

문제집

	수정전	수정후
53번		
답과 풀이에 맞게 조건 수정	$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)+g(x)}{(x-b)\ln a} = -\frac{65}{32}$	$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)+g(x)}{(x-b)\ln a} = -\frac{17}{8}$

풀이집

	수정전	수정후
빠른답 76번	정답 ②	정답 ④
42번	수정후 정답 20 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a ($a > 0$), 공비를 r ($r > 0$)이라 하면 $a_n = ar^{n-1}$이다. 주어진 수열 $\sin \frac{n\pi}{3}$는 주기가 6인 수열로, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$에 따른 값은 각각 $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$이 반복된다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (단, $c_n = 2b_{4n-3} - 7b_{4n-2} + 7b_{4n-1} - 2b_{4n}$)이 수렴하기 위해서는 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$이어야 한다.	

(i) $r < 1$ 인 경우: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이므로 충분히 큰 모든 n 에 대해 $a_n < 3$ 이 된다.

따라서 충분히 큰 n 에서 $b_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ 가 되는데, 이 경우 c_n 은

$-3\frac{\sqrt{3}}{2}, 3\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$ 의 값이 주기적으로 나타나므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ 을 만족할 수 없다.

(ii) $r = 1$ 인 경우: $a_n = a$ (상수)이다. $a < 3$ 이면 (i)과 마찬가지로 수렴하지 않으며, $a \geq 3$ 이면 모든 n 에 대해 $b_n = a$ 가 되어 $c_n = 2a - 7a + 7a - 2a = 0$ 이 된다. 이 경우 급수의 합이 0이 되므로 조건 (가)의 '0이 아닌 값에 수렴한다'에 모순이다.

(iii) $r > 1$ 인 경우: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로 어떤 자연수 m 이 존재하여

$n \leq m$ 일 때는 $a_n < 3$ 이고, $n \geq m+1$ 일 때는 $a_n \geq 3$ 이 된다.

따라서 $4n-3 \geq m+1$ 을 만족하는 충분히 큰 n 에 대하여

$b_{4n-3}, b_{4n-2}, b_{4n-1}, b_{4n}$ 은 모두 a_k 의 값을 따르므로,

$$\begin{aligned} c_n &= 2a_{4n-3} - 7a_{4n-2} + 7a_{4n-1} - 2a_{4n} \\ &= a_{4n-3}(2 - 7r + 7r^2 - 2r^3) \end{aligned}$$

이다. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ 이어야 하므로 다음 삼차방정식이 성립해야 한다.

$$2 - 7r + 7r^2 - 2r^3 = 0$$

$$(1-r)(2r-1)(r-2) = 0$$

$r > 1$ 이므로 공비는 다음과 같다.

$$r = 2 \dots\dots \textcircled{7}$$

공비 $r = 2$ 에 의하여 $a_1 < 3$ 이므로 $b_1 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

조건 (나) $4b_1b_4 + b_5 = 2$ 에 $b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 를 대입하면

$$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b_4 + b_5 = 2$$

$$2\sqrt{3}b_4 + b_5 = 2 \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 a_4 의 범주에 따라 두 가지 경우를 조사할 수 있다.

(i) $a_4 \geq 3$ 인 경우:

$a_5 = 2a_4 \geq 6 > 3$ 이므로 $b_4 = a_4, b_5 = 2a_4$ 이다.

$\textcircled{8}$ 에 대입하면 $2\sqrt{3}a_4 + 2a_4 = 2$ 이므로 $a_4 = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 3$ 이

