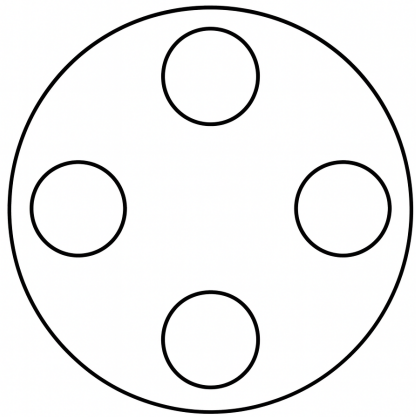


11. 원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가 일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로 다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수를 k 라고 할 때, $\frac{k}{6}$ 의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

(가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다.
(나) 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합이 4 이상인 접시가 1개 이상 존재한다.

[230328]



12. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다음 조건을 만족시키도록 여섯 개를 선택한 후, 선택한 숫자 여섯 개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오.

(가) 숫자 1, 2, 3을 각각 한 개 이상씩 선택한다.
(나) 선택한 여섯 개의 수의 합이 3의 배수이다.

[230329]

(=공을 2개씩 주머니에 넣는 경우)가 2번 이상 나와야 한다는 점을 파악한다면 쉽게 풀린다.

[해설]

$a_5 + b_5 \geq 7$ 인 사건을 A , $a_k = b_k$ 인 자연수 $k(1 \leq k \leq 5)$ 가 존재하는 사건을 B 라 하자.

사건 A 가 일어나는 경우는

(i) $a_5 + b_5 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7$

(ii) $a_5 + b_5 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$

(iii) $a_5 + b_5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9$

(iv) $a_5 + b_5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$

주사위의 눈의 수가 3 이상일 확률은 $\frac{2}{3}$, 2 이하일 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로

(i)의 확률은 ${}_5C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{10 \times 4}{3^5}$

(ii)의 확률은 ${}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10 \times 8}{3^5}$

(iii)의 확률은 ${}_5C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{5 \times 16}{3^5}$

(iv)의 확률은 ${}_5C_5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{1 \times 32}{3^5}$

따라서 $P(A) = \frac{40 + 80 + 80 + 32}{3^5} = \frac{232}{3^5}$

$A \cap B$ 인 경우는 (i), (ii)에서 3번째 시행까지 3 이상의 눈의 수가 1번, 2 이하의 눈의 수가 2번 나와야 하므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= {}_3C_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times {}_2C_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) + {}_3C_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{3 \times 2^3 + 3 \times 2^3}{3^5} \\ &= \frac{16}{3^4} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{16}{3^4}}{\frac{232}{3^5}} \\ &= \frac{6}{29} \end{aligned}$$

이고

$p = 29, q = 6$

따라서 $p + q = 29 + 6 = 35$

Question 11.

[정답] 470

<Tip>

‘조건 (가)를 만족시키는 모든 경우의 수’에서 ‘조건 (가)는 만족하지만, 조건 (나)는 만족시키지 않는 경우의 수’를 빼보자.

[해설]

조건 (가)를 만족시키려면 한 접시에는 빵을 2개, 나머지 세 접시에는 빵을 1개씩 담아야 한다. 이때 한 접시에 담을 2개의 빵을 선택하는 경우의 수는

${}_5C_2 = 10$

나머지 세 접시에 남은 3개의 빵을 담는 경우의 수는

$3! = 6$

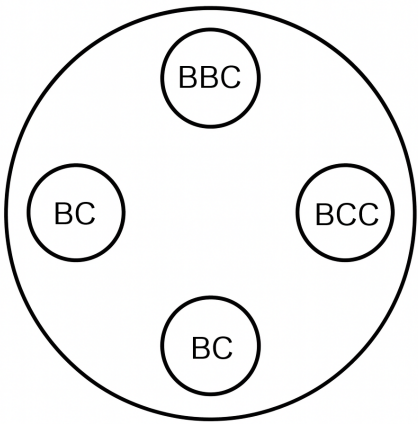
사탕 5개를 네 접시에 담는 경우의 수는

${}_4C_5 = {}_8C_5 = 56$

조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는

$10 \times 6 \times 56 = 3360$

조건 (가)는 만족하지만, 조건 (나)는 만족시키지 않는 경우는 다음과 같이 2가지 경우가 있다. (빵을 B, 사탕을 C라고 하자)



(i) 2개의 빵을 담은 접시에 사탕을 1개 담는 경우

(i) -① 나머지 접시 중 한 접시에만 사탕이 2개, 두 접시에는 1개씩 담기는 경우

이때 한 접시에 담을 2개의 빵을 선택하는 경우의 수는

${}_5C_2 = 10$

나머지 세 접시에 남은 3개의 빵을 담는 경우의 수는

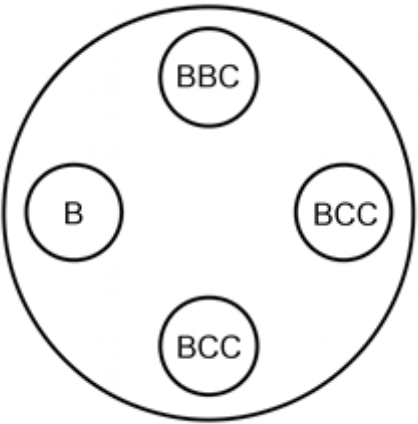
$3! = 6$

2개의 사탕이 담길 접시를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1 = 3$

구하는 경우의 수는

$10 \times 6 \times 3 = 180$



(i) -② 나머지 접시 중 한 접시에만 사탕이 0개, 두 접시에는 2개씩 담기는 경우

이때 한 접시에 담을 2개의 빵을 선택하는 경우의 수는

${}_5C_2 = 10$

나머지 세 접시에 남은 3개의 빵을 담는 경우의 수는

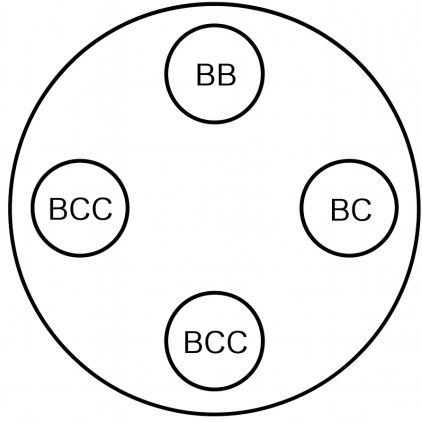
$3! = 6$

0개의 사탕이 담길 접시를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1 = 3$

구하는 경우의 수는

$10 \times 6 \times 3 = 180$



(ii) 2개의 빵을 담은 접시에 사랑을 담지 않는 경우
조건 (나)를 만족시키지 않으려면 나머지 접시 중 한 접시에만 사탕이 1개, 두 접시에는 2개씩 담겨야 한다.

이때 한 접시에 담을 2개의 빵을 선택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

나머지 세 접시에 남은 3개의 빵을 담는 경우의 수는

$$3! = 6$$

1개의 사탕이 담길 접시를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

구하는 경우의 수는

$$10 \times 6 \times 3 = 180$$

(i)~(ii)에 의하여

$$k = 3360 - (180 \times 3)$$

$$= 2820$$

따라서

$$\frac{k}{6} = 470$$

Question 12.

[정답] 180

[해설]

조건 (가)를 만족시키려면 숫자 1, 2, 3이 각각 한 개 이상씩 선택되어야 하므로 선택한 숫자 여섯 개를 1, 2, 3, a , b , c 라고 할 수 있다.

(단, a , b , c 는 3 이하의 자연수이다.)

1, 2, 3의 합은 이미 3의 배수이므로 조건 (나)를 만족시키려면

$a+b+c$ 가 3의 배수이면 된다.

$3 \leq a+b+c \leq 9$ 이므로 다음과 같이 분류를 할 수 있다.

(i) $a+b+c=3$ 인 경우

$a=b=c=1$ 이므로 선택한 숫자 여섯 개 1, 1, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_5C_1 = 30 \text{ (또는 } \frac{6!}{4!} = 30)$$

(* 좌측은 나열할 수 있는 여섯 개의 자리에서 2, 3의 자리를 선택하는 방식이고, 우측은 숫자 여섯 개를 배열한 후 1이 중복되는 경우를 나눠 준 방식이다. 둘 중 편한 방식을 택하면 된다.)

(ii) $a+b+c=6$ 인 경우

(ii)-① 1, 2, 3을 제외한 숫자가 1, 2, 3인 경우

선택한 숫자 여섯 개 1, 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

(* 이 경우에도 두 가지 방법으로 모두 계산이 가능하지만, 더 편한 방

법은 정해져 있으므로 적지 않겠다.)

(ii)-② 1, 2, 3을 제외한 숫자가 2, 2, 2인 경우

선택한 숫자 여섯 개 1, 2, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_5C_1 = 30 \text{ (또는 } \frac{6!}{4!} = 30)$$

(iii) $a+b+c=9$ 인 경우

$a=b=c=3$ 이므로 선택한 숫자 여섯 개 1, 2, 3, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_5C_1 = 30 \text{ (또는 } \frac{6!}{4!} = 30)$$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$30 + 90 + 30 + 30 = 180$$

Question 13.

[정답] 104

[해설]

(i) $f(2)=1$ 인 경우

조건 (가)에 의하여 $f(1)=1$

$1 \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq 5$ 를 만족시키는 함수의 수는

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

(ii) $f(4) \times f(5) > 12$ 인 경우

(ii)-① $f(4)=3$, $f(5)=5$ 인 경우

$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 3$ 을 만족시키는 함수의 수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$$

(ii)-② $f(4)=4$, $f(5)=4$ 인 경우

$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 4$ 을 만족시키는 함수의 수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

(ii)-③ $f(4)=4$, $f(5)=5$ 인 경우

$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 4$ 을 만족시키는 함수의 수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

(ii)-④ $f(4)=5$, $f(5)=5$ 인 경우

$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 5$ 을 만족시키는 함수의 수는

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

그러므로 구하는 함수의 개수는

$$10 + 20 + 20 + 35 = 85$$

(iii) $f(2)=1$ 이고 $f(4) \times f(5) > 12$ 인 경우

(iii)-① $f(4)=3$, $f(5)=5$ 인 경우

가능한 $f(3)$ 의 개수는 3개

(iii)-② $f(4)=4$, $f(5)=4$ 인 경우

가능한 $f(3)$ 의 개수는 4개

(iii)-③ $f(4)=4$, $f(5)=5$ 인 경우

가능한 $f(3)$ 의 개수는 4개

(iii)-④ $f(4)=5$, $f(5)=5$ 인 경우

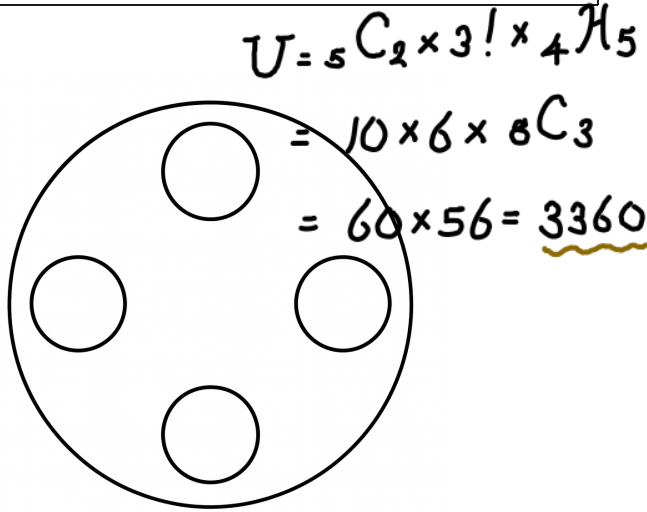
가능한 $f(3)$ 의 개수는 5개

그러므로 구하는 함수의 개수는

11. 원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가 일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로 다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수를 k 라고 할 때, $\frac{k}{6}$ 의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

- (가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다.
(나) 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합이 4 이상인 접시가 1개 이상 존재한다.

[230328]

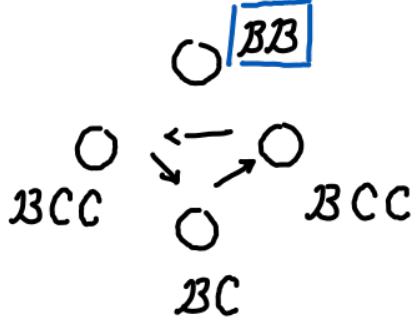


* 빵: B / 사탕: C

(가) $\cap$ (나)^c

시점 고정!

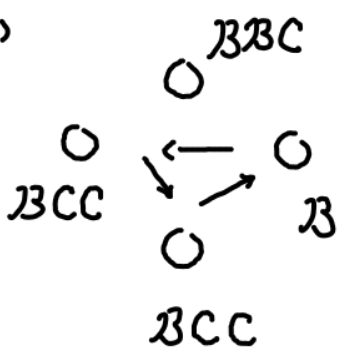
(2)



빵 나누어주는 경우

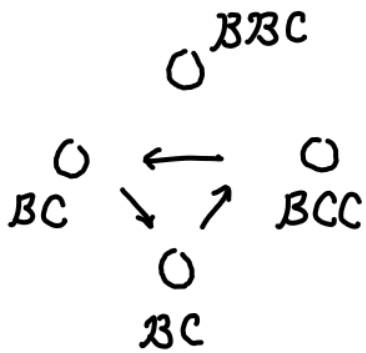
$$n(i) = 3 \times ({}_5C_2 \times 3!) = \underline{180}$$

(ii)



$$n(ii) = 3 \times {}_5C_2 \times 3! = \underline{180}$$

(iii)



$$n(iii) = 3 \times {}_5C_2 \times 3! = \underline{180}$$

$$\therefore k = 3360 - (180 \times 3) = 2820$$

$$\therefore \frac{k}{6} = 470$$

12. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다음 조건을 만족시키도록 여섯 개를 선택한 후, 선택한 숫자 여섯 개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오.

- (가) 숫자 1, 2, 3을 각각 한 개 이상씩 선택한다.
(나) 선택한 여섯 개의 수의 합이 3의 배수이다.

[230329]

$$1, 2, 3, a, b, c \leadsto a+b+c \text{가 } 3 \text{의 배수여야}$$

합: 3의 배수 $(3 \leq a+b+c \leq 9)$

$$(i) a+b+c = 3$$

$$a=b=c=1 \text{ 이므로}$$

$$1, 1, 1, 1, 2, 3 \text{ 배열}$$

$$\rightarrow {}_6P_2 = \underline{30}$$

$$(ii) a+b+c = 6 = 1+2+3 = 2+2+2$$

$$\textcircled{1} 1, 1, 2, 2, 3, 3 \text{ 배열} \rightarrow {}_6C_2 \times {}_4C_2 = \underline{90}$$

$$\textcircled{2} 1, 2, 2, 2, 2, 3 \text{ 배열} \rightarrow {}_6P_2 = \underline{30}$$

$$(iii) a+b+c = 9$$

$$a=b=c=3 \text{ 이므로}$$

$$1, 2, 3, 3, 3, 3 \text{ 배열} \rightarrow {}_6P_2 = \underline{30}$$

$$\therefore 30 + 90 + 30 + 30 = \underline{180}$$