지면 함수값이 모두 정해지므로 구하는 함수의 개수는

$${}_3H_4 \times {}_4H_4 = {}_6C_4 \times {}_7C_4$$

$$= {}_6C_2 \times {}_7C_3$$

$$= \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 15 \times 35$$

$$= 525$$

■16. 688

파란색 볼펜을 넣는 필통을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

파란색 볼펜을 넣지 않는 3개의 필통에 검은색 볼펜을 1개씩 넣고, 남은 검은색 볼펜 2개, 빨간색 볼펜 3개를 나누어 넣는 경우는 다음과 같다.

검은색 볼펜 2개를 4개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는

${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$
빨간색 볼펜 3개를 4개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는
 ${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$
이때 검은색 볼펜 2개, 빨간색 볼펜 3개 중 4개 또는 5개의 볼펜을 1개의 필통에 넣으면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
4개의 볼펜을 1개의 필통에 넣는 경우는 함께 넣을 볼펜 4개를 택하는 경우의 수는 2, 이 4개의 볼펜과 남은 1개의 볼펜을 넣을 필통을 택하는 경우의 수는
 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$ 이므로 4개의 볼펜을 1개의 필통에 넣는 경우의 수는
 $2 \times 12 = 24$
5개의 볼펜을 1개의 필통에 넣는 경우는 볼펜 5개를 넣을 필통을 택하면 되므로
경우의 수는
 ${}_4C_1 = 4$
즉, 검은색 볼펜 2개, 빨간색 볼펜 3개를 4개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는
 $10 \times 20 - (24 + 4) = 172$
따라서 구하는 경우의 수는
 $4 \times 172 = 688$

■17. 43
집합 X 에서 X 로의 모든 함수의 개수는 ${}_4\Pi_4 = 4^4$ 이다.
(i) $f(3) = 1$ 인 경우
 $f(1)$ 의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 $f(1)$ 을 정하는 경우의 수는 4
 $x > 1$ 일 때 $f(x) \leq 3$ 이므로 $f(2), f(4)$ 를 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2$
이때의 경우의 수는
 $4 \times {}_3\Pi_2 = 4 \times 3^2 = 36$
(ii) $f(3) = 2$ 인 경우
 $x < 2$ 일 때 $f(x) \geq 3$ 이므로 $f(1)$ 를 정하는 경우의 수는 2
 $f(2)$ 의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 $f(2)$ 를 정하는 경우의 수는 4
 $x > 2$ 일 때 $f(x) \leq 3$ 이므로 $f(4)$ 를 정하는 경우의 수는 3
이때의 경우의 수는
 $2 \times 4 \times 3 = 24$
(iii) $f(3) = 3$ 인 경우
 $x < 3$ 일 때 $f(x) \geq 3$ 이므로 $f(1), f(2)$ 를 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2$
 $x > 3$ 일 때 $f(x) \leq 3$ 이므로 $f(4)$ 를 정하는 경우의 수는 3
이때의 경우의 수는
 ${}_2\Pi_2 \times 3 = 2^2 \times 3 = 12$
(iv) $f(3) = 4$ 인 경우
 $x < 3$ 일 때 $f(x) \geq 3$ 이므로 $f(1), f(2)$ 를 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2$
 $f(4)$ 의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 $f(4)$ 를 정하는 경우의 수는 4
이때의 경우의 수는
 ${}_2\Pi_2 \times 4 = 2^2 \times 4 = 16$
(i)~(iv)에서 구하는 확률은
 $\frac{36 + 24 + 12 + 16}{4^4} = \frac{11}{32}$
따라서 $p = 32, q = 11$ 이므로 $p + q = 43$

■18. ②
동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.
3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A , 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 사건을 B 라 하자.
3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우는
HHHT $\rightarrow$ HHTT $\rightarrow$ HTTT $\rightarrow$ HHHH
뿐이다.
1번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 2번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 3번째
시행에서 T, T, T를 뒤집으면 되므로
 $P(A) = \frac{{}_3C_1 \times {}_1C_1}{{}_4C_3} \times \frac{{}_2C_2 \times {}_2C_1}{{}_4C_3} \times \frac{{}_3C_3}{{}_4C_3}$
 $= \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$
3번째 시행 후에 처음으로 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이는 경우는
HHHT $\rightarrow$ HHTT $\rightarrow$ HHHT $\rightarrow$ TTTT
뿐이다.
1번째 시행에서 H, H, T를 뒤집고, 2번째 시행에서 H, T, T를 뒤집고, 3번째

시행에서 H, H, H를 뒤집으면 되므로
 $P(B) = \frac{{}_3C_2 \times {}_1C_1}{{}_4C_3} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_2}{{}_4C_3} \times \frac{{}_3C_3}{{}_4C_3}$
 $= \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$
두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{3}{16}$

■19. ④
함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소 중 홀수의 개수가 3인 사건을 A , 함수 f 의 치역의
원소의 개수가 3인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.
집합 X 에서 집합 X 로의 함수의 개수는
 ${}_5\Pi_5 = 5^5$
이고, 사건 A 는 다음의 세 가지가 있다.
(i) 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 5인 경우
함수 f 는 일대일대응이므로 함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소 중 홀수의 개수는 3
이때의 함수 f 의 개수는
 $5! = 120$
(ii) 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 4인 경우
함수 f 의 치역은 1, 3, 5를 포함해야 하므로 나머지 치역의 원소 1개를 선택하는
경우의 수는
 ${}_2C_1 = 2$
• 함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수가 4인 경우
함수 f 의 치역에 포함되지 않는 집합 X 의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는
 ${}_4C_1 = 4$
함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수가 4이므로
함수 f 의 치역의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는 $4! = 24$
• 함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수가 3인 경우
함수 $f \circ f$ 의 치역이 $\{1, 3, 5\}$ 이므로 함수 f 의 치역에 포함되지 않는 집합
 X 의 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는 1
함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소의 개수가 3이므로
함수 f 의 치역의 원소 2개를 선택하는 경우의 수는
 ${}_4C_2 = 6$
선택된 원소 2개를 1, 3, 5 중 하나에 대응시키는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$
함수 f 의 치역의 나머지 원소 2개의 함숫값을 정하는 경우의 수는 $2! = 2$
이때의 함수 f 의 개수는
 $2 \times (4 \times 24 + 1 \times 6 \times 3 \times 2) = 264$
(iii) 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 3인 경우
함수 f 의 치역이 $\{1, 3, 5\}$ 이어야 하므로 $f(1), f(3), f(5)$ 를 1, 3, 5에
대응시키는 경우의 수는
 $3! = 6$
이고 집합 X 의 나머지 두 원소를 1, 3, 5에 대응시키는 경우의 수는
 ${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$
이때의 함수 f 의 개수는
 $6 \times 9 = 54$
(i), (ii), (iii)에서
 $P(A) = \frac{120 + 264 + 54}{5^5} = \frac{438}{5^5}$
사건 $A \cap B$ 는 함수 $f \circ f$ 의 치역의 원소 중 홀수의 개수가 3이고 함수 f 의
치역의 원소의 개수가 3인 사건이므로
 $P(A \cap B) = \frac{54}{5^5}$
따라서 구하는 확률은
 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
 $= \frac{\frac{54}{5^5}}{\frac{438}{5^5}} = \frac{9}{73}$

■20. 104

n 명의 학생들 중 한 명의 학생을 택할 때, 이 학생의 수험번호가 20 이하인 사건을 A 라 하고 홀수인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{5}{n}, P(B) = \frac{12}{n}$$

사건 $A \cap B$ 는 수험번호가 20 이하의 홀수인 사건이므로

$$P(A \cap B) = \frac{k}{n} \quad (k \text{는 자연수}) \text{라 놓을 수 있다.}$$

20 이하의 홀수와 짝수의 개수가 각각 10이므로 수험번호가 20 이하의 홀수인 학생은 5명 이상 10명 이하이다.

$$5 \leq k \leq 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$\frac{k}{n} = \frac{15}{n} \times \frac{12}{n}$$

$$\text{즉, } nk = 180$$

①에서

$$n = 36 \text{ 또는 } n = 30 \text{ 또는 } n = 20 \text{ 또는 } n = 18$$

따라서 구하는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$36 + 30 + 20 + 18 = 104$$

■ 21. ③

$P(X=0) = a, P(X=1) = b$ 라 하자.

$$P(X=2) = \frac{1}{2}P(X=1) = \frac{1}{2}b$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2}P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}b$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	a	b	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{4}b$	1

확률변수 X 가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$a + b + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b = 1$$

$$a + \frac{7}{4}b = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$E(X) = \frac{11}{16} \text{에서}$$

$$E(X) = 0 \times a + 1 \times b + 2 \times \frac{1}{2}b + 3 \times \frac{1}{4}b = \frac{11}{16}$$

$$\frac{11}{4}b = \frac{11}{16}, b = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{1}{4} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$a = 1 - \frac{7}{4}b = 1 - \frac{7}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$$

따라서

$$\begin{aligned} P(X=0) + P(X=2) &= a + \frac{1}{2}b \\ &= \frac{9}{16} + \frac{1}{8} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

■ 22. ②

확률변수 X 가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$\frac{1}{6} + b + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = 1, b = \frac{1}{4}$$

$$E(X) = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= a \times \frac{1}{6} + 2a \times \frac{1}{4} + 3a \times \frac{1}{2} + 4a \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{5}{2}a = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } Y = aX + b = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

■ 23. ③

확률변수 X 가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이고

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} = 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} P(X=k) &= \sum_{k=1}^{2n} c \{(-1)^{k+1} + k\} \\ &= c \left\{ \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} + \sum_{k=1}^{2n} k \right\} \\ &= c \left\{ 0 + \frac{2n(2n+1)}{2} \right\} \end{aligned}$$

에서

$$c = \frac{1}{n(2n+1)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} k(-1)^{k+1} &= 1 + (-2) + 3 + (-4) + \cdots + (2n-1) + (-2n) \\ &= -n \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{48}{5} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{2n} \{k \times P(X=k)\} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} kc \{(-1)^{k+1} + k\} \\ &= c \left\{ \sum_{k=1}^{2n} k(-1)^{k+1} + \sum_{k=1}^{2n} k^2 \right\} \\ &= c \left\{ -n + \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} \right\} \\ &= \frac{1}{n(2n+1)} \times \left\{ -n + \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} \right\} \\ &= -\frac{1}{2n+1} + \frac{4n+1}{3} \\ &= \frac{2(4n^2+3n-1)}{3(2n+1)} = \frac{48}{5} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{4n^2+3n-1}{2n+1} = \frac{72}{5}$$

$$20n^2 + 15n - 5 = 144n + 72$$

$$20n^2 - 129n - 77 = 0$$

$$(20n+11)(n-7) = 0$$

n 은 자연수 $n=7$

■ 24. ④

확률변수 X 는 정규분포 $N\left(t^2, \left(\frac{1}{t}\right)^2\right)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-t^2}{\frac{1}{t}}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$f(t) = P(X \leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3-t^2}{\frac{1}{t}}\right)$$

$= P(Z \leq 3t - t^3)$
 $g(t) = 3t - t^3$ 이라 하자.
함수 $f(t)$ 가 최댓값을 갖기 위해서는 $g(t) = 3t - t^3 \ (t > 0)$ 이 최댓값을 가져야 한다.
 $g'(t) = 3 - 3t^2 = 3(1+t)(1-t)$
 $g'(t) = 0$ 에서 $t = -1$ 또는 $t = 1$
 $t > 0$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	1	...
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

$t = 1$ 에서 함수 $g(t)$ 는 극대이면서 최대이고 최댓값은
 $g(1) = 3 \times 1 - 1^3 = 2$ 이다.
따라서 함수 $f(t)$ 는 $t = 1$ 에서 최대이고 최댓값은
 $f(1) = P(X \leq 3)$
 $= P(Z \leq 2)$
 $= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$
 $= 0.5 + 0.4772$
 $= 0.9772$

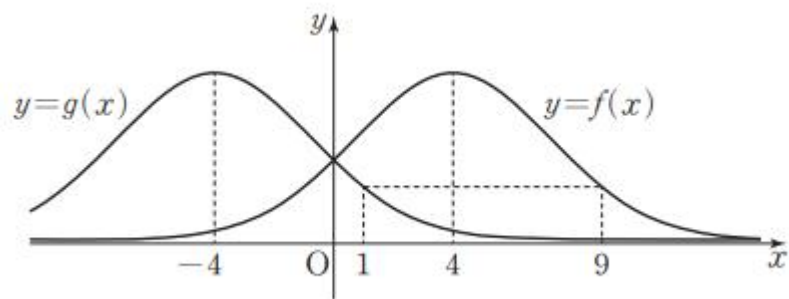
■ 25. ②

이 모집단에서 크기가 3인 표본을 (X_1, X_2, X_3) 이라 하자.
(i) $k = 1$ 인 경우
 $\overline{X} = 1$ 인 경우 $X_1 = X_2 = X_3 = 1$ 이므로
 $P(\overline{X} = 1) = a^3$
 $P(\overline{X} = 1) = P(X = 1)$ 에서
 $a^3 = a$
이때 $0 < a < \frac{6}{7}$ 이므로 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.
(ii) $k = 2$ 인 경우
 $\overline{X} = 2$ 인 경우 (X_1, X_2, X_3) 은 $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$
 $P(\overline{X} = 2) = 6 \times a \times \frac{1}{7} \times b + \left(\frac{1}{7}\right)^3$
 $= \frac{6}{7}ab + \frac{1}{343}$
 $P(\overline{X} = 2) = P(X = 2)$ 에서
 $\frac{6}{7}ab + \frac{1}{343} = \frac{1}{7}$
 $ab = \frac{8}{49}$
이때 $a + b = \frac{6}{7}$ 이고 $a > b > 0$ 이므로
 $a = \frac{4}{7}, b = \frac{2}{7}$
(iii) $k = 3$ 인 경우
 $\overline{X} = 3$ 인 경우 $X_1 = X_2 = X_3 = 3$ 이므로
 $P(\overline{X} = 3) = b^3$
 $P(\overline{X} = 3) = P(X = 3)$ 에서
 $b^3 = b$
이때 $0 < b < \frac{6}{7}$ 이므로 만족시키는 b 의 값은 존재하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에 의하여
 $a = \frac{4}{7}, b = \frac{2}{7}$
따라서 $\frac{a}{b} = 2$

■ 26. 287
주어진 시행을 2번 반복하여 기록한 수를 차례로 X_1, X_2 라 하면
 $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$
이므로 $\frac{X_1 + X_2}{2} = 4$ 에서
 $X_1 + X_2 = 8$
한 번의 시행에서 기록할 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 6이므로 $X_1 = 2, X_2 = 6$
또는 $X_1 = 4, X_2 = 4$ 또는 $X_1 = 6, X_2 = 2$ 각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 A, 각 면에 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 B라 하자.
(i) 2를 기록할 확률
A에서 2가 나오고 B에서 3, 4, 5가 나오거나 A에서 3, 4가 나오고 B에서 2가 나오면 되므로
 $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$
(ii) 4를 기록할 확률
A에서 4가 나오고 B에서 5가 나오면 되므로
 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
(iii) 6을 기록할 확률
A, B에서 같은 수가 나오면 되므로
 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{16}$
(i), (ii), (iii)에서
 $X_1 = 2, X_2 = 6$ 일 확률은
 $\frac{5}{16} \times \frac{3}{16} = \frac{15}{256}$
 $X_1 = 4, X_2 = 4$ 일 확률은
 $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$
 $X_1 = 6, X_2 = 2$ 일 확률은
 $\frac{3}{16} \times \frac{5}{16} = \frac{15}{256}$
따라서
 $P(\overline{X} = 4) = \frac{15}{256} + \frac{1}{256} + \frac{15}{256} = \frac{31}{256}$
이므로 $p + q = 256 + 31 = 287$

■ 27. 144

조건 (가)에서 $g(1) = f(-1)$ 이고 조건 (나)에서
 $g(1) = f(9)$ 이므로 $f(-1) = f(9)$
확률변수 X 가 정규분포를 따르므로 곡선 $y = f(x)$ 는 직선 $x = m_1$ 에 대하여 대칭이다.
즉, $m_1 = \frac{-1+9}{2} = 4$
조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = f(-x)$ 이므로 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 는 y 축에 대하여 대칭이다.
즉, $m_2 = -4, \sigma_1 = \sigma_2$



확률변수 $\overline{X}$ 는 정규분포 $N\left(4, \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르고,
 $Z = \frac{\overline{X}-4}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

확률변수 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(-4, \left(\frac{\sigma_1}{4}\right)^2\right)$ 을 따르고,

$Z = \frac{\bar{Y} + 4}{\frac{\sigma_1}{4}}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3-4}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right),$$

$$P(\bar{Y} \geq -1) = P\left(Z \geq \frac{-1+4}{\frac{\sigma_1}{4}}\right) = P\left(Z \geq \frac{12}{\sigma_1}\right)$$

에서 $P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\right) = P\left(Z \geq \frac{12}{\sigma_1}\right)$ 이므로 $\frac{\sqrt{n}}{\sigma_1} = \frac{12}{\sigma_1}$

따라서 $n = 144$