

▶ Break Point ◀ 맞보기 4문항

1 모든 항이 정수이고 $a_6 = -3$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 $m(m \geq 2)$ 에 대하여 a_m 의 m 제곱근 중 양수인 것의 개수를 $f(m)$, 음수인 것의 개수를 $g(m)$ 이라 하자.

$$\sum_{m=2}^{10} f(m) - \sum_{m=2}^{10} g(m) = -2$$

가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은? [4점]

- ① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

1)

2 1보다 큰 두 상수 $a, b(a < b)$ 에 대하여 두 곡선

$$y = a^x, \qquad y = -a^x + b$$

가 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y = a^x$ 와 곡선 $y = -a^x + b$ 의 점근선이 만나는 점을 B라 할 때, 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 놓여 있다. $\overline{AB} = \sqrt{13}$ 일 때, $a^3 \times b$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

2)

3 두 상수 $a(a > 1)$, $m(m > 0)$ 에 대하여 곡선 $y = a^x$ 가 직선 $y = mx$ 와 만나는 점을 A, 직선 $y = -\frac{x}{m}$ 와 만나는 점을 B라 하자. 두 점 A, B의 x 좌표 합이 0이고 선분 AB의 길이가 $\frac{\sqrt{14}}{2}$ 일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

3)

4 곡선 $y = 2^x$ 위에 $\overline{AB} = \sqrt{17}$ 인 두 점 A, B가 있다. 다음 조건을 만족시키는 두 점 C, D가 직선 $y = 4x + k$ 위에 있도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합은? (단, 점 A의 x 좌표가 점 B의 x 좌표보다 크다.) [4점]

(가) 두 점 A, C의 x 좌표는 같다.
(나) 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형은 마름모이다.

- ① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

4)

▶ Break Point ◀ 맞보기 4문항

<정답과 해설>

1) 정답 : ⑤

<해설>

a_m 의 m 제곱근을 X 라 하면 X 의 값은 다음 표와 같다.

	m 이 홀수	m 이 짝수
$a_m > 0$	$X = \sqrt[m]{a_m}$	$X = \sqrt[m]{a_m}$ 또는 $-\sqrt[m]{a_m}$
$a_m = 0$	$X = 0$	$X = 0$
$a_m < 0$	$X = \sqrt[m]{a_m}$	X 의 값은 존재하지 않는다.

m 이 홀수인 경우,

$a_m > 0$ 이면 $f(m) = 1, g(m) = 0$

$a_m = 0$ 이면 $f(m) = g(m) = 0$

$a_m < 0$ 이면 $f(m) = 0, g(m) = 1$

m 이 짝수인 경우,

$a_m > 0$ 이면 $f(m) = 1, g(m) = 1$

$a_m \leq 0$ 이면 $f(m) = g(m) = 0$

m 이 짝수이면 $f(m) - g(m) = 0$ 이므로

$$\sum_{m=2}^{10} f(m) - \sum_{m=2}^{10} g(m) = -2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{10} f(m) - \sum_{m=2}^{10} g(m) &= \sum_{m=2}^{10} \{f(m) - g(m)\} \\ &= \sum_{m=1}^4 \{f(2m+1) - g(2m+1)\} = -2 \end{aligned}$$

$$\{f(3) - g(3)\} + \{f(5) - g(5)\} + \{f(7) - g(7)\} + \{f(9) - g(9)\} = -2$$

... ㉠

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

(i) $d > 0$ 인 경우

$a_3 < 0, a_5 < 0$ 이므로 $f(3) - g(3) = f(5) - g(5) = -1$

㉠에 대입하면 $\{f(7) - g(7)\} + \{f(9) - g(9)\} = 0$ 이므로

$a_7 < 0, a_9 > 0$

$a_6 = -3$ 이므로 $a_7 = -3 + d, a_9 = -3 + 3d$

$-3 + d < 0, -3 + 3d > 0$

따라서 $1 < d < 3, d = 2$ ($\because d$ 는 정수)

(ii) $d < 0$ 인 경우

$a_7 < 0, a_9 < 0$ 이므로 $f(7) - g(7) = f(9) - g(9) = -1$

㉠에 대입하면 $\{f(3) - g(3)\} + \{f(5) - g(5)\} = 0$ 이므로

$a_3 > 0, a_5 < 0$

$a_6 = -3$ 이므로 $a_3 = -3 - 3d, a_5 = -3 - d$

$-3 - 3d > 0, -3 - d < 0$

따라서 $-3 < d < -1, d = -2$ ($\because d$ 는 정수)

$a_1 = a_6 - 5d = -3 - 5d$ 이므로 (i), (ii)에 의해

모든 a_1 의 값은 $-3 - 5 \times 2 = -13, -3 - 5 \times (-2) = 7$

$-13 + 7 = -6$

2) 정답 : 8

<해설>

점 A의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면

$$a^{x_1} = -a^{x_1} + b, x_1 = \log_a b$$

$$y_1 = a^{x_1} = \frac{b}{2}$$

점 B의 좌표를 (x_2, y_2) 라 하면

$$y_2 = b,$$

$$y_2 = a^{x_2}, x_2 = \log_a b$$

세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}, x_2 = 2x_1$$

$$\Rightarrow \log_a b = 2 \log_a \frac{b}{2}, b = 4 (\because b > 1)$$

두 점 A, B를 이은 선분의 길이가 $\sqrt{13}$ 이므로

$$13 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, (x_1 - x_2)^2 = 9$$

따라서

$$x_1 = \log_a \frac{b}{2} = 3, a^3 = 2$$

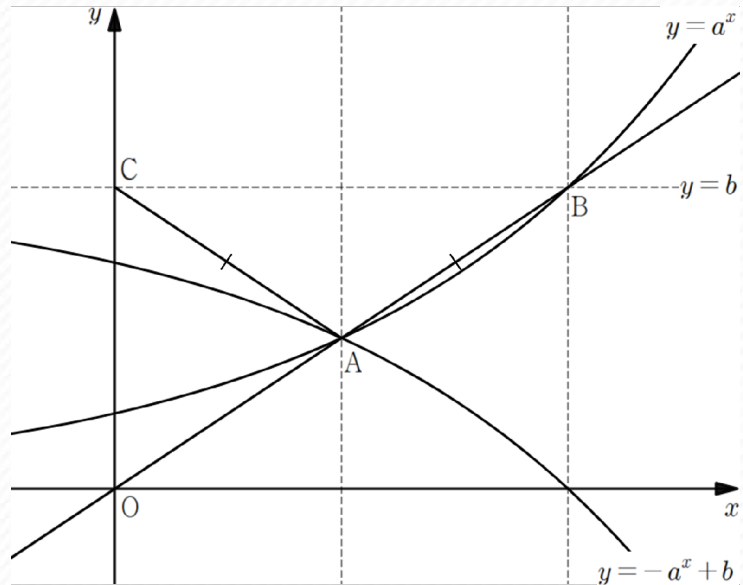
$$a^3 \times b = 2 \times 4 = 8$$

<참고>

곡선 $y = -a^x + b$ 의 점근선과 y 축이 만나는 점을 C라 하자.

두 곡선 $y = a^x, y = -a^x + b$ 는 $y = \frac{b}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

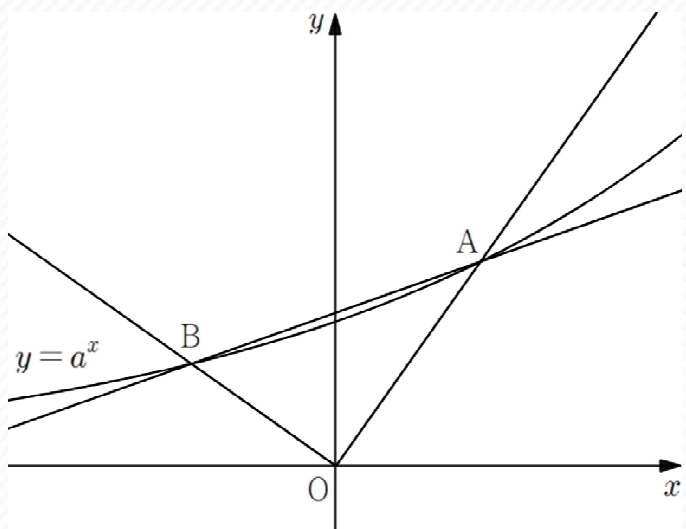
$$\overline{OA} = \overline{AC}$$



3) 정답 : ①

<해설>

문제 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



점 A의 x 좌표를 p ($p > 0$)라 하면 점 B의 x 좌표는 $-p$

점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 H, 점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 T라 하면

두 삼각형 AOH, BOT는 서로 닮음이다.

($\because \angle OAH = \angle BOT, \angle AOH = \angle OBT$)

$\overline{OH} = p, \overline{OT} = p, \overline{AH} = a^p, \overline{BT} = a^{-p}$ 이므로

$$\frac{p}{a^{-p}} = \frac{a^p}{p}, p=1 (\because p>0)$$

두 점 A, B의 좌표는 각각 $(1, a), \left(-1, \frac{1}{a}\right)$ 이고

두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{14}}{2}$ 이므로

$$\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 = 2^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2, a^2 - \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2}$$

양변에 a^2 을 곱하고 정리하면

$$2a^4 - 3a^2 - 2 = 0, (a^2 - 2)(2a^2 + 1) = 0$$

따라서 $a = \sqrt{2} (\because a > 1)$

두 점 A $(1, \sqrt{2}), B\left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - (-1)} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

<참고>

$a^2 - \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2}$ 에서 a 를 구할 때 공통 인수를 찾아서 인수분해할 수도 있다.

$$a^2 - 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{a^2} = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2) + \frac{a^2 - 2}{2a^2} = 0, (a^2 - 2)\left(1 + \frac{1}{2a^2}\right) = 0$$

4) 정답 : ②

<해설>

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형이

마름모이므로 두 점 A, B를 지나는 직선은 두 점 C, D를

지나는 직선 $y = 4x + k$ 와 평행하다.

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가 4이므로

두 점 A, B의 x 좌표 차를 p 라 하면 y 좌표 차는 $4p$

$$\overline{AB} = \sqrt{17} \text{ 이므로 } p^2 + (4p)^2 = (\sqrt{17})^2, p = 1$$

점 A의 좌표를 $(a, 2^a)$ 라 하면 점 B의 좌표는 $(a+1, 2^{a+1})$

두 점 A, B의 y 좌표 차가 4이므로

$$2^{a+1} - 2^a = 4, a = 2$$

따라서 두 점 A, B는 직선 $y = 4(x-2) + 4 = 4x - 4$ 를 지난다.

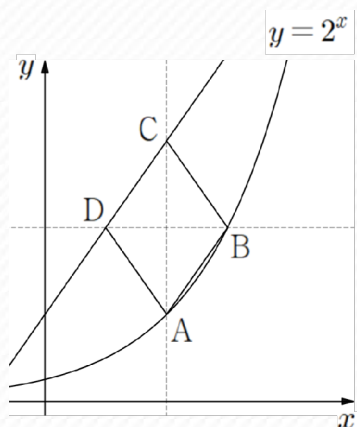
직선 $y = 4x + k$ 위의 두 점 C, D에 대하여

점 C의 x 좌표는 점 A의 x 좌표와 같고

네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형이 마름모가

되도록 하는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 점 B, D의 y 좌표가 같은 경우



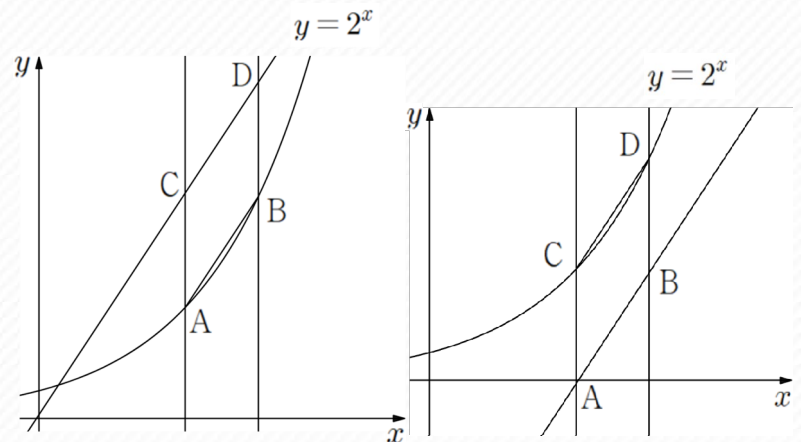
점 C의 y 좌표는 점 A의 y 좌표보다 8만큼 크다.

점 A는 직선 $y = 4x - 4$ 위의 점이므로

점 C는 직선 $y = 4x - 4 + 8 = 4x + 4$ 위의 점이다.

$k = 4$

(ii) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 인 경우



두 점 A, C의 y 좌표 차가 $\overline{AC} = \sqrt{17}$ 이므로

점 C의 y 좌표가 점 A의 y 좌표보다 크다면

점 C는 직선 $y = 4x - 4 + \sqrt{17}$ 위의 점이고

점 C의 y 좌표가 점 A의 y 좌표보다 작다면

점 C는 직선 $y = 4x - 4 - \sqrt{17}$ 위의 점이다.

$$k = -4 + \sqrt{17} \text{ 또는 } k = -4 - \sqrt{17}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$4 + (-4 + \sqrt{17}) + (-4 - \sqrt{17}) = -4$$