가톨릭대학교 의예

실제 문제 + 상세해설 맛보기

가톨릭대 의예 · 기본 01회 문제 1

문제 및 제시문: 원본 PDF 2-2쪽

Catholic_Medical_Basic_01_Q.pdf

상세해설: 원본 PDF 3-5쪽

Catholic_Medical_Basic_01_A.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

문제 1 (25점)

최고차항의 계수가 3인 삼차함수 f가 어떤 실수 α에 대하여 $f(f(\alpha)) = \alpha$를 만족한다. $p = \dfrac{\alpha + f(\alpha)}{2}$라 할 때

$$|\alpha - f(\alpha)| = 4, \qquad f(p) - p = 4, \qquad \int_p^{f(\alpha)} f(x)\,dx = 12$$

이다.

논제 1 가능한 α를 모두 구하고 그 근거를 논술하시오.

문제 1 (25점)

서로 바뀌는 두 점과 삼차함수의 평행이동

최고차항의 계수가 3인 삼차함수 f가 어떤 실수 α에 대하여 $f(f(\alpha)) = \alpha$를 만족한다. $p = \dfrac{\alpha + f(\alpha)}{2}$라 할 때

$$|\alpha - f(\alpha)| = 4, \qquad f(p) - p = 4, \qquad \int_p^{f(\alpha)} f(x)\,dx = 12$$

이다.

논제 1 가능한 α를 모두 구하고 그 근거를 논술하시오.

---

1. 두 점의 중점을 원점으로 옮깁니다

$\alpha, f(\alpha)$는 p에서 각각 2만큼 떨어진 두 값입니다. 합성 조건은 f가 이 두 값을 서로 바꾼다는 뜻입니다. $F(u) = f(p+u) - p$라 하면 경우의 방향과 관계없이

$$F(-2) = 2, \quad F(2) = -2, \quad F(0) = 4.$$

2. 삼차식의 계수를 세 조건으로 정합니다

$F(u) = 3u^3 + Au^2 + Bu + 4$라 놓으면

$$4A - 2B - 20 = 2, \qquad 4A + 2B + 28 = -2.$$

더하여 $A = -1$, 빼서 $B = -13$을 얻습니다. 따라서

$$F(u) = 3u^3 - u^2 - 13u + 4.$$

3. 적분의 위끝이 $p+2$인지 $p-2$인지 나눕니다

치환 $x = p + u$에서 $f(x) = p + F(u)$입니다. 필요한 두 적분은

$$\int_0^2 F(u)\,du = \left[\frac{3}{4}u^4 - \frac{1}{3}u^3 - \frac{13}{2}u^2 + 4u\right]_0^2 = -\frac{26}{3},$$

$$\int_0^{-2} F(u)\,du = -\frac{58}{3}.$$

첫째, $\alpha = p - 2, f(\alpha) = p + 2$이면

$$12 = 2p - \frac{26}{3}, \quad p = \frac{31}{3}, \quad \alpha = \frac{25}{3}.$$

둘째, $\alpha = p + 2, f(\alpha) = p - 2$이면

$$12 = -2p - \frac{58}{3}, \quad p = -\frac{47}{3}, \quad \alpha = -\frac{41}{3}.$$

4. 각 값이 실제로 가능한지 확인합니다

각 p에 대해 $f(x) = p + F(x-p)$로 정의하면 최고차항의 계수는 3이고, $F(-2) = 2, F(2) = -2, F(0) = 4$ 때문에 합성 조건과 거리 조건이 모두 성립합니다. 위에서 각각 적분까지 확인했으므로 두 값 모두 가능합니다.

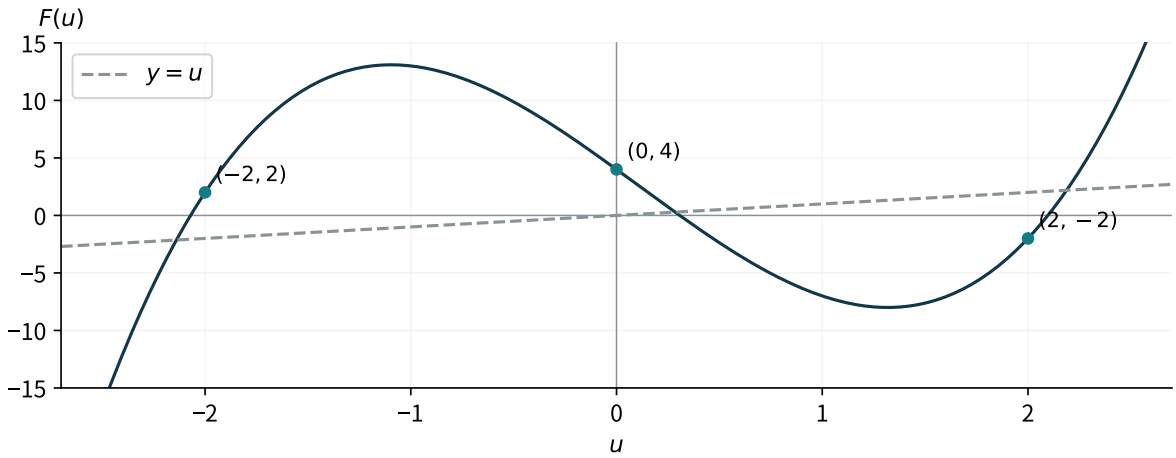
여기서 놓치기 쉬운 것

적분의 위끝이 아래끝보다 작을 수 있습니다. $p-2$까지 적분하는 경우를 넓이처럼 양수로 바꾸면 두 번째 해를 놓칩니다. 평행이동에서는 함수의 값에서도 p를 빼야 두 점이 원점에 대해 대칭이 됩니다.

둘째 방향의 적분은 직접 대입하면

$$\int_0^{-2} F(u)\,du = 12 + \frac{8}{3} - 26 - 8 = -\frac{58}{3}.$$

이때 상수 p의 적분 역시 $\int_0^{-2} p\,du = -2p$입니다. 두 항의 부호를 함께 바꾸어야 합니다. α의 두 후보는 같은 함수에서 동시에 발생할 필요가 없으며, 문제는 조건을 만족하는 함수와 실수의 가능한 모든 경우를 묻습니다. 각 p로 별도의 함수를 구성하면 충분합니다.



중점으로 평행이동하면 두 점의 좌표가 서로 뒤바뀌는 모습이 드러납니다.

논술 답안으로 정리하면

$F(u) = f(p+u) - p$로 놓으면 $F(-2) = 2, F(2) = -2, F(0) = 4$이므로 $F = 3u^3 - u^2 - 13u + 4$이다. $f(\alpha) = p + 2$와 $p - 2$를 나누어 적분 조건에 대입하면 각각 $\alpha = \dfrac{25}{3}, -\dfrac{41}{3}$을 얻고, 이 두 값은 모든 조건을 만족한다.

결론

$$\alpha \in \left\{ -\frac{41}{3}, \frac{25}{3} \right\}$$

연습용 채점 기준

정답만 적은 답안보다 근거를 연결한 답안에 점수를 부여합니다. 아래는 이 모의고사의 연습용 기준입니다.

평가 내용	배점
합성 조건을 두 값의 교환으로 해석	5점
중점에 대한 가로·세로 평행이동	5점
삼차식 세 계수를 정확히 결정	5점
적분 위끝의 두 방향을 구분	5점
각 후보 함수를 구성하여 충분성 확인	5점
합계	25점