수열의 극한

수열의 극한에서 활용되는 방법은 크게 다섯 가지이다.

1] 거미줄 도형

2] 유계 이론

3] 일반항

4] 부동점(극한값) 활용

5] 샌드위치 이론

1] 거미줄 도형

가장 첫 번째로 거미줄 도형은 대부분의 경우 수열의 극한 문제에서 엄밀한 증명을 위해 활용되기 보다는 수열이 수렴하는 지 여부를 판단하고 수열의 극한이 존재한다면 어디로 수렴해야 하는 지를 판단하는 데에 활용된다.

예를 들어보도록 하자.

수열이 다음과 같이 정의되어 있을 때, 거미줄 도형을 그려서 수렴 여부와 수렴한다면 어떤 값으로 수렴하는 지를 판단해보도록 하겠다.

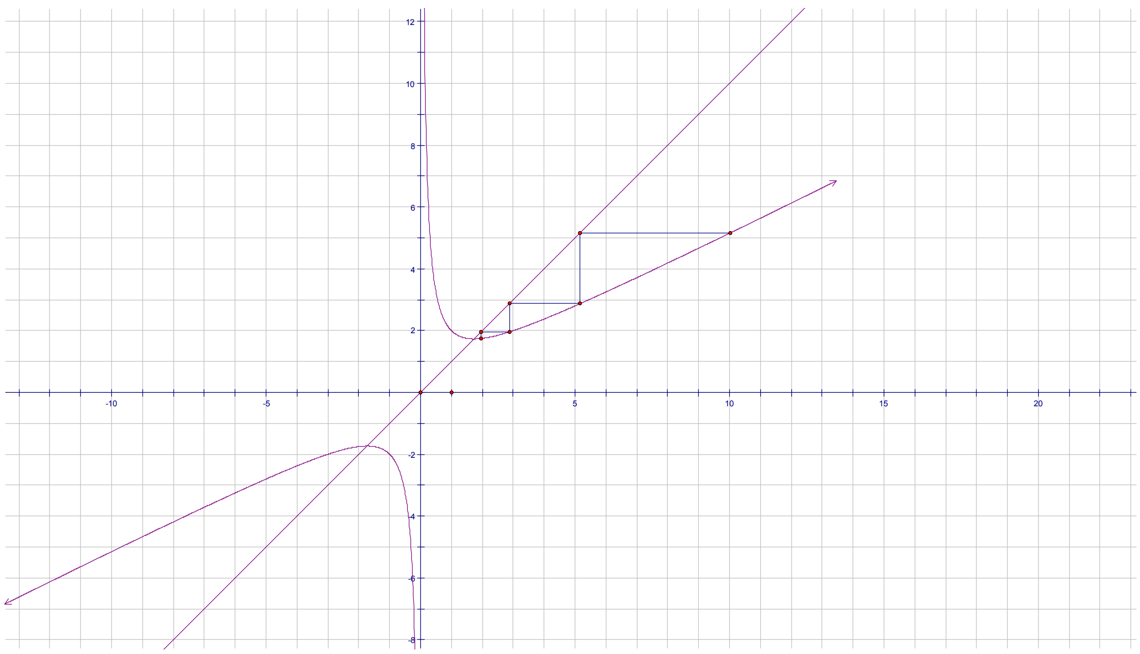
[예제] 수열 $\{x_n\}$이 다음과 같이 정의된다.

$x_1 = 10,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$

[풀이] 이제 거미줄 도형을 그리는 첫 번째 단계는 $x_{n+1} = f(x_n)$을 만족하는 함수 f를 찾는 것이다. 대부분의 경우 함수 f를 찾는 것은 어렵지 않은 데, 위 예제의 경우에는 그러한 함수 f가 $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$임을 알 수 있다.

두 번째 단계는 $y = f(x)$와 $y = x$를 직교 좌표계에 그리는 것이다. 세 번째 단계는 $(x_1,\ 0)$을 지나면서 x축에 수직인 직선이 $y = f(x)$와 만나는 점인 $(x_1,\ x_2)$를 찾는 것이다. 다음에는 $(x_1,\ x_2)$를 지나면서 y축에 수직인 직선이 $y = x$와 만나는 점인 $(x_2,\ x_2)$를 찾는 것이다. 다음에는 비슷하게 $(x_2,\ x_2)$를 지나면서 x축에 수직인 직선이 $y = f(x)$와 만나는 점인 $(x_2,\ x_3)$를 찾는 것이다.

일반적으로 $(x_n,\ x_n)$에서는 수직으로 이동하면서 $y = f(x)$와 만나는 점인 $(x_n,\ x_{n+1})$까지 움직이는 것이고 점 $(x_n,\ x_{n+1})$에서는 직선 $y = x$를 만날 때까지($(x_{n+1},\ x_{n+1})$까지) 수평으로 움직이는 것이다. 이러한 **점의 움직임을 나타낸 것이 바로 거미줄 도형**인 데, 만약 거미줄 도형에서 점의 움직임이 특정한 한 점을 향해 간다면 우리는 수열이 수렴한다는 것을 알 수 있다. 그리고 그 점이 반드시 $y = f(x)$와 $y = x$의 교점이어야 한다는 것도 당연하게 받아들일 수 있다. 그래서 이러한 단계를 고려해서 예제의 거미줄 도형을 그려보면 다음과 같다.



위 예제의 경우 거미줄 도형에서 수열 $\{x_n\}$이 수렴한다는 사실을 쉽게 알아낼 수 있다. 그리고 수렴한다는 것을 관찰하였으므로 수렴 값을 α라 하였을 때, $f(\alpha) = \alpha$라 두고 α를 구해보면 $\frac{1}{2}(\alpha + \frac{3}{\alpha}) = \alpha$이므로 $a = \sqrt{3}$임을 알 수 있다. 물론 임의의 자연수 n에 대해 $x_n > 0$이므로 $\alpha > 0$이고 $\alpha = -\sqrt{3}$은 제외시켜야 한다.

하지만 이러한 거미줄 도형을 그려놓고 수열 $\{x_n\}$이 수렴한다고 말하기에는 수학적인 엄밀성이

떨어지기 때문에 앞에서 언급하였듯이 거미줄 도형은 보통 문제를 푸는 사람이 빠르게 수열의 수렴 여부만을 확인해보기 위해서 그리는 것이 일반적이다. 만약 문제에서 **어떠한 수열을 주고 수렴값이 존재하게 하는 초항을 결정하여라**와 같은 식으로 나온다면(특히 그것이 단답형 문제일 경우) 거미줄 도형을 이용해서 푸는 것이 현명한 방법 중 하나일 것이다.

4] 부동점(극한값) 활용하기

우선 부동점과 극한값이 같은 말이 아니라는 것을 알아두었으면 좋겠다. 하지만 수열의 극한 문제에서는 대부분의 경우 부동점이 곧 극한값이기에 비슷하다는 의미에서 괄호를 쳐놓았다. 그렇다면 부동점은 무엇인지 수험생은 궁금해 할 것인데, 부동점은 거미줄 도형에서 설명한 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점이다. 왜 부동점이라는 이름을 갖게 되었는 지 생각해보면 부동점에서 거미줄 도형을 시작해보면 점이 움직이지 않고 계속 그 점에서만 머무르기 때문이다. 일반적으로 그 점이 바로 극한값을 나타내기 때문에 부동점은 많은 문제에서 극한값과 같은 값을 가진다. 이제 본격적으로 부동점을 활용한다는 말의 의미를 알아보도록 하자.

부동점의 활용은 다음의 형식으로 이루어진다.

수열 $\{x_n\}$에 대해서 $f(x_n)=x_{n+1}$을 만족하는 함수 f를 찾자.

다음에 $f(x)=x$를 만족하는 x를 α라고 하자. 그리고 다음과 같이 식을 변형하자.

$$|x_{n+1}-\alpha|=\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right||x_n-\alpha|=\left|\frac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}\right||x_n-\alpha|$$

이 때, 대부분의 문제에서 함수 f는 미분가능한 함수로 주어지기 때문에 $\left|\frac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}\right|$ 에 평균값 정리를 적용할 수 있다.

대부분의 문제는 평균값 정리를 적용 시 $\left|\frac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}\right|<c<1$ 임을 보일 수 있기 때문에 $|x_{n+1}-\alpha|<c^n|x_1-\alpha|$ 와 같은 식이 성립하고 $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$임을 보일 수 있다. 하지만 어떤 경우는 평균값 정리로는 해결이 안 되는 문제도 나오는 데, 그런 경우에는 식 변형을 통해서 해결할 수 있다. 이제 예제를 통해 확실히 이해해보도록 하자.

[예제] 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 주어진다. 이 때, 수열의 극한값을 구하여라.

임의의 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$이 성립하고 $a_1=1$이다.

[풀이] $f(a_n)=a_{n+1}$을 만족하는 함수 $f(x)=\sqrt{2+x}$ 이다.

우선 수학적 귀납법으로 임의의 자연수 n에 대하여 $1 \le a_n \le 2$임을 보이자.

$i)$ $n=1$일 때 : 자명하게 성립함을 확인할 수 있다.

$ii)$ $n=k$일 때 성립함을 가정하고 $n=k+1$일 때 성립함을 증명하도록 하자.

$1<\sqrt{1+2} \le a_{k+1}=\sqrt{2+a_k} \le \sqrt{2+2}=2$이므로 $n=k+1$일 때 성립하고 $i)$과 $ii)$ 그리고 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여 $1 \le a_n \le 2$임을 보일 수 있다.

이제 $f(x)=x$를 만족하는 x를 α라고 할 때, $\alpha=2$ 혹은 $\alpha=-1$인데, $a_n \ge 1$이므로 $\alpha=2$만을 택하기로 하자.

그러면 $|a_{n+1}-2|=\left|\dfrac{f(a_n)-f(2)}{a_n-2}\right||a_n-2|=|f'(c_n)||a_n-2|$ 가 평균값 정리에 의해 성립한다.

이 때, $1 \le c_n \le 2$이므로 $|f'(c_n)|=|\dfrac{1}{2\sqrt{c_n+2}}| \le \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$가 성립함을 알 수 있다.

따라서, $|a_{n+1}-2| \le \dfrac{1}{2\sqrt{3}}|a_n-2|$ 가 성립하고 $|a_{n+1}-2| \le (\dfrac{1}{2\sqrt{3}})^n|a_1-2|$가 성립한다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$이다.

<u>참고 :</u> 평균값 정리를 쓰지 않고 식 변형을 통해 문제를 풀 수 도 있는 데, 간략하게 소개하고자 한다. **<u>이런 방법은 평균값 정리로는 증명이 잘 되지 않는 어려운 문제에서 해결법이 될 수 있으므로 눈여겨보도록 하자.</u>**

$$|a_{n+1}-2|=\left|\frac{f(a_n)-f(2)}{a_n-2}\right||a_n-2|=\left|\frac{\sqrt{a_n+2}-2}{a_n-2}\right||a_n-2|$$

$$=\left|\frac{(\sqrt{a_n+2}-2)(\sqrt{a_n+2}+2)}{(a_n-2)(\sqrt{a_n+2}+2)}\right||a_n-2|=\left|\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}\right||a_n-2|$$ 가 성립한다.

이 때, $\left|\dfrac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}\right| \le \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ 이므로 $|a_{n+1}-2| \le (\dfrac{1}{2+\sqrt{3}})^n|a_1-2|$ 가 성립하고 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$임을 알 수 있다.

유제문제 3

다음 물음에 답하여라.

1】 $x>0$일 때 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$$

2】 $p>0$에 대하여 $a_n=(1+\frac{p}{n^2})(1+\frac{2p}{n^2})\cdots(1+\frac{np}{n^2})$이라고 하자. $\lim_{n\to\infty}a_n$을 구하여라.

유제문제 4

피보나치 수열 F_n의 정의는 다음과 같다.

$n\in N$에 대해서 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$이고 $F_1=F_2=1$이다.

이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$을 구하여라.

유제문제 3의 풀이

1] $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$와 같은 부등식을 증명하는 가장 간단한 방법은 미분을 활용하는 것이다. 증명하려는 부등식을 하나의 함수로 두고 문제를 푸는 것이 일반적이다.

$f(x)=x-\ln(1+x)$라고 두면 $x>0$에서 $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$이다. $f(0)=0$이므로 $x>0$에서 $f(x)>0$임을 쉽게 알 수 있다.

$g(x)=\ln(1+x)-(x-\frac{x^2}{2})$라고 두면 $x>0$에서 $g'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{1-(1-x^2)}{1+x}>0$이 성립한다. $g(0)=0$이므로 $x>0$에서 $g(x)>0$이 성립한다.

그러므로 본 문제의 부등식이 증명되었다.

2] $a_n=(1+\frac{p}{n^2})(1+\frac{2p}{n^2})\cdots(1+\frac{np}{n^2})$의 양변에 자연 로그를 씌워보자.

그러면 $\ln a_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{kp}{n^2})$이 성립하게 된다.

그러면 1]에 의해 $\sum_{k=1}^{n}(\frac{kp}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{n^4})<\ln a_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{kp}{n^2})<\sum_{k=1}^{n}\frac{kp}{n^2}$가 성립한다.

한편, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kp}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{p}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{p}{2}$이 성립한다.

또 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{kp}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{n^4})=\lim_{n\to\infty}(\frac{p}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{p^2}{2n^4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})=\frac{p}{2}$이 성립하므로 샌드위치 이론에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\frac{p}{2}$가 성립함을 알 수 있다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{p}{2}}$이다.

유제문제 4의 풀이

이 문제는 굉장히 다양한 방법으로 풀 수가 있다. 의미가 있을만한 3가지 풀이를 적어보도록 하겠다. 각각의 방법이 나름대로의 장점이 있기에 3가지 풀이를 모두 읽어보고 많은 것을 얻어 갈 수 있었으면 좋겠다.

[풀이$-i$]

첫 번째 풀이는 일반항을 활용하는 방법이다.

피보나치 수열의 일반항은 많은 학생이 외우고 있을 텐데, 먼저 피보나치 수열과 같은 수열의 일반항을 구하는 방법을 소개하고자 한다.

보통 $x_n = c_{n-1}x_{n-1} + c_{n-2}x_{n-2} + \cdots + c_{n-r}x_{n-r}$의 형태로 주어진 점화식을 선형점화식이라고 한다. x_i 대신에 x^i를 대입하면 방정식 $x^n = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_{n-r}x^{n-r}$이 나오는 데, 양변을 x^{n-r}으로 나눠주면 $x^r = c_{n-1}x^{r-1} + \cdots + c_{n-r}$와 같은 방정식이 나온다. 우리는 이것을 위 선형점화식의 특성방정식이라고 한다.

위 특성방정식의 해를 α_1, α_2, $\cdots$, α_r이라고 하면, 일반적으로 일반항 a_n은 다음가 같다.

$a_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_r\alpha_r^n$

앞의 A_1, A_2, $\cdots$, A_r은 초기항 r개를 직접 대입해서 구해야 한다.

사실 수험생 여러분이 대면할 선형점화식은 $x_n = c_{n-1}x_{n-1} + c_{n-2}x_{n-2}$정도의 점화식이므로 구체적으로 이러한 점화식을 하나 풀어보자.

$x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$이고 $x_1 = 3$, $x_2 = 17$라고 하자.

그러면 위 점화식의 특성방정식은 $x^2 = 3x + 4$이다. 특성방정식의 해는 $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = -1$이다. 그러므로 $x_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n = A_1 4^n + A_2(-1)^n$이다. 초기값을 대입해서 구해보면 일반항이 $x_n = 4^n + (-1)^n$임을 알 수 있다.

수험생 여러분이 가질 수 있는 궁금증은 크게 세 가지일 것이다. 첫 번째로 이러한 방법이 왜 일반항을 구할 수 있게 해주는 지가 궁금할 것이다. 하지만 필자는 이 책에서는 소개하지 않으려 한다. 말 그대로 궁금하면 인터넷에서 검색을 통해 찾을 수 있으므로 찾아보길 바란다. 하지만 왜 특성방정식의 근이 일반항에 $a_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_r\alpha_r^n$로 포함되는 지는 시험과 관련이 없을 것이라 필자는 확신한다. 두 번째는 만약 특성 방정식이 중근을 가지는 경우에는 어떻게 처리해야 하는 지가 궁금할 것이다. 만약 같은 근이 m개 라면 일반항은 다음과 같다.

$a_n = A_1\alpha_1^n + A_2 n\alpha_1^n + A_3 n^2\alpha_1^n + \cdots A_m n^{m-1}\alpha_1^n + A_{m+1}\alpha_2^n + A_{m+2}\alpha_3^n + \cdots + A_n\alpha_{n-m+1}^n$

그러므로 $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$와 같은 점화식의 일반항은 $x_n = A_1 2^n + A_2 n 2^n$이다.

마지막으로 세 번째로 시험에서 증명을 하지 않고 써도 되는 지가 궁금할 것인데, 물론 증명을

당연히 하고 써야 한다. 하지만 필자가 이 방법을 소개한 이유는 단순히 일반항을 구할 때에만 이 방법을 활용하라는 뜻에서였다. 그러므로 **일반적으로 이러한 선형점화식 문제가 나왔을 때에는 일반항을 특성방정식을 통해 구한 뒤, 풀이를 설명할 때에는 일반항이 성립한다는 사실만을 수학적 귀납법으로 보이면 된다.**

이제 본 문제의 풀이로 돌아가도록 하자.

피보나치 수열의 특성 방정식은 $x^2 = x + 1$이므로 두 근은 $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$과 $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$이다.

그러므로 $F_n = A_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + A_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$이다.

초기항 $F_1 = 1$과 $F_2 = 1$을 대입해서 A_1과 A_2를 구해보면 $A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$가 나온다.

그러므로 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$이 일반항이다.

(실제 시험장에서는 특성방정식을 활용해서 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$가 일반항임을 구한 뒤에 단순히 결과물인 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$만을 적고 수학적 귀납법으로 일반항을 제대로 구했다는 것만 증명해주면 된다.)

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})}{((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$을 얻는다.

[풀이-ii]

두 번째 풀이는 부동점을 활용하는 풀이다.

$\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = X_n$으로 정의하여 보자. 그러면 $X_{n+1} = \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \dfrac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}} = 1 + \dfrac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{X_n}$이 성립한다. 이제 함수 $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$으로 잡으면 $f(X_n) = X_{n+1}$이 성립함을 쉽게 확인할 수 있다.

$f(x) = x$를 만족하는 x를 α라고 하면 $\alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$이 성립한다. 여기서 임의의 자연수 n에 대해서 $X_n \geq 1$이므로 우리는 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$만을 활용하도록 하겠다. 이제 다음 식이 성립한다.

$$|X_{n+1} - \alpha| = \left|\frac{f(X_n) - f(\alpha)}{X_n - \alpha}\right| |X_n - \alpha| = \left|\frac{(1+\frac{1}{X_n}) - (1+\frac{1}{\alpha})}{X_n - \alpha}\right| |X_n - \alpha| = \left|\frac{1}{X_n \alpha}\right| |X_n - \alpha|$$

$$\leq \left|\frac{1}{\alpha}\right| |X_n - \alpha|$$

그러므로 $|X_{n+1} - \alpha| \leq \left|\dfrac{1}{\alpha}\right|^n |X_1 - \alpha|$ 가 성립하고, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \alpha$임을 알 수 있다.

참고 : 이 풀이는 $iv)$에서 소개한 평균값 정리를 활용하지 않았다. 하지만 평균값 정리를 활용해서도 풀 수 있다. 다만 이 경우는 평균값 정리를 제대로 활용하는 과정이 다른 문제에 비해 복잡하다. 아래에 그 풀이를 간략하게 소개하고자 한다.

우선 $\{X_n\}$이라는 수열에 대해 n에 따른 크기 비교를 하여 보면 다음과 같은 추측을 할 수 있다. 이러한 추측을 수학적 귀납법으로 증명해보도록 하자.

임의의 자연수 n에 대해서 $X_{2n-1} < X_{2n+1} < \alpha < X_{2n+2} < X_{2n}$가 성립한다.

$i)$ $n=1$인 경우 : 대입해보면 명백히 성립함을 알 수 있다.

$ii)$ $n=k$인 경우 성립함을 가정하고 $n=k+1$일 때 성립함을 보이도록 하자.

우선 $X_{2k+1} < \alpha < X_{2k+2}$가 성립함을 귀납 가정에 의해서 알고 있다.

이제 $X_{2k+3} - X_{2k+1} = 1 + \dfrac{1}{X_{2k+2}} - X_{2k+1} = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{X_{2k+1}}} - X_{2k+1} = \dfrac{X_{2k+1} + 1 - X_{2k+1}^2}{X_{2k+1}}$인데

$X_{2k+1} < \alpha$이므로 $X_{2k+1} + 1 - X_{2k+1}^2 > 0$이고 $X_{2k+3} > X_{2k+1}$이다.

비슷한 방법으로 $X_{2k+4} < X_{2k+2}$임을 보일 수 있다.

한편, $\alpha - X_{2k+3} = 1 + \dfrac{1}{\alpha} - (1 + \dfrac{1}{X_{2k+2}}) = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{X_{2k+2}} > 0$이고 $X_{2k+4} - \alpha = \dfrac{1}{X_{2k+3}} - \dfrac{1}{\alpha} > 0$이므로 $X_{2k+1} < X_{2k+3} < \alpha < X_{2k+4} < X_{2k+2}$가 성립함을 보였다.

그러므로 $i)$과 $ii)$ 그리고 수학적 귀납법에 의하여 위 명제가 성립한다.

이제 문제의 본 풀이로 돌아가도록 하자.

$|X_{n+1}-\alpha| = \left|\frac{f(X_n)-f(\alpha)}{X_n-\alpha}\right||X_n-\alpha| = |f'(c_n)||X_n-\alpha|$ 가 평균값 정리에 의해 성립한다.

그런데 $n \geq 2$에 대하여 X_n의 최솟값은 $X_3(<\alpha)$이므로 $n \geq 2$에 대하여 $c_n > X_3$이게 된다.

그러므로 $n \geq 2$에 대하여 $|X_{n+1}-\alpha| = \left|\frac{1}{c_n^2}\right||X_n-\alpha| < \left|\frac{1}{X_3^2}\right||X_n-\alpha|$ 가 성립하게 된다.

따라서, $|X_{n+1}-\alpha| < (\frac{1}{X_3^2})^{n-1}|X_2-\alpha|$ 가 성립하게 되고 $X_3 = \frac{3}{2}$이므로 $\lim_{n\to\infty} X_n = \alpha$임을 알 수 있다.

<u>이 풀이를 보면 알겠지만 가끔은 평균값 정리를 활용하여도 문제가 풀리지 않을 수 도 있다. 그럴 때에는 풀이에서 제시한 것처럼 식 변형을 통해서 융통성있게 해결해나가야 한다.</u>

[풀이$-iii$]

유계이론을 활용하여서 풀어보도록 하자.

마찬가지로 $\frac{F_{n+1}}{F_n} = X_n$로 정의하여보자. 그러면 **[풀이$-ii$]**의 참고에서 우리는 이미 임의의 자연수 n에 대해서 $X_{2n-1} < X_{2n+1} < \alpha < X_{2n+2} < X_{2n}$가 성립함을 알고 있다.

이제 $p_n = X_{2n}$으로 정의하고 $q_n = X_{2n-1}$로 정의하자.

그러면 p_n은 감소수열이고 하계로 α가 존재하는 수열이다. 반대로 q_n은 증가수열이고 상계로 α가 존재하는 수열이다. 그러므로 p_n과 q_n은 각각 극한값을 가지는 수렴하는 수열임을 유계이론에 의하여 알 수 있다.

p_n의 수렴값을 β라고 하고 q_n의 수렴값을 γ라고 하자.

그러면 $p_{n+1} = X_{2n+2} = 1 + \frac{1}{X_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{X_{2n}}} = \frac{2p_n + 1}{p_n + 1}$이 성립하고 마찬가지로 q_n에 대해서도 $q_{n+1} = \frac{2q_n + 1}{q_n + 1}$이 성립한다.

두 식에 대해서 양변에 극한을 취해주면 $\beta = \frac{2\beta + 1}{\beta + 1}$와 $\gamma = \frac{2\gamma + 1}{\gamma + 1}$가 각각 성립한다.

β와 γ가 당연히 0이상이므로 $\beta = \gamma = \alpha$임을 얻을 수 있다.

두 수열이 같은 값으로 수렴하므로 수열 X_n은 α로 수렴하게 된다.

따라서 $\lim_{n \to \infty} X_n = \alpha$이다.

기출문제 20(서울대 구술)

함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$일 때, 다음 물음에 답하여라.

1] 도함수 $f'(x)$의 최댓값을 구하여라.

2] 방정식 $f(x)=x$은 1개의 실수해만을 가짐을 보여라.

3] 점화식 $a_{n+1}=f(a_n)(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$이 주어져 있을 때, 수열 $\{a_n\}$은 초항 $a_1(0<a_1<1)$일 때, 수렴을 한다. 이 때, 극한값은 위의 방정식의 해가 됨을 보여라.

기출문제 21(2011년 서울대 특기자 의예과 및 수리통계학과 구술면접)

함수 $f(x)=xlnx$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

1] $f(x)$의 그래프 개형을 그리고 최솟값을 그래프에 표시하여라.

2] $x=1$에서 위 그래프의 접선을 구하고, 이를 이용하여서 $0<a<b$, $a+b>1$인 a, b에 대하여 $alna<blnb$임을 보여라.

3] $0<x<\dfrac{\pi}{4}$일 때, $(\sin x)^{\sin x}<(\cos x)^{\cos x}$임을 보여라.

기출문제 20의 풀이

1] 산술-기하 부등식에 의해서 $f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\dfrac{1}{2+e^x+e^{-x}}\le \dfrac{1}{4}$이 성립한다.

등호는 $e^x=e^{-x}$인 경우인 $x=0$일 때 성립한다. 그러므로 $x=0$일 때, $f'(x)$는 최대값 $\dfrac{1}{4}$을 가진다.

2] $g(x)=x-f(x)$라고 하면, 임의의 실수 x에 대하여 $g'(x)=1-f'(x)\ge 1-\dfrac{1}{4}>0$이 성립하게 된다. $g(0)=-\dfrac{1}{2}<0$이고 $g(1)=1-\dfrac{1}{1+e^{-1}}>0$이므로 그리고 $g'(x)>0$이므로 $g(x)=0$은 정확히 한 개의 실근을 가지게 된다. 그러므로 방정식 $f(x)=x$은 1개의 실수해만을 가진다.

3] 1]로부터 임의의 실수 x에 대하여 $0<f'(x)\le \dfrac{1}{4}$이 성립함을 알고 있다.

이제 2]에서 증명한 유일한 실수해를 α라고 하면 평균값 정리에 의해 다음이 성립한다.

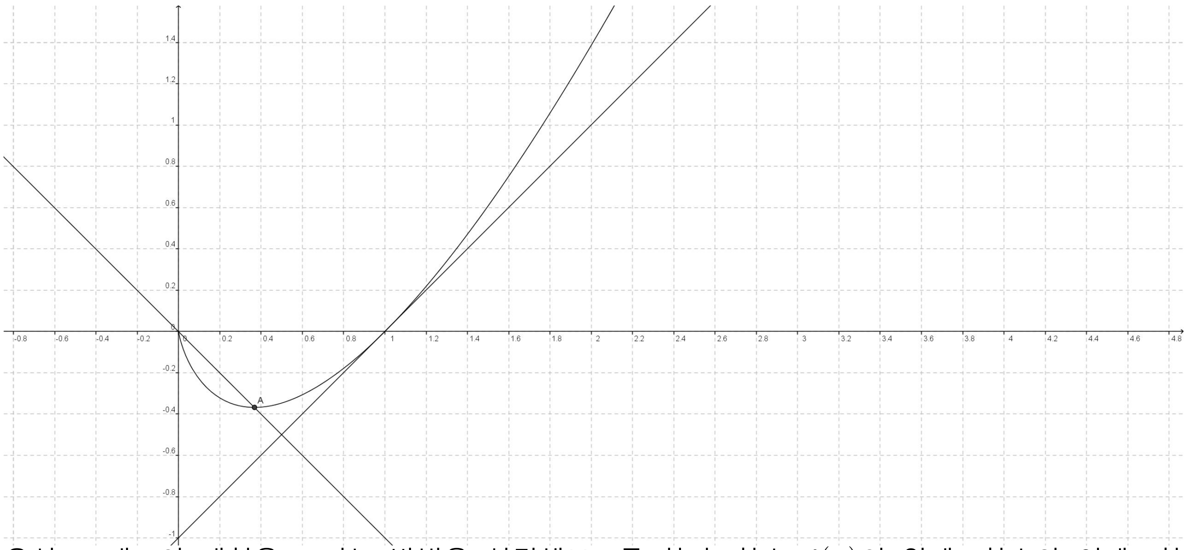
$$|a_{n+1}-\alpha|=|a_n-\alpha|\times\left|\frac{f(a_n)-f(\alpha)}{a_n-\alpha}\right|=|a_n-\alpha|\times f'(c_n)\le \frac{1}{4}|a_n-\alpha|$$

그러므로 이러한 방법을 반복 적용하면 $|a_{n+1}-\alpha|\le (\frac{1}{4})^n|a_1-\alpha|$을 얻는다.

따라서, 샌드위치 이론에 의하여 $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}-\alpha|=0$을 얻게 되고, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이다.

기출문제 21의 풀이

1] 그래프의 개형은 다음과 같고 최솟값은 점 A로 표현하였다.



우선, 그래프의 개형을 그리는 방법을 설명해보도록 하자. 함수 $f(x)$의 일계도함수와 이계도함수를 각각 구해보면 다음과 같다.

$f'(x) = 1 + \ln x$가 일계도함수이고 $f''(x) = \dfrac{1}{x}$가 이계도함수이다. 물론 함수 $f(x)$는 $x > 0$에서 정의되는 함수이므로 $f''(x) > 0$이고 그러므로 $f(x)$는 아래로 볼록한 함수이다. 뿐만 아니라, $f'(x)$는 $0 < x < \dfrac{1}{e}$에서는 감소함수이고, $x > \dfrac{1}{e}$부터는 증가함수가 되는 극소값을 $x = \dfrac{1}{e}$에서 가지는 함수이다. 자명하게 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$이고, $\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to\infty} -te^{-t} = 0$도 성립함을 확인할 수 있다. 그러므로 개형은 다음과 같고 최솟값은 $x = \dfrac{1}{e}$일 때 $-\dfrac{1}{e}$를 가짐을 확인할 수 있다.

2] $x = 1$에서의 접선의 기울기를 구하여보면 $f'(1) = 1 + \ln 1 = 1$이다. $x = 1$에서의 접선을 구하여보면 $y = x - 1$이다.

$i)$ $a > \dfrac{1}{e}$인 경우 : $x > \dfrac{1}{e}$에서 $f(x)$가 증가함수이므로 $f(a) < f(b)$이고, 따라서 $alna < blnb$이다.

$ii)$ $0 < a \leq \dfrac{1}{e}$인 경우 : $f(b) = blnb \geq b - 1 > -a \geq f(a) = alna$이므로 $alna < blnb$이다. 여기서 위 그래프를 보면 $0 < x < \dfrac{1}{e}$에서 $y = xlnx$가 $y = -x$ 아래에 위치해 있음에 주목하길 바란다. 따라서, $alna < blnb$이 항상 성립한다.

3] $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$에서 $0 < \sin x < \cos x$이고, $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\, sin(x + \dfrac{\pi}{4}) > \sqrt{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1$이다.

따라서 2]에 의해서 $\cos x ln(\cos x) > \sin x ln(\sin x)$이 성립하고 $\cos x^{\cos x} > \sin x^{\sin x}$이 증명된다.