이동훈
기출문제집

미적분

교사경 편

문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

구 성

▸ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 미적분'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 321개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2025년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2026학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2026학년도 (학년도 기준)

▸ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
킬러, 준킬러 모두 수록
비킬러 중에서 상대적으로 난이도가 높은 문제는 모두 수록
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▸ 문항 정렬은 유형별, 난이도순을 따랐습니다.
유형별 문항 구성은 출제 의도를 뚜렷하게 보여줄 것이며,
난이도순은 학습의 효율성을 높일 것입니다.

▸ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

▸ 문제집 본문에서 '문제 풀이에 직접적으로 도움이 되는 주제명'은 빈 상자로 두었습니다.

A. 지수함수의 그래프

주제:

빈 상자로 처리된 주제명은 각 단원의 시작 페이지의 맨 아래에 적어두었습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 수준
○○ : 교과서 연습문제 수준
○○○ : 비킬러(중에서 난이도 상)
●●● : 준킬러 (실전개념 필요성 비교적 높음)
★★★ : 킬러 (실전개념 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 출제 의도에 가장 가깝고, 빠른 풀이입니다.
따라서 [풀이] 또는 [풀이1]만을 읽어도 학습에 아무런 지장이 없습니다.

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

단원별 알파벳 구성

<table>
<tr><th>과목</th><th>대단원</th><th>알파벳</th><th>과목</th><th>대단원</th><th>알파벳</th></tr>
<tr><td rowspan="3">수학 Ⅰ</td><td>지수함수와 로그함수</td><td>A</td><td rowspan="3">기하</td><td>이차곡선</td><td>M</td></tr>
<tr><td>삼각함수</td><td>B</td><td>평면벡터</td><td>N</td></tr>
<tr><td>수열</td><td>C</td><td>공간도형과 공간좌표</td><td>P</td></tr>
<tr><td rowspan="3">수학 Ⅱ</td><td>함수의 극한과 연속</td><td>D</td><td rowspan="6">수학</td><td>다항식</td><td>Q</td></tr>
<tr><td>미분</td><td>E</td><td>방정식과 부등식</td><td>R</td></tr>
<tr><td>적분</td><td>F</td><td>도형의 방정식</td><td>S</td></tr>
<tr><td rowspan="3">미적분</td><td>수열의 극한</td><td>G</td><td>집합과 명제</td><td>T</td></tr>
<tr><td>미분법</td><td>H</td><td>함수</td><td>U</td></tr>
<tr><td>적분법</td><td>I</td><td>순열과 조합</td><td>V</td></tr>
<tr><td rowspan="3">확률과
통계</td><td>경우의 수</td><td>J</td><td colspan="2">교육과정 外</td><td>Z</td></tr>
<tr><td>확률</td><td>K</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>통계</td><td>L</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

목 차

미적분

H083

★★★
(2019(7)고3-가형30)

$x=a(a>0)$에서 극댓값을 갖는 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos\pi x}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ \dfrac{7}{128}\pi^2 & (f(x)=0) \end{cases}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(0)\times g'(2a)\neq 0$
(나) 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

$g(1)=\dfrac{2}{7}$일 때, $g(-1)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

H. 변곡점

H084

○○○
(2019(3)고3-가형20)

함수 $f(x)=x^2+ax+b\left(0<b<\dfrac{\pi}{2}\right)$에 대하여 함수 $g(x)=\sin(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=-g'(x)$이다.
(나) 점 $(k,\ g(k))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이고, $2kg(k)=\sqrt{3}g'(k)$이다.

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

④ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

H. 그래프 개형

주제:

H085

○○○ (2008(7)고3-가형28)

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x)$$

를 만족하고 $h(x)=f(x)+xg(x)$로 정의할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $h(0)=0$
ㄴ. $h'(-x)=h'(x)$
ㄷ. $h(x)$의 이계도함수 $h''(x)$가 $x=1$에서
극댓값 1을 가질 때,
방정식 $h''(x)-x=0$의 실근은 적어도 3개다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H086

○○○ (2014(7)고3-A형21)

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)<f(2)$인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(2+x)=f(2-x)$를 만족시킨다. 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

H087

●●● (2014(3)고3-B형21)

-1과 1을 제외한 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)=-1$이고 $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이다.
(다) $x\neq1$인 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)<0$이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 한 점에서 만난다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 세 점에서 만난다.
ㄷ. $f'(\alpha)=-1$인 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

H088

(2016(10)고3-가형21)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다. (나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. (다) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pi$

함수 $g(x)=\dfrac{\sin f(x)}{x}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)+g(-x)=0$이다. ㄴ. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ ㄷ. $f(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}(\alpha>0)$이면 방정식 $\lvert g(x)\rvert=\dfrac{1}{\alpha}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H089

(2018(10)고3-가형21)

함수 $f(x)=-\dfrac{kx^3}{x^2+1}(k>1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=f^{-1}(x)$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 α, 가장 큰 값을 β라 하자. 함수 $y=f(x-2\beta)+2\alpha$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $f'(\beta)=2g'(\alpha)$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$ ③ $\dfrac{4+2\sqrt{2}}{5}$
④ $\dfrac{5+2\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{5}$

H090

★★★ (2021(10)고3-미적분30)

서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=h(0)$
(나) $g'(2)=-5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오. [4점]

H091

★★★ (2017경찰대(1차)―공통19)

함수 $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x+1$과 이차함수 $g(x)$는 어떤 실수 α에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$, $f'(\alpha)=g'(\alpha)$
(나) $f(\alpha+1)=g(\alpha+1)$, $f'(\alpha+1)=g'(\alpha+1)$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 할 때, $\frac{S_2}{S_1}$의 값은? [5점]

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

$f(x)=kx^2h(x)$ (단, $k \neq 0$, $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수, $h(0) \neq 0$)
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가지므로
$f'(a)=0$
만약 $f(a)=0(k>0)$이면 $f(x)=kx^2(x-a)^2$에서
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
만약 $f(a)=0(k<0)$이면 $f(x)=kx^2(x-a)^2$에서
$f(1)=k(1-a)^2$, $g(1)=\dfrac{2}{f(1)}<0$ (즉, $g(1) \neq \dfrac{2}{7}$)이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $f(a) \neq 0$이다.
함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로
$$g'(a)=\frac{\pi(\sin a\pi)f(a)}{\{f(a)\}^2}=0$$
$\sin a\pi=0$에서 $\sin 2a\pi=0$, $\cos 2a\pi=1$
한편 $f(2a) \neq 0$이면
$$g'(2a)$$
$$=\frac{\pi(\sin 2\pi a)f(2a)-(1-\cos 2\pi a)f'(2a)}{\{f(2a)\}^2}$$
$$=0$$
이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
따라서 $f(2a)=0$이다.
이상에서 함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x)=kx^2(x-2a)(x-b)$ (단, b는 상수)
$f'(a)=ka^2(b-2a)=0$에서 $b=2a$이므로
$f(x)=kx^2(x-2a)^2$
이때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가지므로 $k>0$이다.
(*): $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(\pi x)^2}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\pi x)^2}{kx^2(x-2a)^2}$
$=\dfrac{\pi^2}{4ka^2}=\dfrac{7}{64}\pi^2$, 즉 $ka^2=\dfrac{16}{7}$ $\cdots$㉠
그런데 $g(1)=\dfrac{2}{f(1)}=\dfrac{2}{k(1-2a)^2}=\dfrac{2}{7}$에서
$k(1-2a)^2=7$ $\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하면
$\dfrac{16(1-2a)^2}{7a^2}=7$, $15a^2-64a+16=0$,
$(15a-4)(a-4)=0$
$a=4(\because \sin a\pi=0)$, $k=\dfrac{1}{7}$
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{7(1-\cos\pi x)}{x^2(x-8)^2} & (x\neq0,\ x\neq8)\\ \dfrac{7}{128}\pi^2 & (x=0,\ x=8)\end{cases}$$

$\therefore\ g(-1)=\dfrac{14}{81}$
$\therefore\ p+q=95$
답 95

H084

| 답 ③

[풀이]
조건 (가)에서 함수 $g'(x)$가 기함수(원점에 대하여 대칭인 함수)이므로 함수 $g(x)$는 우함수(y축에 대하여 대칭인 함수)이다.
그런데 함수 $y=\sin x$가 기함수이므로 함수 $f(x)$가 우함수이여야 함수 $g(x)=\sin(f(x))$가 우함수일 수 있다.
즉, $a=0$이고,
$f(x)=x^2+b$ (단, $0<b<\dfrac{\pi}{2}$)
함수 $g(x)$의 도함수와 이계도함수는 각각
$g'(x)=2x\cos(x^2+b)$
$g''(x)=2\cos(x^2+b)-4x^2\sin(x^2+b)$
조건 (나)에 의하여
$g''(k)=2\cos(k^2+b)-4k^2\sin(k^2+b)=0$
즉, $\tan(k^2+b)=\dfrac{1}{2k^2}$ $\cdots$㉠
그리고 $2kg(k)=\sqrt{3}g'(k)$에서
$2k\sin(k^2+b)=2\sqrt{3}k\cos(k^2+b)$
즉, $\tan(k^2+b)=\sqrt{3}$ $\cdots$㉡
㉠, ㉡에서
$\dfrac{1}{2k^2}=\sqrt{3}$, $k^2=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$
㉡에서 $k^2+b=\dfrac{\pi}{3}$이므로
$b=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
$\therefore\ a+b=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
답 ③

H085

| 답 ⑤

[풀이1]
f: 기함수, g: 우함수
$h(x)=f(x)+xg(x)$
$=$(기함수)$+$(기함수)$\times$(우함수)
$=$(기함수)$+$(기함수)

$=$(기함수)
따라서 $h(x)$는 기함수이다.
기함수의 도함수는 우함수이므로
$h'(x)$는 우함수이다.
우함수의 도함수는 기함수이므로
$h''(x)$는 기함수이다.

▸ ㄱ. (참)
연속인 기함수는 항상 원점을 지나므로
$h(0)=0$

▸ ㄴ. (참)
$h'(x)$는 우함수이므로
$h'(-x)=h'(x)$

▸ ㄷ. (참)
기함수 $h''(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로
이 함수는 $x=-1$에서 극솟값 -1을 갖는다. 왜냐하면 모든 기함수는 원점에 대하여 대칭이기 때문이다. 그리고 $h''(x)$는 연속함수이므로 $h''(0)=0$이다.
이상을 정리하면
$h''(1)=1$, $h''(0)=0$, $h''(-1)=-1$
이므로 세 수 1, 0, -1은 방정식 $h''(x)-x=0$의 실근이다. 따라서 이 방정식은 적어도 3개 이상의 서로 다른 실근을 갖는다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

[풀이2] 시험장
함수 $f(x)$의 그래프는 원점 대칭이고,
함수 $g(x)$의 그래프는 y축 대칭이다.
함수 $f(x)$의 그래프가 원점 대칭이므로
함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 반드시 지난다.
즉, $f(0)=0$

▸ ㄱ. (참)
$h(0)=f(0)+0g(0)=0$

▸ ㄴ. (참)
문제에서 주어진 등식의 양변을 미분하면
$-f'(-x)=-f'(x)$ 즉, $f'(-x)=f'(x)$
$-g'(-x)=g'(x)$ 즉, $g'(-x)=-g'(x)$
($\because$ 합성함수의 미분법)
함수 $h(x)$의 도함수는
$h'(x)=f'(x)+g(x)+xg'(x)$
$h'(-x)$
$=f'(-x)+g(-x)-xg'(-x)$
$=f'(x)+g(x)+xg'(x)$
$=h'(x)$
$\therefore\ h'(-x)=h'(x)$

▸ ㄷ. (참)
보기 ㄴ의 등식의 양변을 미분하면
$h''(-x)=-h''(x)$
($\because$ 합성함수의 미분법)
함수 $h''(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
(함수 $h''(x)$의 그래프는 원점을 반드시 지난다.)
함수 $h''(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가지므로
함수 $h''(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -1을 가진다.
이상을 정리하면
$h''(-1)=-1$, $h''(0)=0$, $h''(1)=1$
세 실수 -1, 0, 1은 방정식 $h''(x)-x=0$의 실근이므로
보기 ㄷ에서 주어진 명제는 참이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

[참고]
기함수: 원점 대칭인 함수
우함수: y축 대칭인 함수
다음이 성립한다.

▸ (1) 사칙연산 관련
(기함수)±(기함수)=(기함수)
(우함수)±(우함수)=(우함수)
(기함수)×(우함수)=(기함수)
(기함수)÷(우함수)=(기함수)

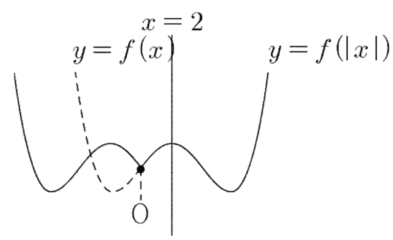
▸ (2) 도함수 관련
기함수의 도함수는 우함수이다.
우함수의 도함수는 기함수이다.

H086 | 답 ④

[풀이] 시험장
$f(2+x)=f(2-x)$
$\Rightarrow$ 함수 $f(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

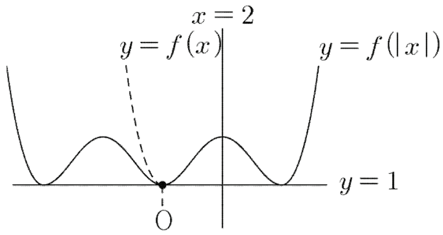
$$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & (x\ge 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

두 함수 $f(x)$, $f(|x|)$의 그래프는
• (경우1) ×



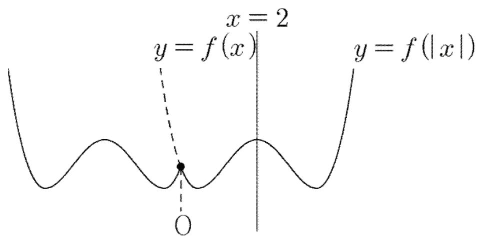
곡선 $y=f(|x|)$와 어떤 x축에 평행한 직선도 서로 다른 3개의 점에서 만날 수 없다.

• (경우2) ○



위의 그림처럼 $f'(0)=0$, $f(0)=1$이면 곡선 $y=f(|x|)$와 직선 $y=1$은 서로 다른 3개의 점에서 만난다.

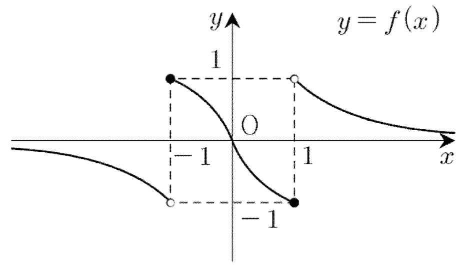
• (경우3) ×



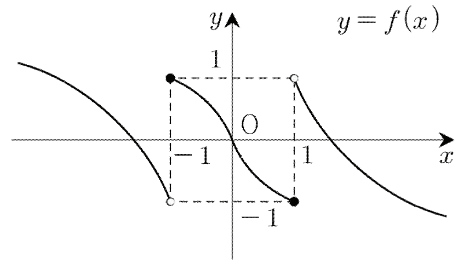
곡선 $y=f(|x|)$와 어떤 x축에 평행한 직선도 서로 다른 3개의 점에서 만날 수 없다.
따라서 (경우2)만이 가능하다.
인수정리에 의하여
$f(x)-1=x^2(x-4)^2$
극댓값: $f(2)=17$
답 ④

H087 | 답 ④

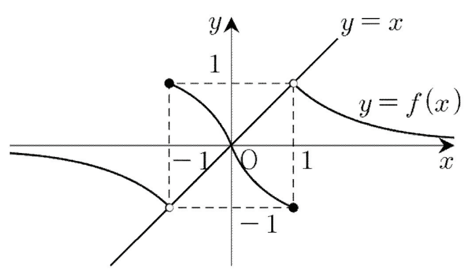
[풀이]
조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지난다.)
조건 (다)에 의하여
구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로
$0<x<1$인 x에 대하여
$f(0)>f(x)>f(1)$
즉, $0>f(x)>-1$ ($\because$ 조건(나))
조건 (다)에 의하여
구간 $(1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로
$x>1$인 x에 대하여
$f(x)<1=\lim_{x\to1+}f(x)$ 즉, $f(x)<1$ ($\because$ 조건(나))
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.
• x축과 만나지 않는 경우
(제1사분면에서 점근선 $y=k(\geq 0)$을 갖는다.)



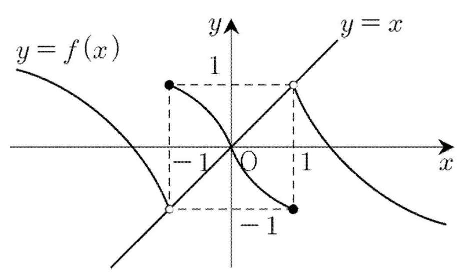
• x축과 만나는 경우



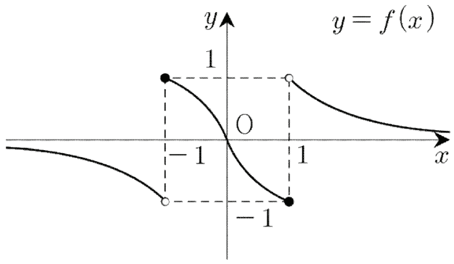
▸ ㄱ. (참)
• x축과 만나지 않는 경우
(제1사분면에서 점근선 $y=k(\geq 0)$을 갖는다.)



위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 원점에서 만난다.
• x축과 만나는 경우

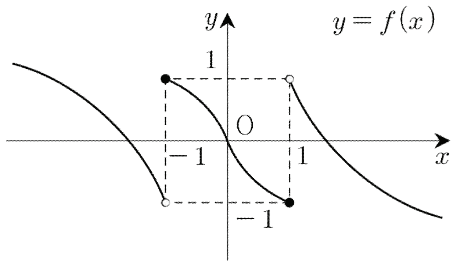


위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 원점에서 만난다.
따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 한 점에서 만난다.
▸ ㄴ. (거짓)
• x축과 만나지 않는 경우
(제1사분면에서 점근선 $y=k(\geq 0)$을 갖는다.)



곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 개수는 1이다.

• x축과 만나는 경우

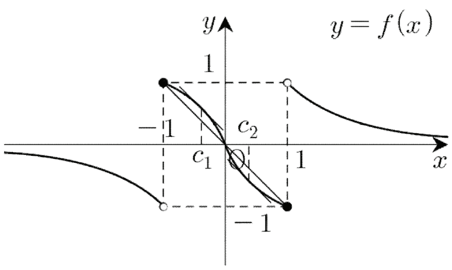


곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 개수는 3이다.

▸ ㄷ. (참)

• x축과 만나지 않는 경우

(제1사분면에서 점근선 $y=k(\geq 0)$을 갖는다.)



함수 $f(x)$가 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고

구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=-1=f'(c_1)$$

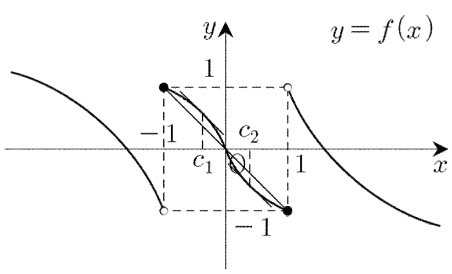
인 c_1이 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

마찬가지의 이유로

$f'(c_2)=-1$인 c_2가 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f'(\alpha)=-1$인 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

• x축과 만나는 경우



마찬가지의 이유로

$f'(\alpha)=-1$인 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

H088 | 답 ③

[풀이]

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

조건 (가)에서 주어진 등식에서

$f'(x)=-f'(-x)$

($\because$ 합성함수의 미분법)

$x<0$일 때, $-x>0$이므로

$f'(x)=-f'(-x)<0$($\because$ 조건(나))

구간 $(-\infty,\ 0)$에서 함수 $f(x)$는 감소하고,

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

미분가능한 함수는 연속함수이므로

함수 $f(x)$는 연속함수이다.

함수의 연속의 정의에 의하여

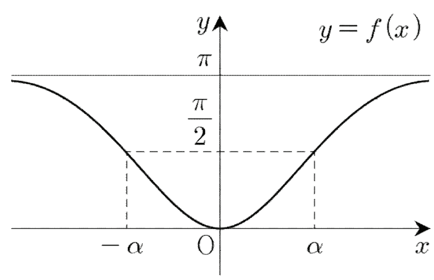
$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$($\because$ 조건 (다))

즉, $f(0)=0$

조건 (다)에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\pi$이므로

직선 $y=\pi$는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



▸ ㄱ. (참)

모든 양의 실수 x에 대하여

$$g(-x)=\frac{\sin f(-x)}{-x}=-\frac{\sin f(x)}{x}=-g(x)$$

$\therefore\ g(-x)+g(x)=0$

▸ ㄴ. (참)

조건 (가)에서 주어진 등식에서

$f'(x)=-f'(-x)$

($\because$ 합성함수의 미분법)

$x=0$을 대입하여 정리하면

$f'(0)=0$

함수의 극한의 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}$$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} \times \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \times f'(0)$

($t = f(x)$로 두면 $x \to 0$일 때, $t \to 0$이다.)

$= 1 \times 0 = 0$

▶ ㄷ. (거짓)

함수 $g(x)$의 정의역은 $x \neq 0$인 모든 실수의 집합이다.

$$g(\alpha) = \frac{\sin f(\alpha)}{\alpha} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} (> 0)$$

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x) = \frac{xf'(x)\cos(f(x)) - \sin(f(x))}{x^2}$$

$$g'(\alpha) = \frac{\alpha f'(\alpha)\cos(f(\alpha)) - \sin(f(\alpha))}{\alpha^2}$$

$$= \frac{\alpha f'(\alpha) \times 0 - 1}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha^2} (< 0)$$

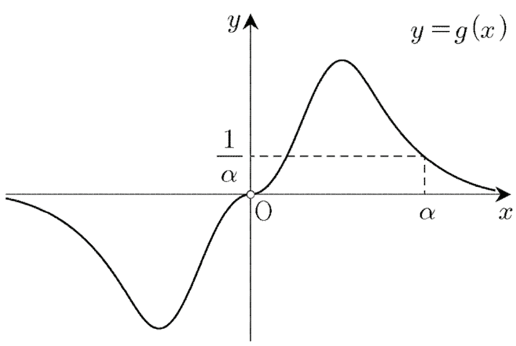
즉, 함수 $g(x)$의 그래프는 점 $\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$을 지나고,

이 점에서 그은 접선의 기울기는 음수이다.

이 결과와 보기 ㄱ, ㄴ의 결과를 종합하여

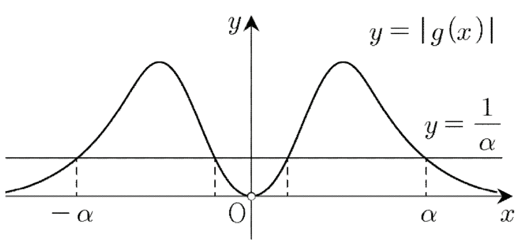
함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.

(아래는 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 $g(x)$의 그래프 중에서 가장 간단한 것을 그린 것이다.)



함수 $|g(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(아래는 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 $|g(x)|$의 그래프 중에서 가장 간단한 것을 그린 것이다.)



따라서 방정식 $|g(x)| = \frac{1}{\alpha}$의 서로 다른 실근의 개수는 2일 수 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

H089 | 답 ②

[풀이]

모든 실수 x에 대하여

$f(-x) = -f(x)$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

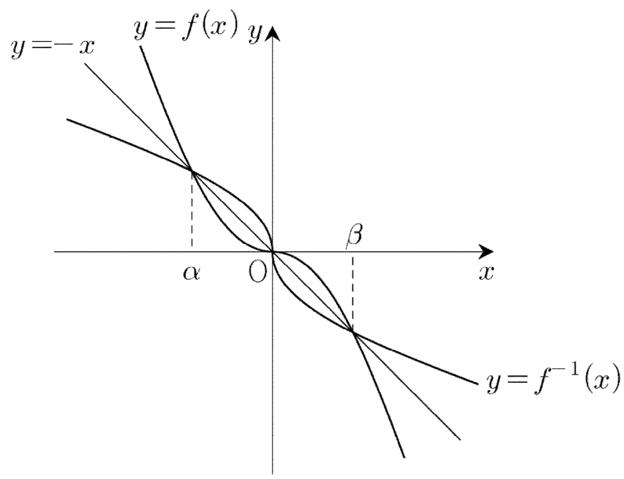
$$f'(x) = -\frac{kx^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \text{(단, } k > 1\text{)}$$

모든 실수 x에 대하여

$f'(x) \leq 0$

이므로 함수 $f(x)$는 감소함수이다.

두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



위의 그림처럼 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$의 세 교점은 직선 $y = -x$ 위에 있다.

방정식 $f(x) = -x$는

$$-\frac{kx^3}{x^2+1} = -x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{kx^2}{x^2+1} = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{k-1}} \text{ 또는 } x = 0$$

$$\alpha = -\sqrt{\frac{1}{k-1}}, \ \beta = \sqrt{\frac{1}{k-1}}$$

이때, $\beta = -\alpha$, $f(\beta) = \alpha$, $f(\alpha) = \beta$이다.

$h(x) = f(x - 2\beta) + 2\alpha$로 두자.

$h(\beta) = f(-\beta) + 2\alpha = f(\alpha) + 2\alpha$

$= \beta + 2\alpha = \alpha$

역함수의 성질에 의하여

$g(\alpha) = \beta$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{h'(\beta)}$

그런데 $h'(x)=f'(x-2\beta)$이므로

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{f'(-\beta)}$

함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

함수 $f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f'(-x)=f'(x)$이 성립한다.

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{f'(\beta)}$

이를 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$f'(\beta)=2g'(\alpha)=\dfrac{2}{f'(\beta)}$

정리하면

$f'(\beta)=-\sqrt{2}$

($\because f(x)$는 감소함수이다.)

$f'(\beta)=f'\left(\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}\right)$

$=-\dfrac{\dfrac{k}{k-1}\times\dfrac{3k-2}{k-1}}{\left(\dfrac{k}{k-1}\right)^2}=-\sqrt{2}$

정리하면

$(3-\sqrt{2})k=2$

풀면

$\therefore\ k=\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$

답 ②

H090 | 답 10

[풀이]

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 함수 $f(x)$는 기함수이다. (즉, 원점 대칭이다.)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=-\dfrac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2}$ (단, $a>0$, $b>0$)

$f'(0)=-b<0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이어야 한다.

즉, 함수 $f(x)$는 감소함수이다.

조건 (가)에서

$f(2)-f^{-1}(2)=g(f(0))$

$=g(0)=f(0)-f^{-1}(0)=0-0=0$

즉, $f(2)=f^{-1}(2)(=t$로 두자.)

역함수의 성질에 의하여

$f(t)=2$

그런데 $f(x)$가 원점 대칭이므로

$f(-2)=-f(2)=-t$,

$f(-t)=-f(t)=-2$

즉, 곡선 $y=f(x)$는 다음의 네 점을 지난다.

$(2,\ t)$, $(t,\ 2)$, $(-2,\ -t)$, $(-t,\ -2)$

이때, $t\neq-2$이면 '함수 $f(x)$는 감소함수이다.' 에 모순이다.

따라서 $t=-2$ 즉, $f(2)=-2$

이제 상수 a, b의 값을 결정하자.

$f(2)=-\dfrac{8a+2b}{5}=-2$, $4a+b=5$ $\cdots$ ㉠

두 함수 $g(x)$, $h(x)$의 도함수는

$g'(x)=f'(x)-(f^{-1})'(x)$

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

이므로

$g'(2)=f'(2)-(f^{-1})'(2)=f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}$,

($\because$ $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)

$h'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(-2)f'(2)$

$=\{f'(-2)-(f^{-1})'(-2)\}f'(2)$

$=\left\{f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}\right\}f'(2)$

($\because$ $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)

$=(f'(2))^2-1$

조건 (나)에 의하여

$f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}=-5\{(f'(2))^2-1\}$

$f'(2)=p$로 두고 정리하면

$5p^3+p^2-5p-1=0$, $(5p+1)(p+1)(p-1)=0$

$p=-\dfrac{1}{5}(=f'(2))$ 또는 $p=-1(=f'(2))$

($\because f'(2)<0$)

- (1) $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$인 경우 (○)

$f'(2)=-\dfrac{28a-3b}{25}=-\dfrac{1}{5}$, $28a-3b=5$

㉠과 연립하면

$a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$

- (2) $f'(2)=-1$인 경우 (×)

$f'(2)=-\dfrac{28a-3b}{25}=-1$, $28a-3b=25$

㉠과 연립하면

$a=1$, $b=1$이므로 모순이다. ($\because a\neq b$)

(1), (2)에서

$\therefore\ 4(b-a)=10$

답 10

H091

| 답 ⑤

[풀이] ★

$h(x)=f(x)-g(x)$, $\alpha+1=\beta$로 두고

두 조건 (가), (나)를 다시 쓰면

$h(\alpha)=h(\beta)=0$, $h'(\alpha)=h'(\beta)=0$

인수정리에 의하여

$h(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

함수 $h(x)$의 이계도함수는

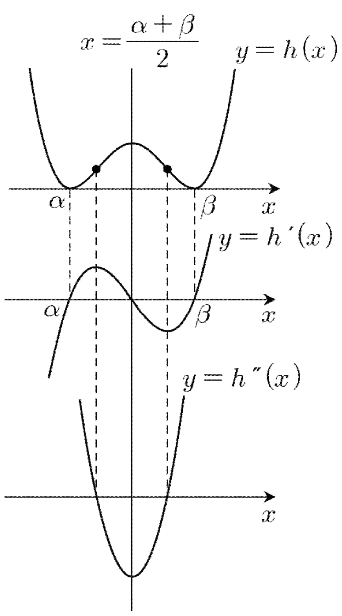
$h''(x)=12x^2-4(3\alpha+3\beta)x$

$+2(\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta)$

이차함수 $h''(x)$의 대칭축은

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \cdots ㉠$$

세 함수 $h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



이차함수 $g(x)$의 이계도함수 $g''(x)$는 상수함수이므로

$h''(x)=f''(x)-g''(x)=f''(x)-$(상수함수)

이다. 따라서 두 이차함수 $h''(x)$, $f''(x)$의 대칭축은 일치한다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x^3-18x^2+24x-8$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=12x^2-36x+24$

이차함수 $f''(x)$의 대칭축은

$$x=\frac{3}{2} \qquad \cdots ㉡$$

㉠=㉡이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}$ 즉, $\frac{2\alpha+1}{2}=\frac{3}{2}$

풀면 $\alpha=1$, $\beta=\alpha+1=2$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=(x-1)^2(x-2)^2$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=-x^2+4x-3$

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 정적분의 공식에 의하여

$$S_1=\int_1^2 |f(x)-g(x)|\,dx$$

$$=\int_1^2 (x-1)^2(x-2)^2dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$$

($\because$ 평행이동)

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx$$

($\because$ 곡선 $y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$은 y축에 대하여 대칭이다.)

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{16}x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{30}$$

$$S_2=\int_1^3 |g(x)|\,dx$$

$$=\int_1^3 -(x-1)(x-3)dx$$

$$=\frac{1}{6}(3-1)^3=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ \frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{30}}=40$$

답 ⑤

[참고]

함수 $h(x)$의 방정식을 유도하면서 생략된 계산과정은 다음과 같다.

$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고,

$h(\alpha)=h(\beta)=0$이므로
인수정리에 의하여
$h(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$
(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)
함수 $h(x)$의 도함수는
$h'(x)=(x-\beta)Q(x)+(x-\alpha)Q(x)$
$+(x-\alpha)(x-\beta)Q'(x)$
$h'(\alpha)=(\alpha-\beta)Q(\alpha)=0$,
$h'(\beta)=(\beta-\alpha)Q(\beta)=0$
그런데 $\alpha \neq \beta$이므로
$Q(\alpha)=0$, $Q(\beta)=0$
인수정리에 의하여
$Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$
이므로
$h(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

H092 | 답 ⑤

[풀이1] ★
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 1로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 모두 원점을 지나므로
$f(0)=g(0)=0$
직선 $y=g(x)$가 점 $(b,\ f(b))$에서 함수 $f(x)$에 접하므로
$f(b)=g(b)$, $f'(b)=g'(b)$
점 $(a,\ g(a))$가 함수 $f(x)$의 변곡점이므로
$f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀐다.
▸ ㄱ. (참)
함수 $y=f(x)-g(x)$의 이계도함수는
$y''=f''(x)-g''(x)=f''(x)$
($\because$ 모든 일차함수의 이계도함수는 $y=0$이다.)
$y''|_{x=a}=f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 y''의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀐다.
따라서 보기 ㄱ에서 주어진 명제는 참이다.
▸ ㄴ. (참)
인수정리에 의하여
$f(x)-g(x)=x(x-b)(x-c)$
(단, c는 상수)
함수 $f(x)-g(x)$의 도함수는
$f'(x)-g'(x)=(x-b)(x-c)$
$+x(x-c)+x(x-b)$
이므로
$f'(b)-g'(b)=b(b-c)=0$
에서 $c=b(\because b\neq 0)$
함수 $f(x)-g(x)$의 방정식은
$f(x)-g(x)=x(x-b)^2$
함수 $f(x)-g(x)$의 도함수는
$f'(x)-g'(x)=(x-b)(3x-b)$
방정식 $f'(x)-g'(x)=0$을 풀면
$x=b$ 또는 $x=\dfrac{b}{3}$
$x=\dfrac{b}{3}$의 좌우에서 $f'(x)-g'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\dfrac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다.
▸ ㄷ. (참)
함수 $f(x)-g(x)$의 이계도함수는
$f''(x)-g''(x)=6x-4b$
방정식 $f''(x)-g''(x)=0$을 풀면
$x=\dfrac{2}{3}b$
보기 ㄱ의 결과에 의하여 $a=\dfrac{2}{3}b$이므로
$\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{\frac{3}{2}a-a}{a}=\dfrac{1}{2}$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

[풀이2] 시험장
수평화와 삼차함수의 비율관계를 이용하여 문제를 해결하자.