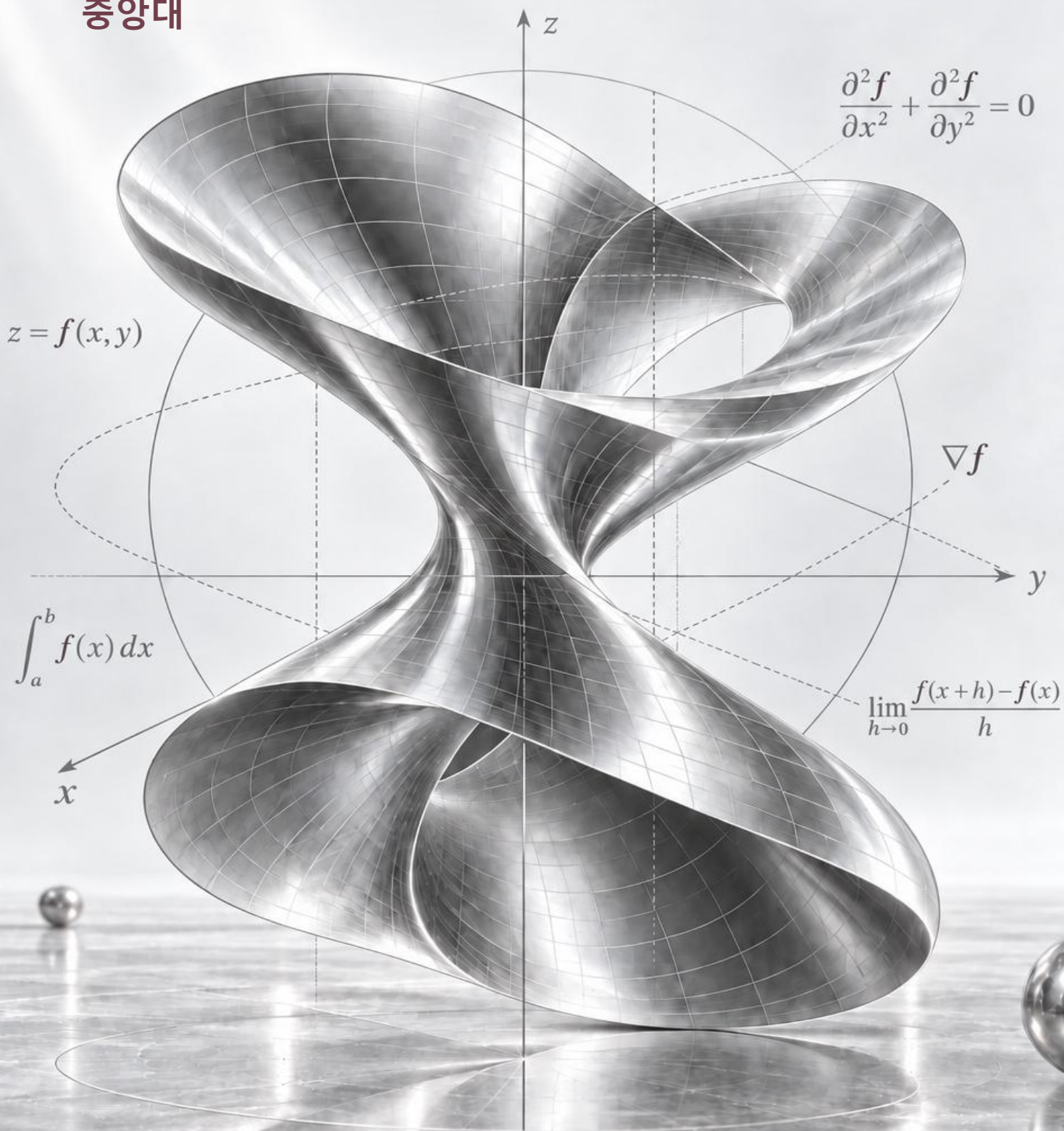


수리논술

중앙대



은결T MATH

차례

- 1 경우의 수와 확률의 조건 분류 — 대표 문제 1
- 2 점화식과 함수의 반복 관계 — 대표 문제 2
- 3 함수의 조건과 매개변수 결정 — 대표 문제 3
- 4 관계식의 미분과 정적분 — 대표 문제 4
- 5 접선과 교점의 조건 활용 — 대표 문제 5
- 6 함수와 도형의 최댓값 최솟값 — 대표 문제 6
- 7 이차곡선의 접선과 거리 관계 — 대표 문제 7
- 8 공간도형의 넓이 부피 이면각 — 대표 문제 8

유형 6 함수와 도형의 최댓값 최솟값

어떤 조건에서 쓰는가

주어진 범위 안에서 거리, 각도, 절댓값 또는 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이의 흐름

최댓값이나 최솟값을 구할 식과 변수의 범위를 먼저 적는다. 제곱, 치환, 미분으로 후보를 찾은 뒤 구간의 끝점과 비교하고, 부등식을 썼다면 등호가 성립하는지도 확인한다.

적용할 때 확인할 조건

이차곡선의 초점 성질과 접선 방정식이 핵심이면 7 유형, 공간 구조가 핵심이면 8 유형을 먼저 본다.

대표 문제에서 확인할 근거

거리의 제곱이나 로그함수의 증가 성질을 이용하면 식을 간단히 할 수 있다. 치환한 뒤에는 후보가 새 변수의 범위에 들어가는지 확인한다. 로그의 밑이 1 보다 작으면 대소관계가 반대가 된다는 점에 주의한다.

$u = x^2$ 이면 $u \geq 0$ 이다. 꼭짓점이 이 범위 밖으로 나가면 경계값이 최소가 될 수 있으므로 매개변수 구간을 나눈다.

대표 문제 6

2025 학년도 기출 자연계열Ⅱ [문제 3-2]

좌표평면 위의 점 $A(1, t), B(-1, t), P(x, 0)$ 이 있다. 실수 t ($t > 0$)에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$f(x) = \ln \overline{PA} + \ln \overline{PB}$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 할 때, 정적분 $\int_{\frac{1}{2}}^2 2tg(t) dt$ 의 값을

구하시오. [15 점]

풀이 및 보완

대표 문제 6 답안

대표 문제 6 풀이와 탐삭

접근의 이유

자연로그는 진수가 커질수록 값이 커지므로 두 거리의 곱이 최소일 때를 찾는다. $u = x^2$ 로 놓으면 $u \geq 0$ 인 이차함수의 최솟값 문제로 바뀐다. 꼭짓점이 이 범위에 있는지 확인한다.

대학 공식 예시답안

$\ln \overline{PA} + \ln \overline{PB} = \frac{1}{2} \ln (\overline{PA}^2 \overline{PB}^2)$ 이고 $\overline{PA}^2 \overline{PB}^2 = ((x-1)^2 + t^2)((x+1)^2 + t^2)$ 이다.

식을 정리하면 $(x^2 + 1 + t^2 + 2x)(x^2 + 1 + t^2 - 2x) = (x^2 + 1 + t^2)^2 - 4x^2 = (x^2 + t^2 - 1)^2 + 4t^2$ 이다.

$0 < t < 1$ 이면 $x = \pm\sqrt{1-t^2}$ 에서 최솟값 $g(t) = \ln(2t)$ 를 갖는다.

$t \geq 1$ 이면 $x = 0$ 에서 최솟값 $g(t) = \ln(t^2 + 1)$ 를 갖는다.

구하는 정적분은 $\int_{\frac{1}{2}}^2 2tg(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 2t \ln(2t) dt + \int_1^2 2t \ln(t^2 + 1) dt$ 이다.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 2t \ln(2t) dt = [t^2 \ln(2t)]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

이고

$\int_1^2 2t \ln(t^2 + 1) dt = 5 \ln 5 - 2 \ln 2 - 3$ 이다. 답은 $5 \ln 5 - \ln 2 - \frac{27}{8}$ 이다.

대학 공식 채점기준

공식 채점기준과 부분점수	자가 확인
$0 < t < 1$ 이면 $g(t) = \ln(2t)$ 를 구하면 +4 점	☐
$t \geq 1$ 이면 $g(t) = \ln(t^2 + 1)$ 를 구하면 +4 점	☐
$\int_{\frac{1}{2}}^1 2t \ln(2t) dt = \ln 2 - \frac{3}{8}$ 를 구하면 +4 점	☐
$\int_1^2 2t \ln(t^2 + 1) dt = 5\ln 5 - 2\ln 2 - 3$ 을 구하면 +3 점	☐
※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.	☐
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.	☐

단계별 자가 점검

단계	내 답안에서 찾을 근거	확인
1	로그의 진수 조건과 거리 곱으로의 변환	☐ 있음 ☐ 보완
2	매개변수의 범위에 따라 꼭짓점과 구간의 끝값을 비교한 결과	☐ 있음 ☐ 보완
3	구간별 최솟값 함수의 적분	☐ 있음 ☐ 보완

오류 미분해서 구한 값이 변수의 범위를 벗어나는데도 최솟값을 구하는 데 사용한다.

수정 최솟값이 되는 위치가 구간의 끝점과 만나는 매개변수 값을 구한다. 그 값을 기준으로

최솟값을 나타내는 함수와 적분 구간을 나눈다.

자기 채점: _____점 / 교사 확인: _____점