1 모든 항이 정수이고 $a_6=-3$인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 $m\,(m\geq 2)$에 대하여 a_m의 m제곱근 중 양수인 것의 개수를 $f(m)$, 음수인 것의 개수를 $g(m)$이라 하자.

$$\sum_{m=2}^{10} f(m)-\sum_{m=2}^{10} g(m)=-2$$

가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

1)

2 자연수 k에 대하여 x에 대한 방정식

$$x^{2n}-4x^n-8=n-k$$

의 실근의 개수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} f(n)=13$일 때, $k+f(10)$의 값을 구하시오. [4점]

2)

3 1보다 큰 두 상수 a, b $(a<b)$에 대하여 두 곡선

$$y=a^x, \qquad y=-a^x+b$$

가 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=a^x$와 곡선 $y=-a^x+b$의 점근선이 만나는 점을 B라 할 때, 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 놓여 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$일 때, $a^3 \times b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

3)

4 곡선 $y=2^x$ 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{17}$인 두 점 A, B가 있다. 다음 조건을 만족시키는 두 점 C, D가 직선 $y=4x+k$ 위에 있도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? (단, 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 크다.) [4점]

(가) 두 점 A, C의 x좌표는 같다. (나) 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형은 마름모이다.

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

4)

<정답과 해설>

1) 정답 : ⑤

<해설>

a_m의 m제곱근을 X라 하면 X의 값은 다음 표와 같다.

	m이 홀수	m이 짝수
$a_m > 0$	$X = \sqrt[m]{a_m}$	$X = \sqrt[m]{a_m}$ 또는 $-\sqrt[m]{a_m}$
$a_m = 0$	$X = 0$	$X = 0$
$a_m < 0$	$X = \sqrt[m]{a_m}$	X의 값은 존재하지 않는다.

m이 홀수인 경우,

$a_m > 0$이면 $f(m) = 1$, $g(m) = 0$

$a_m = 0$이면 $f(m) = g(m) = 0$

$a_m < 0$이면 $f(m) = 0$, $g(m) = 1$

m이 짝수인 경우,

$a_m > 0$이면 $f(m) = 1$, $g(m) = 1$

$a_m \le 0$이면 $f(m) = g(m) = 0$

m이 짝수이면 $f(m) - g(m) = 0$이므로

$\sum_{m=2}^{10} f(m) - \sum_{m=2}^{10} g(m) = -2$에서

$$\sum_{m=2}^{10} f(m) - \sum_{m=2}^{10} g(m) = \sum_{m=2}^{10} \{f(m) - g(m)\}$$
$$= \sum_{m=1}^{4} \{f(2m+1) - g(2m+1)\} = -2$$

$\{f(3)-g(3)\} + \{f(5)-g(5)\} + \{f(7)-g(7)\} + \{f(9)-g(9)\} = -2$

$\cdots$ ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

(i) $d > 0$인 경우

$a_3 < 0$, $a_5 < 0$이므로 $f(3) - g(3) = f(5) - g(5) = -1$

㉠에 대입하면 $\{f(7)-g(7)\} + \{f(9)-g(9)\} = 0$이므로

$a_7 < 0$, $a_9 > 0$

$a_6 = -3$이므로 $a_7 = -3 + d$, $a_9 = -3 + 3d$

$-3 + d < 0$, $-3 + 3d > 0$

따라서 $1 < d < 3$, $d = 2$ ($\because d$는 정수)

(ii) $d < 0$인 경우

$a_7 < 0$, $a_9 < 0$이므로 $f(7) - g(7) = f(9) - g(9) = -1$

㉠에 대입하면 $\{f(3)-g(3)\} + \{f(5)-g(5)\} = 0$이므로

$a_3 > 0$, $a_5 < 0$

$a_6 = -3$이므로 $a_3 = -3 - 3d$, $a_5 = -3 - d$

$-3 - 3d > 0$, $-3 - d < 0$

따라서 $-3 < d < -1$, $d = -2$ ($\because d$는 정수)

$a_1 = a_6 - 5d = -3 - 5d$이므로 (i), (ii)에 의해

모든 a_1의 값은 $-3 - 5 \times 2 = -13$, $-3 - 5 \times (-2) = 7$

$-13 + 7 = -6$

2) 정답 : 21

<해설>

$x^n = t$라 하자.

방정식 $x^{2n} - 4x^n - 8 = n - k$

에 t를 대입하여 완전제곱식으로 정리하면

$(t-2)^2 = n + 12 - k$, $t = 2 \pm \sqrt{n + 12 - k}$

$k \le 12$이면 방정식을 만족시키는 실수 t의 개수는 항상 2이다.

이때 모든 자연수 n에 대하여 $f(n) \ge 2$이므로 $\sum_{n=1}^{10} f(n) > 13$

조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $k > 12$

(i) $n < k - 12$인 경우

$(t-2)^2 = n + 12 - k$를 만족시키는 실수 t가 존재하지 않으므로

$x^n = t$를 만족시키는 x도 존재하지 않는다. $f(n) = 0$

(ii) $n = k - 12$인 경우

$t = 2$이므로 $x^n = 2$

$n = k - 12$를 대입하면 $x^{k-12} = 2$

k가 짝수이면 $f(k-12) = 2$

k가 홀수이면 $f(k-12) = 1$

(iii) $n > k - 12$인 경우

$(t-2)^2 = n + 12 - k$를 만족시키는 실수 t를 t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$라 하면

$t_1 = 2 - \sqrt{n + 12 - k}$, $t_2 = 2 + \sqrt{n + 12 - k}$

$f(n)$은 $x^n = t_1$, $x^n = t_2$을 만족시키는 모든 실수 x의 개수이다.

n이 홀수이면 $f(n) = 2$

n이 짝수이면

$t_1 < 0$ $(n > k - 8)$일 때 $f(n) = 2$

$t_1 = 0$ $(n = k - 8)$일 때 $f(n) = 3$

$t_1 > 0$ $(n < k - 8)$일 때 $f(n) = 4$

k가 짝수이면

$f(k-11) = 2$, $f(k-10) = 4$, $f(k-9) = 2$, $f(k-8) = 3$

k가 홀수이면

$f(k-11) = 4$, $f(k-10) = 2$, $f(k-9) = 4$, $f(k-8) = 2$

$n > k - 8$인 모든 자연수 n에 대하여 항상 $f(n) = 2$

(i), (ii), (iii)에 의해

k가 짝수이면 $\sum_{n=1}^{k-8} f(n) = 13$, $f(n) > 0$이므로 $k - 8 = 10$, $k = 18$

k가 홀수이면 $\sum_{n=1}^{k-8} f(n) = 13$, $f(n) > 0$이므로 $k - 8 = 10$, $k = 18$

k가 홀수인 경우 $k = 18$은 모순이다.

따라서 $f(10) = 3$, $k = 18$

$$\sum_{n=1}^{10} f(n) = 13$$

3) 정답 : 8

<해설>

점 A의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

$a^{x_1} = -a^{x_1} + b$, $x_1 = \log_a \frac{b}{2}$

$y_1 = a^{x_1} = \frac{b}{2}$

점 B의 좌표를 (x_2, y_2)라 하면

$y_2 = b$,

$y_2 = a^{x_2}$, $x_2 = \log_a b$

세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로

$\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$, $x_2 = 2x_1$

$\Rightarrow \log_a b = 2\log_a \dfrac{b}{2}$, $b = 4\ (\because b > 1)$

두 점 A, B를 이은 선분의 길이가 $\sqrt{13}$ 이므로

$13 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, $(x_1 - x_2)^2 = 9$

따라서

$x_1 = \log_a \dfrac{b}{2} = 3$, $a^3 = 2$

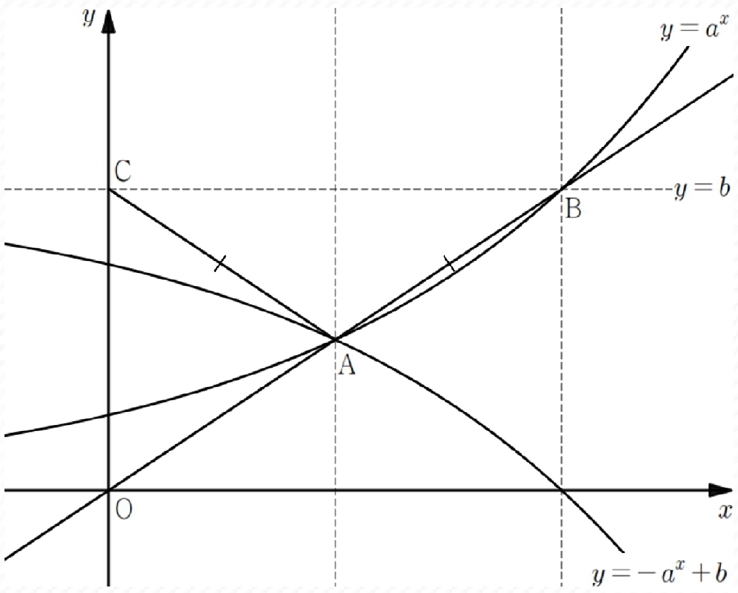
$a^3 \times b = 2 \times 4 = 8$

<참고>

곡선 $y = -a^x + b$의 점근선과 y축이 만나는 점을 C라 하자.

두 곡선 $y = a^x$, $y = -a^x + b$는 $y = \dfrac{b}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{AC}}$



4) 정답 : ②

<해설>

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형이 마름모이므로 두 점 A, B를 지나는 직선은 두 점 C, D를 지나는 직선 $y = 4x + k$와 평행하다.

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가 4이므로

두 점 A, B의 x좌표 차를 p라 하면 y좌표 차는 $4p$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{17}$ 이므로 $p^2 + (4p)^2 = (\sqrt{17})^2$, $p = 1$

점 A의 좌표를 $(a,\ 2^a)$라 하면 점 B의 좌표는 $(a+1,\ 2^{a+1})$

두 점 A, B의 y좌표 차가 4이므로

$2^{a+1} - 2^a = 4$, $a = 2$

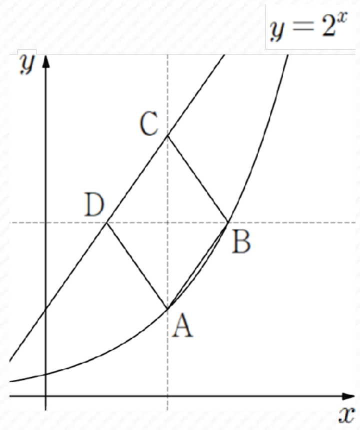
따라서 두 점 A, B는 직선 $y = 4(x-2) + 4 = 4x - 4$를 지난다.

직선 $y = 4x + k$ 위의 두 점 C, D에 대하여

점 C의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같고

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형이 마름모가 되도록 하는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 점 B, D의 y좌표가 같은 경우



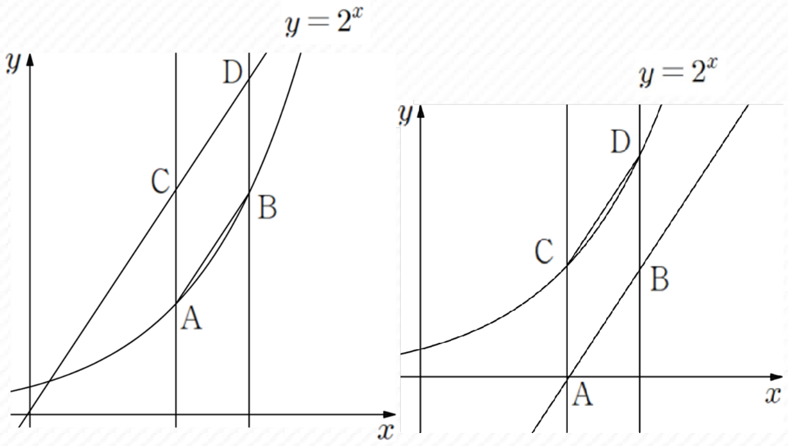
점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표보다 8만큼 크다.

점 A는 직선 $y = 4x - 4$ 위의 점이므로

점 C는 직선 $y = 4x - 4 + 8 = 4x + 4$ 위의 점이다.

$k = 4$

(ii) $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}}$인 경우



두 점 A, C의 y좌표 차가 $\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{17}$ 이므로

점 C의 y좌표가 점 A의 y좌표보다 크다면

점 C는 직선 $y = 4x - 4 + \sqrt{17}$ 위의 점이고

점 C의 y좌표가 점 A의 y좌표보다 작다면

점 C는 직선 $y = 4x - 4 - \sqrt{17}$ 위의 점이다.

$k = -4 + \sqrt{17}$ 또는 $k = -4 - \sqrt{17}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$4 + (-4 + \sqrt{17}) + (-4 - \sqrt{17}) = -4$