실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 연속이고, $g(x)$는 삼차함수이다.

“그런데, 가장 파악하기 쉬운 삼차함수 $g(x)$가 **굳이 $f(x)$에 기대어 표현되고 있네**.”

하지만 우리에게 익숙한 함수는 $g(x)$이므로, 위 식을 변형하여 $f(x)$를 $g(x)$**에 기대어 표현**해보자.

$$\int_0^x f(t)dt=\begin{cases} -g(x) & (x<0) \\ g(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

좌변에 $x=0$을 대입해보면, $g(0)=0$이다.

ㄱ. $f(0)=0$

순수하게 $f(x)$에 대한 식을 도출하기 위해 양변을 미분해보자.

$$f(x)=\begin{cases} -g'(x) & (x<0) \\ g'(x) & (x \geq 0) \end{cases} \quad \cdots ㉠$$

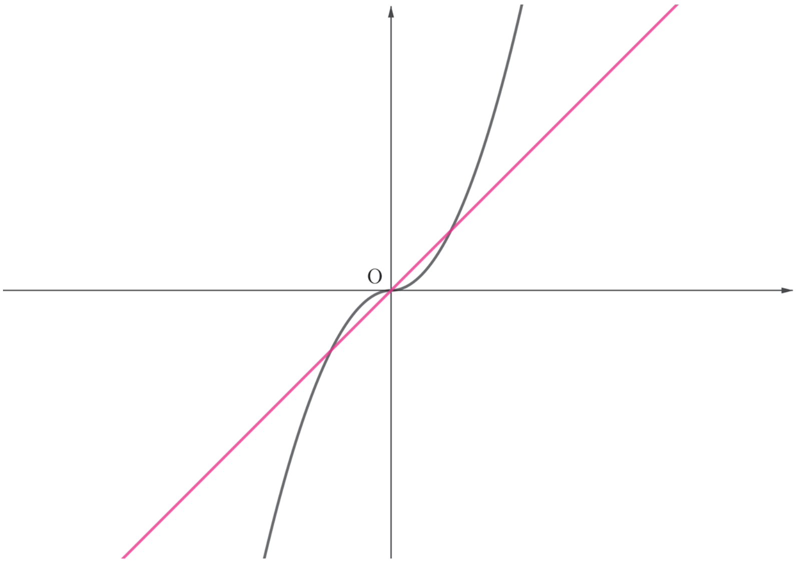
“발문에 따르면 $f(x)$는 **연속함수**이므로, $g'(0)=0$, $f(0)=0$이 되어야겠네.”

$\therefore$ $f(0)=g'(0)=0$ ... (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

찰하자.

i) $a=0$일 때, 교점의 개수는 3이다.



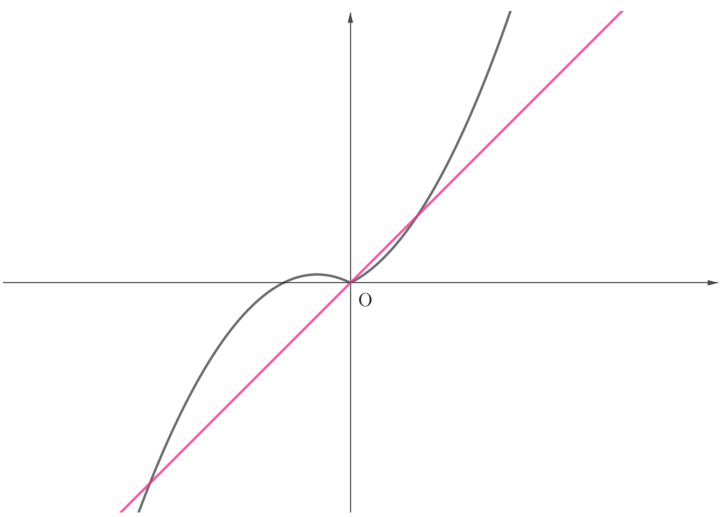
ii) $a>0$일 때, 개형을 그려보자.

"$f(x)$를 그려보면 $x=0$에서 **<u>우미분계수</u>**에 따라 교점의 개수가 달라질 것 같은데.."

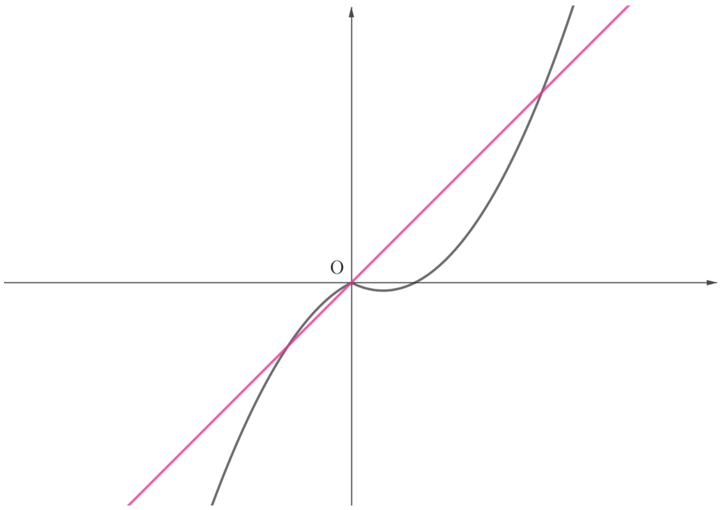
$f'(0+)=a$이고, ⓒ에 대입하면 $-1<f'(0+)<1$이다.

"아, $2<f(1)<4$가 결국에는 $x=0$ 부근의 <u>$f(x)$**의 기울기 조건**</u>을 포장해놓은 것이구나..!"

따라서, 이때 $f(x)$의 기울기가 $y=x$보다 낮고, 개형을 그려보면 교점의 개수는 3이다.



$iii)$ $a>0$일 때, 개형을 그려보자.



$ii)$와 비슷한 논리로 이번엔 **좌미분계수**에 따라 교점의 개수가 달라진다.
$f'(0-)=-a$이고, ⓔ에 대입하면 $-1<f'(0-)<1$이므로,

이때 $f(x)$가 $y=x$보다 덜 가파르다. 따라서 교점의 개수는 3이다.

따라서 ㄷ은 참이다. ⋯ (참)

답: ④

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 주어진 식을 **$f(x)$에 대한 식으로 변형**한 뒤, 이를 통해 $f(x)$의 개형을 파악할 수 있는가?

2. $2<f(1)<4$를 **수식적으로 풀어** 이를 통해 $x=0$에서 $y=f(x)$의 **좌미분계수와 우미분계수의 범위**를 파악하고, 이를 통해 각각의 개형에서 $y=x$와의 **교점의 개수**를 파악할 수 있는가?

| 무엇으로 학생들을 변별했는가?

1. (나)에서 $g(x)$와 $G(x)$를 미지수로 두고, 항등식을 이용하여 **계수를 비교**할 수 있는가?

| NOTES

- (나)에서 $g(x)$가 이차식일 때에도, 좌변이 사차식이 되더라도
  "**사차항들끼리 계산하여 소거**되면 **삼차식이 되지 않을까**?"라는 생각이 들 수도 있다.

  하지만, $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이고, 그 적분식인 $F(x)$의 최고차항의 계수도 양수이기 때문에
  그러한 경우는 절대 성립할 수 없다.

  또한, $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수라고 하더라도 $G(x)$의 최고차항의 계수도 음수가 되므로
  $f(x)G(x)+g(x)F(x)$의 최고차항의 계수는 음수가 될 뿐, 절대로 소거가 되어 사차식이 삼차식이 될 수는 없다.

- 미적분 선택자라면, (나)를 다음과 같이 접근할 수도 있다.
  (문제풀이에 걸리는 시간은 풀이의 방법과 큰 차이 없다.)

  "**곱함수의 미분꼴**과 비슷하게 생겼네..? 한번 양변을 **부정적분해보자**."

  $F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_3 \ \cdots$ ㉡

  "$F(x)=2x^2-x+C_1$이고, $g(x)$는 다항함수이므로 ㉡과 비교해보면, **$G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수네**."

  "두 함수 $F(x)$, $G(x)$을 구해야하니, $G(x)=x^2+ax+C_2$라고 하고 **$F(x)G(x)$에 대한 식을 세워**,
  ㉡과 **계수를 비교**해보자."

  $F(x)G(x)=(2x^2-x+C_1)(x^2+ax+C_2)=2x^4+(2a-1)x^3+(C_1+2C_2-a)x^2+(aC_1-C_2)x+C_1C_2$
  $F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_3$

  이후 두 식의 계수를 비교하면 답이 나온다.