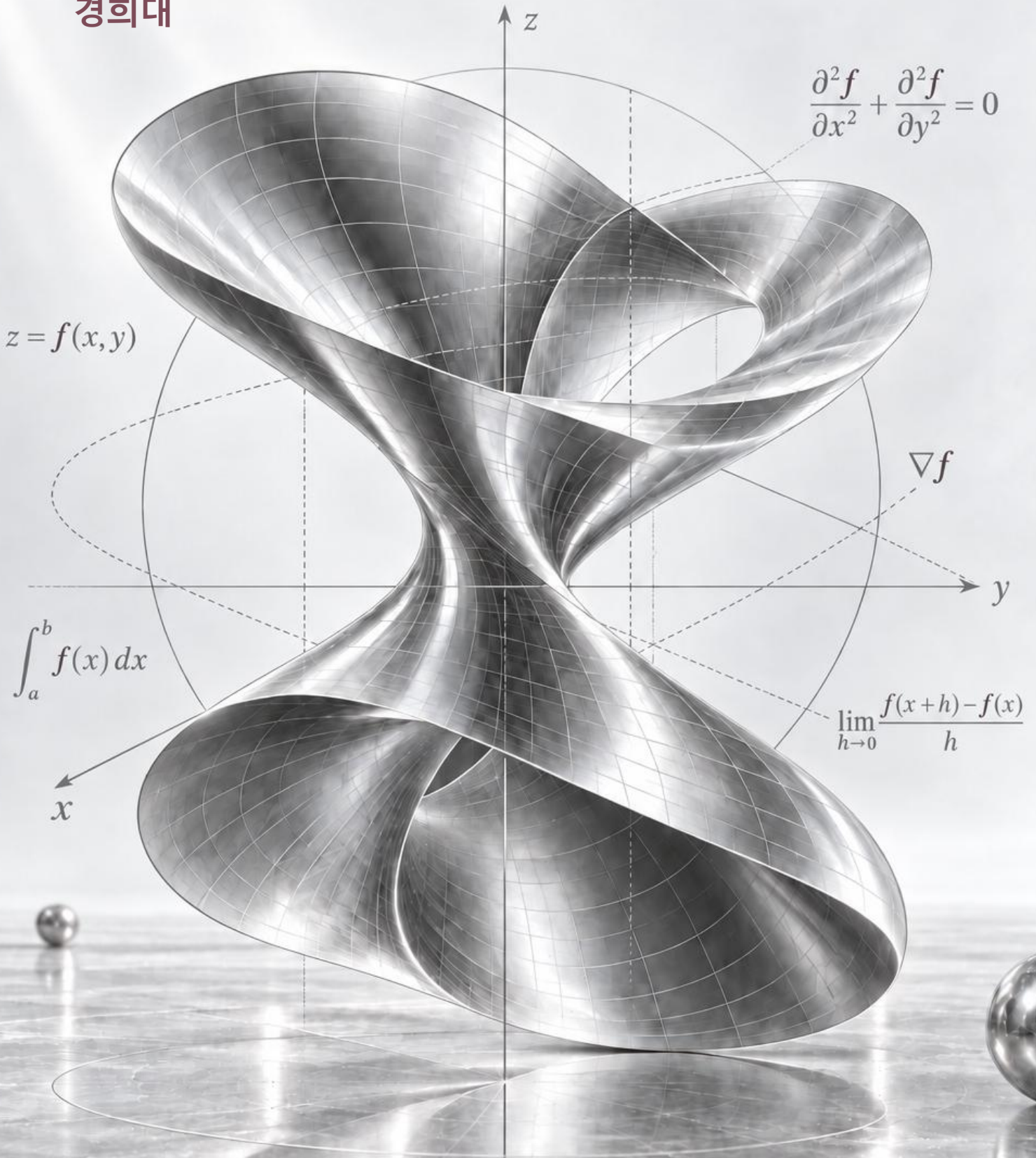


수리논술

경희대



은결T MATH

유형 3

매개변수와 운동의 미적분

유형을 알아보는 단서

점의 x 좌표와 y 좌표를 시간이나 각을 나타내는 문자 t 로 주고, 접선의 기울기·이동 거리·좌표의 극한을 묻는다. 이렇게 두 좌표를 함께 나타내는 문자를 매개변수라고 한다.

두 미분을 구별하기

$x'(t) \neq 0$ 일 때 접선의 기울기는 $y'(t)$ 를 $x'(t)$ 로 나눈 값이다. 한편 t 가 시간이라면 속력은 두 도함수의 제곱합에 제곱근을 취한 값이다. t 가 각처럼 다른 매개변수여도 같은 제곱근을 적분하면 곡선의 길이를 구할 수 있다.

복잡한 지수는 한 문자로

서로 역수인 거듭제곱이 보이면 한 문자로 치환한다. 원래 시각의 범위를 새 문자의 범위로 옮겨 근을 선택한다.

거리 적분 전에 정리하기

제곱합이 완전제곱인지 살핀다. 제곱근을 없앨 때에는 양수인 시각 범위를 근거로 부호를 확정한다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

시각 t , 자연수 n , 점의 x 좌표로 만든 수열을 구별해 표시한다. 접선 조건에서 구한 시각을 이동 거리의 적분 구간에 그대로 넣지 않는다.

유형 3 대표 문제

문제 3

2026 본시험 I

아래 답안 칸과 별도 용지에 먼저 풀어 본 뒤, 다음 쪽 해설과 비교해 보세요.

[가] $x=f(t), y=g(t)$ 가 t 에 대하여 미분가능하고, $f'(t) \neq 0$ 이면 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$ 이다.

[나] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x,y) 가 $x=f(t), y=g(t)$ 일 때, 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리 s 는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2} dt$$

[문제 I] 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x,y) 가 $x=\frac{4}{2n+1}t^{\frac{2n+1}{2}}-\frac{4}{2n+1}, y=\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}-\ln t-\frac{1}{2n+1}$ 일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $t \geq 1$)

(1) $\frac{dy}{dx}=n$ 이 되는 점 P의 x 좌표를 a_n 이라고 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 구하고, 그 근거를 논술하시오.

(15 점)

(2) 시각 $t=1$ 에서 $t=e^{\frac{1}{2n+1}}$ 까지 점 P가 움직인 거리를 l 이라고 하고, 시각 $t=e^{\frac{1}{2n+1}}$ 에서 점 P의 y 좌표를 m 이라고 하자. 이때 $\frac{l}{m}$ 을 구하고, 그 근거를 논술하시오. (15 점)

문제 3 접근과 공식 답안

풀이의 출발점

두 좌표를 시각으로 미분한다. 기울기는 도함수의 비, 속력은 두 도함수의 제곱합의 제곱근이다.

대학 공식 예시답안

문제 I-(1) x 와 y 를 t 에 대해서 미분하면 $x'(t) = 2t^{\frac{2n-1}{2}}$, $y'(t) = t^{2n} - \frac{1}{t}$ 이다.

따라서 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{2} \left(t^{\frac{2n+1}{2}} - t^{-\frac{2n+1}{2}} \right)$ 이다.

$u = t^{\frac{2n+1}{2}}$ 라고 하고, $\frac{dy}{dx} = n$ 일 때를 생각하면, $n = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right)$ 로부터, $u^2 - 2nu - 1 = 0$ 이다.

$u = n \pm \sqrt{n^2 + 1}$ 에서 $t \geq 1$ 이므로 $u = n + \sqrt{n^2 + 1}$ 을 얻는다.

따라서 이때 점 P의 x 좌표는 $a_n = \frac{4}{2n+1}u - \frac{4}{2n+1} = \frac{4}{2n+1}(n-1 + \sqrt{n^2+1})$

그러므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4(n-1)}{2n+1} + \frac{4\sqrt{n^2+1}}{2n+1} \right) = 2 + 2 = 4$

문제 I-(2) 점 P의 속력은 $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{4t^{2n-1} + t^{4n} - 2t^{2n-1} + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{\left(t^{2n} + \frac{1}{t}\right)^2} = t^{2n} + \frac{1}{t}$

$b = e^{\frac{1}{2n+1}}$ 이라고 할 때, 시각 $t=1$ 에서 시각 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$l = \int_1^b \left(t^{2n} + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2n+1} b^{2n+1} + \ln b - \frac{1}{2n+1} = \frac{e}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{e}{2n+1}$$

$t=b$ 일 때의 점 P의 y 좌표는 $m = \frac{1}{2n+1} b^{2n+1} - \ln b - \frac{1}{2n+1} = \frac{e-2}{2n+1}$ 이므로 $\frac{l}{m} = \frac{e}{e-2}$

문제 3 쉬운 추가 해설

기울기 조건을 수열로 바꾸기

(1) 시간에 대한 미분부터 계산한다

$$x'(t) = 2t^{(2n-1)/2}, y'(t) = t^{2n} - \frac{1}{t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (t^{(2n+1)/2} - t^{-(2n+1)/2})$$

서로 역수인 두 식을 한 문자로 나타낸다

$u=t$ 의 $(2n+1)/2$ 제곱으로 두면 $t \geq 1$ 에서 $u \geq 1$ 이다. 기울기가 n 이라는 조건을 이차방정식으로 바꾸고 허용되는 근을 택한다.

$$\frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) = n \Rightarrow u^2 - 2nu - 1 = 0$$

$$u = n + \sqrt{n^2 + 1}$$

원래의 x 좌표로 돌아온다

구해야 하는 수열의 항은 시각이나 u 의 값이 아니라 점 P 의 x 좌표이다. x 좌표를 나타내는 원래 식에 치환 결과를 대입한다.

$$a_n = \frac{4}{2n+1} (n - 1 + \sqrt{n^2 + 1})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$

극한을 계산할 때에는 분자와 분모를 n 으로 나누어 식을 정리한다. u 의 다른 근은 음수이므로 $u \geq 1$ 조건에 맞지 않는다.

문제 3 쉬운 추가 해설

속력의 식을 정리한 뒤 이동 거리를 적분한다

(2) 속력은 제곱합의 제곱근이다

$$v(t) = \sqrt{4t^{2n-1} + \left(t^{2n} - \frac{1}{t}\right)^2}$$

$$v(t) = \sqrt{\left(t^{2n} + \frac{1}{t}\right)^2} = t^{2n} + \frac{1}{t}$$

$t \geq 1$ 이므로 제곱근 안의 완전제곱에서 양의 값을 택한다. (1)의 기울기 n 인 시각을 이 문제의 끝 시각으로 가져오지 않는다.

문제에서 정한 끝 시각을 대입한다

$$b = e^{1/(2n+1)}, b^{2n+1} = e, \ln b = \frac{1}{2n+1}$$

$$l = \int_1^b \left(t^{2n} + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{e}{2n+1}$$

$$m = \frac{e-2}{2n+1}, \frac{l}{m} = \frac{e}{e-2}$$

어떤 결과를 공유했는가

두 소문항은 x 와 y 의 시간 미분을 공유한다. (1)은 그 비를 이용하고 (2)는 제곱합을 이용한다. “앞 문제의 결과를 이용한다”라는 막연한 문장 대신 실제로 가져온 두 도함수를 표시한다.

유형 3 채점과 복습

대학 공식 채점기준

하위 문항	채점 기준	배점	
논제 I -(1)	<6 점> $x'(t)$ 와 $y'(t)$ 를 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.	15	30
	<6 점> a_n 을 구한다.		
	<3 점> $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 구한다.		
논제 I -(2)	<6 점> 점 P의 속력을 구한다. <6 점> 거리 l 을 구한다. <3 점> $\frac{l}{m}$ 을 구한다.	15	

문제 3 공식 배점과 자가 점검

자가 점검

- 1. 기울기와 속력을 다른 식으로 썼는가?
- 2. 치환 후 $u \geq 1$ 조건을 적용했는가?
- 3. 적분 구간의 끝값은 문제에서 정한 시각인가?

연계 기출

2022 본시험 오후 I-IV / 2022 본시험 오전 II / 2023 본시험 오전 I