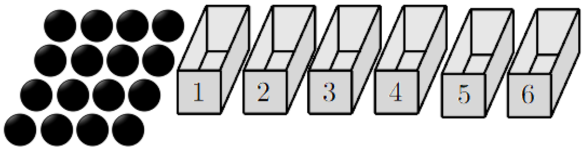
16개의 공과 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 여섯 개의 빈 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때, k가 홀수이면 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣고, k가 짝수이면 k의 약수가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 여섯 개의 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 때, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 1개 더 많을 확률은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$



"조건을 읽어보니 각 주사위의 눈이 나올 때 어떤 상자에 공을 넣어야 하는지 다음과 같이 특정할 수 있겠다."

주사위 눈	공을 넣는 상자의 숫자
1	1,3,5 → 3개
2	1,2 → 2개
3	1,3,5 → 3개
4	1,2,4 → 3개
5	1,3,5 → 3개
6	1,2,3,6 → 4개

"즉, 주사위의 눈이 어떤 수가 나오냐에 따라 어떤 상자에 공을 넣는지 정해지고 이 시행을 4번 반복하니까 독립시행의 확률에 대한 문제겠군. 그리고 문제에 마지막 문장을 읽어보니 조건부 확률같아. 그렇다면 사건을 잡고 분모에 해당하는 사건을 구하는 것이 쉬워 보이니 먼저 분석해 봐야겠군."

$P(X)$**를 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 1개 더 많을 확률이라 하고,** $P(Y)$**를 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 확률이라 하자.**

그럼 문제에서 구하고자 하는 것은 $P(X|Y)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$**이다.**

$P(Y)$**를 먼저 구해보자.**

여기서 시행을 4번 반복하여 6개의 상자 안에 들어 있는 공의 개수의 총합이 홀수여야 하므로
몇 번 상자에 공을 넣느냐보다는 홀수 개의 공을 넣는지, 짝수 개의 공을 넣는지가 중요하다.

주사위의 눈이 $1, 3, 4, 5$일 때 상자 안에 공을 홀수개 집어 넣고, $2, 4$일 때 공을 짝수개 집어 넣고 있다.
그렇다면 상자 안에 들어 있는 공의 개수의 총합이 홀수가 되는 경우는

CASE1) 홀수 개 3번 넣고, 짝수 개 1번 넣는 경우 또는
CASE2) 홀수 개 1번 넣고, 짝수 개 3번 넣는 경우이다.

한 번 시행할 때마다
홀수 개의 공을 넣을 확률은 주사위의 눈이 $1, 3, 4, 5$인 경우이므로 $\frac{4}{6}$가 되고,
짝수 개의 공을 넣을 확률은 주사위의 눈이 $2, 4$인 경우이므로 $\frac{2}{6}$이 되므로

독립시행의 확률 계산에 의해
CASE1) 홀수 개 3번이므로 ${}_4C_3 \times \left(\frac{4}{6}\right)^3 \times \left(\frac{2}{6}\right)^1 = \frac{512}{6^4}$이고
CASE2) 홀수 개 1번이므로 ${}_4C_1 \times \left(\frac{4}{6}\right)^1 \times \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{128}{6^4}$이다.

$P(Y) = \frac{512+128}{6^4} = \frac{640}{6^4}$**이다.**

" 이제 $P(X \cap Y)$를 구하러 가야 하는데, 3이 적힌 상자에 들어있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어있는 공의 개수보다 1 더 크다...? 몇 번 상자에 공을 넣었는지도 아직 생각하지 않았는데 너무 복잡해 보이는데?
이럴땐 상황을 빨리 파악해 보는 것이 좋겠어.

일단 3이 적힌 상자와 2가 적힌 상자에 공을 언제 넣는지부터 확인해 보자.
위의 표를 보니까
주사위의 눈이 $1, 3, 5$가 나오면 상자 $2, 3$ 중에 상자 3에만 공을 넣고,
주사위의 눈이 $2, 4$가 나오면 상자 $2, 3$ 중에 상자 2에만 공을 넣네.
주사위의 눈이 6이 나오면 상자 $2, 3$ 둘 다 공을 넣으니까 두 상자의 공의 개수의 차이에는 영향을 못 주네. "

즉, (주사위 눈이 1,3,5가 나온 횟수) = (주사위 눈이 2,4가 나온 횟수) $+1$ 이라는 관계식으로 이 조건을 정리할 수 있다.

" 여전히 경우를 세는 게 너무 복잡해 보이지만, 침착하게 생각해 보자. 일단 대부분의 조건부 확률 문제에서 분자를 구할 때도 분모를 구할 때랑 같은 케이스 분류 기준을 활용할 때가 많았어.
$P(X \cap Y)$**를 CASE1일 때와 CASE2일 때로 나눠서 보도록 하자. "**

" 시행 횟수는 4번이지만 들어가는 공이 제각각이니 상황이 복잡한거야. 그럼 동일한 상황을 최대한 묶어서 단순하게 생각해 보자. "

'우리는 사건을 미지수로 두고 부정방정식을 활용하여 사건 $X \cap Y$가 만족되는 상황을 알아볼 것이다.'

부정방정식을 세우기 위해 미지수를 세팅할 수 있는데 똑같은 상자에 넣는 경우 동일한 사건으로 볼 수 있다.
주사위의 눈이 $1, 3, 5$가 나오는 경우를 사건 A라 하고, 주사위의 눈이 $2, 4, 6$이 나오는 경우는 공을 넣는 상자들이 전부 다르므로 각각 사건 B, C, D라 하자.

주사위 눈	공을 넣는 상자의 숫자	사건명
1	1,3,5	사건 A
2	1,2	사건 B
3	1,3,5	사건 A
4	1,2,4	사건 C
5	1,3,5	사건 A
6	1,2,3,6	사건 D

그러면 총 시행횟수가 4번 이라는 조건은 $A+B+C+D=4$ 로 정리할 수 있다.
※ 사건 A, B, C, D가 발생하는 횟수를 각각 A, B, C, D로 설정하자.

그리고 (주사위의 눈이 1,3,5가 나온 횟수) = (주사위의 눈이 2,4가 나온 횟수) $+1$ 이라는 조건은
$A=B+C+1$ **로 정리할 수 있다.**

이제 각 케이스 별로 부정방정식의 관계식이 달라지므로 케이스를 나누어 해석해 보도록 하자.

CASE1) 홀수 개 3번 넣고, 짝수개 1번 넣는 경우
여기서 홀수 개를 넣기 위해 주사위의 눈이 $1, 3, 4, 5$가 나와야 한다.
따라서 $A+C=3$이고 $B+D=1$을 만족하면 되므로
$A+B+C+D=4$
$A=B+C+1$
$A+C=3$
$B+D=1$**의 연립방정식을 풀면 $A=2,\ B=0,\ C=1,\ D=1$이다.**

그러면 사건 A가 2번, 사건 C가 1번, 사건 D가 1번씩 일어나므로 이를 확률로 계산해주면
$AACD$**를 나열하는 경우는 $\frac{4!}{2!}$ 이고, 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{3}{6}$, 사건 C가 일어날 확률은 $\frac{1}{6}$,**
사건 D가 일어날 확률이 $\frac{1}{6}$ 이므로, 구하고자 하는 확률은 $\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^2\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\times\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{108}{6^4}$

CASE2) 홀수 개 1번 넣고, 짝수개 3번 넣는 경우

이 경우는 $A+C=1$, $B+D=3$을 동시에 만족해야 한다.
$A+B+C+D=4$
$A=B+C+1$

$A+C=1$
$B+D=3$ **의 연립방정식을 풀면** $A=1$, $B=0$, $C=0$, $D=3$**이다.**
그러면 사건 A**가** 1**번, 사건** D**가** 3**번 일어나므로 이를 확률로 계산해주면**
$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{3}{6}\right)^1\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{12}{6^4}$**이다.**

따라서 $P(X\cap Y)=\frac{108+12}{6^4}=\frac{120}{6^4}$**이고**

최종적으로 구하고자 하는 답은 $P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}=\frac{\frac{120}{6^4}}{\frac{640}{6^4}}=\frac{3}{16}$**이다.**

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 4**번의 시행을 통해 여섯 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수인 상황을 파악하고 케이스를 나눌 수 있는가?**
2. 주사위의 눈이 6**이 나왔을 때 상자** 2, 3**에 공을 모두 집어 넣는 규칙을 읽고, 주사위의 눈이** 6**일 때의 상황을 배제해도 되는 것을 파악할 수 있는가?**
3. 각 케이스에 따라 '부정방정식'을 세워 조건부 확률의 분모에 해당하는 $P(X\cap Y)$**을 구할 수 있는가?**

| NOTES

- 복잡한 규칙, 복잡한 상황에서 제일 중요한 것은 '구하고자 하는 것이 무엇인가?'이다.
구하고자 하는 것이 여섯 상자 안에 들어 있는 모든 공의 개수의 총합이므로 공이 홀수 개, 짝수 개가 들어가는 상황을 빠르게 파악할 수 있도록 한다.

- 조건부 확률에서 '분모'에 해당하는 사건이 케이스를 나누어 해석했다면 '분자' 에 해당하는 사건을 구할 때도 동일한 케이스 내에서 생각할 수 있도록 한다.

- 결국 이 문제의 핵심은 '복잡한 상황을 어떻게 단순화하여 조건부 확률을 만족하는 상황을 찾아내냐'이다.
이때 부정방정식이 도구로써 문제를 단순화시킬 수 있다. 필자는 아래 상황이 충족되면 부정방정식을 활용한다.
① 조건이 '등식'으로 표현될 때
이 문제에서는 '3**이 적힌 상자에 들어 있는 공의 수가** 2**에 적힌 상자에 들어 있는 공의 수보다** 1**개 많다' 가 되겠다.**
② '최종 결과'가 중요할 때
각 시행에서 어떻게 배치되는지가 중요하지 않고, 4**번의 시행 끝의 결과가 어떠한지가 중요하다.**

부정방정식의 장점은 복잡한 상황에서도 일관된 풀이로 사고 과정이 꼬이지 않을 수 있다는 것이다.