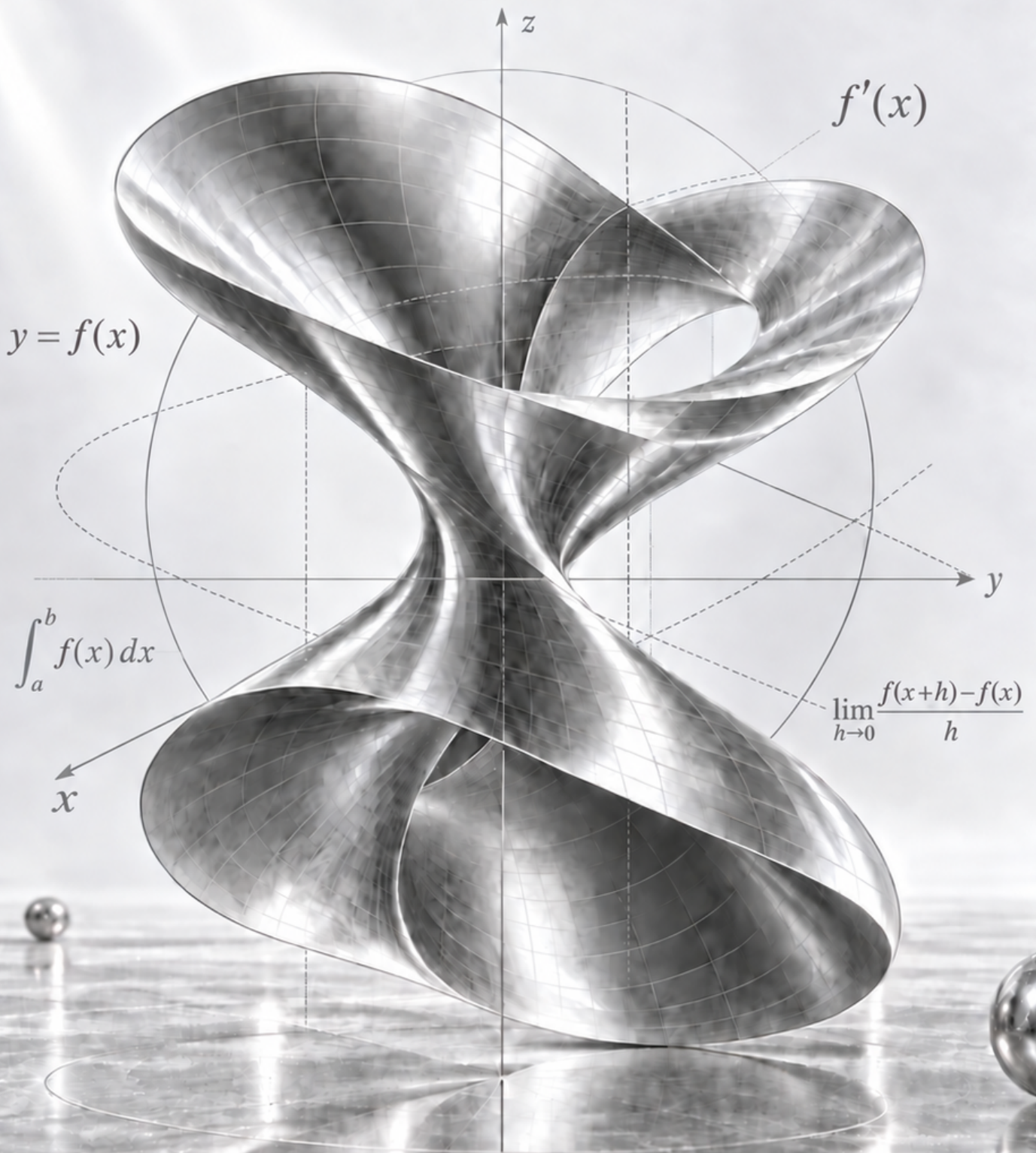


미적분 총정리



I. 수열의 극한과 급수

01 수렴·발산과 극한의 성질

극한값을 계산하기 전에 수렴하는 대상부터 확인한다.

1. 수열이 가까워지는 값을 읽기

자연수 n 이 한없이 커질 때 a_n 이 한 실수에 한없이 가까워지면 수열이 수렴한다고 한다. 수렴하지 않는 수열은 발산한다. 양의 무한대 또는 음의 무한대로 가거나, 어느 한 값에 가까워지지 않고 진동하는 경우가 이에 해당한다. 무한대는 실수인 극한값이 아니다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

두 수열이 각각 수렴하면 합·차·곱의 극한을 계산할 수 있다. 몫에서는 분모의 극한이 0이 아니어야 한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \alpha \beta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

2. 대소 관계와 샌드위치

어떤 자연수 이후의 모든 n 에 대해 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 이고 양 끝 수열이 같은 값에 수렴하면 가운데 수열도 그 값에 수렴한다. 단, $a_n < b_n$ 이어도 두 극한값은 같을 수 있다.

대표 예제 · 진동하는 항을 작은 양으로 누르기

수열 $b_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ 의 극한을 구하자.

$$2 - \frac{1}{n} \leq b_n \leq 2 + \frac{1}{n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

풀이의 핵심은 진동하는 $(-1)^n$ 자체의 극한을 구하는 것이 아니라, 오차의 절댓값이 $\frac{1}{n}$ 이하라는 사실이다.

논술 핵심 각각 발산하는 두 수열의 합이나 곱이 수렴할 수 있다. 극한의 사칙연산을 거꾸로 적용해 개별 수열의 수렴을 단정하지 않는다.

I. 수열의 극한과 급수

02 분수식·근호식의 극한

최고차항으로 나누거나 유리화하여 실제로 남는 크기를 찾는다.

1. 다항식의 비는 최고차항부터

분자와 분모를 분모의 최고차항으로 나눈다. 차수가 같으면 최고차항 계수의 비로 수렴하고, 분자의 차수가 더 낮으면 0으로 수렴한다. 분자의 차수가 더 높을 때는 부호까지 확인한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n} = \frac{3}{2}$$

2. 근호의 차는 유리화

두 항이 모두 커진다고 그 차가 작아진다고 판단할 수는 없다. 곱셈공식으로 차를 뺀으로 바꾸고 공통된 크기로 나눈다.

대표 예제 · 무한대에서의 근호 차

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n)$ 을 구하자.

$$\sqrt{n^2 + 3n} - n = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) = \frac{3}{2}$$

같이 기억할 판단

부정형은 답이 아니라 식을 정리해야 한다는 신호이다. 특히 0으로 가는 분모가 있으면 약분 가능한 인수와 좌우의 부호를 따로 확인한다. 자연수는 양수이므로 $\sqrt{n^2} = n$ 이지만, 실수 변수라면 $\sqrt{x^2} = |x|$ 이다.

논술 핵심 유리화·최고차항으로 나누기 등 실제 등식 변형을 먼저 쓴다. 무한대를 숫자처럼 약분하거나 서로 빼지 않는다.

I. 수열의 극한과 급수

03 등비수열과 매개변수

공비의 범위를 나누고, 경계값은 원래 수열에 직접 대입한다.

1. 공비에 따른 수렴과 발산

수열 r^n 은 $|r| < 1$ 일 때 0으로, $r = 1$ 일 때 1로 수렴한다. $r > 1$ 이면 양의 무한대로 발산한다. $r = -1$ 이면 진동하고, $r < -1$ 이면 부호가 번갈아 바뀌며 절댓값이 커진다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad (-1 < r < 1)$$

ar^{n-1} 에서 첫째항이 0이면 모든 항이 0이므로 공비와 관계없이 수렴한다. 첫째항이 0이 아닌 경우와 구별한다.

대표 예제 · 절댓값 조건을 매개변수로 옮기기

실수 x 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = 0$ 이 되도록 하는 범위를 구하자.

$$\left|\frac{x-1}{2}\right| < 1 \iff -1 < x < 3$$

양 끝에서 공비는 각각 -1 과 1 이 된다. $x = -1$ 이면 항의 부호가 번갈아 바뀌고, $x = 3$ 이면 모든 항이 1 이다. 어느 쪽도 극한값이 0이 아니므로 제외한다.

범위를 나누는 유형

분자와 분모에 지수항이 섞이면 공비의 절댓값이 1보다 작은지, 같은지, 큰지를 먼저 나눈다. 큰 쪽에서는 가장 빠르게 커지는 지수항으로 분자와 분모를 함께 나눈다.

논술 핵심 문제가 요구하는 것이 '수렴'인지 '극한값이 0'인지 구별한다. 공비가 1인 수열은 수렴하지만 극한값은 0이 아니다.

통합 논술 · 문제

01 등비수열에서 로그의 근삿값까지

등비수열의 합 · 정적분의 대소 관계 · 급수의 수렴

자연수 n 에 대하여 함수 P_n 과 수열 A_n 을 다음과 같이 정의한다.

$$P_n(x) = 1 + x + \cdots + x^n, \quad A_n = \int_0^{\frac{1}{2}} P_n(x) dx$$

다음 물음에 답하시오. 부등식이 성립하는 이유와 극한을 구하는 근거를 함께 서술하시오.

(1) 유한합과 오차

등비수열의 합을 이용하여 다음 등식을 보이고, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 에서 오른쪽 식이 0 이상 $\frac{1}{2^n}$ 이하임을 설명하시오.

$$\frac{1}{1-x} - P_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

(2) 급수의 합

A_n 을 유한 개의 항의 합으로 나타내고, (1)의 부등식을 적분하여 아래 급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}$$

(3) 근삿값의 정확도

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 에서 $\frac{1}{1-x} \leq 2$ 임을 이용하여 아래 부등식을 보이시오. 또한 오차를 비교한 오른쪽 식 $\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}$ 이 $\frac{1}{1000}$ 보다 작아지게 하는 최소 자연수 n 을 구하시오.

$$0 < \ln 2 - A_n \leq \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}$$

풀이를 서술해 보세요.

통합 논술 · 상세 해설

01 등비수열에서 로그의 근삿값까지

결론까지 이어지는 근거와 소문항 사이의 연결을 확인하세요.

(1) 먼저 유한합의 나머지를 정리한다

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 에서는 $x \neq 1$ 이므로 등비수열의 합 공식을 쓸 수 있다.

$$P_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad \frac{1}{1-x} - P_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

분자는 0 이상 $\frac{1}{2^{n+1}}$ 이하이고, $\frac{1}{1-x} \leq 2$ 이므로 나머지는 0 이상 $\frac{1}{2^n}$ 이하이다.

(2) 유한합을 적분한 뒤 극한을 취한다

$$A_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k2^k}$$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx = \ln 2$ 이다. (1)의 부등식을 적분하면 다음을 얻는다. 나머지는 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 에서 양수이므로 적분한 값도 0보다 크다.

$$0 < \ln 2 - A_n \leq \frac{1}{2^{n+1}} \longrightarrow 0$$

샌드위치 정리에 의해 $A_n \rightarrow \ln 2$ 이다. A_n 은 주어진 급수의 $n+1$ 번째 부분합이므로 급수의 합은 $\ln 2$ 이다.

(3) 적분 전에 변수의 거듭제곱을 남긴다

$$\ln 2 - A_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^{n+1} dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 2x^{n+1} dx = \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}$$

$n=5$ 에서 오른쪽 식의 값은 $\frac{1}{448}$, $n=6$ 에서는 $\frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$ 이다. 분모 $(n+2)2^{n+1}$ 은 자연수 n 에 따라 증가하므로 요구한 최소 자연수는 6이다.

서술의 핵심 무한급수와 적분의 순서를 바꾸지 않았다. 유한 부분합을 적분하고 오차를 영으로 보내 수렴을 보였다. (3)은 실제 오차의 최솟값을 묻는 문제가 아니다. 오차보다 큰 비교식이 $\frac{1}{1000}$ 보다 작아지는 최소 n 을 구한 것이다. [복습 06-26-39]