

숙명여자대학교 약학부

실제 문제 + 상세해설 맛보기

숙명여대 약학 · 제1회 문제 1 전체

문제 및 제시문: 원본 PDF 2-2쪽

BlueMath_Sookmyung_2027_Pharmacy_01_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 3-5쪽

BlueMath_Sookmyung_2027_Pharmacy_01_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

문제 1

30점

다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> 양수 u, v 에 대하여 $u + v \geq 2\sqrt{uv}$ 이다.

<나> 닫힌구간에서 연속인 두 함수의 대소 관계를 적분하면 정적분의 대소 관계를 얻을 수 있다.

<다> $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ 이다.

[1-1] · 15점

실수 $s > -2$ 에 대하여

$$h_s(x) = \frac{x^2}{x^4 + sx^2 + 1} \quad (x > 0)$$

로 정의한다. 모든 양수 x 에 대해 $h_s(x) \leq M(s)$ 가 성립하도록 하는 가장 작은 상수 $M(s)$ 를 구하시오. 등호가 성립하는 x 도 구하고, $\int_1^3 h_s(x) dx < 2M(s)$ 임을 증명하시오.

[1-2] · 15점

도함수와 함수의 증가·감소를 이용하여 $0 < u \leq 1$ 일 때

$$u - \frac{u^3}{6} < \sin u < u$$

임을 증명하시오. 이를 이용하여 다음 부등식을 증명하시오.

$$\frac{23}{16} < \int_1^2 x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx < \frac{3}{2}$$

[1-1] 상세해설

15점

1. 정의한 함수의 분모가 양수인지 확인합니다 $x > 0$ 에서

$$x^4 + sx^2 + 1 = x^2 \left(x^2 + s + \frac{1}{x^2} \right).$$

$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ 이고 $s > -2$ 이므로 괄호 안은 $s + 2 > 0$ 이상입니다. 따라서 분모는 항상 양수이고, 함수는 양의 실수 전체에서 잘 정의됩니다.

2. 모든 x 에서 성립하는 부등식과 등호 성립 지점을 찾습니다

$$h_s(x) = \frac{1}{x^2 + s + \frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{s + 2}.$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$, 즉 $x = 1$ 에서만 성립합니다. 실제로 $h_s(1) = \frac{1}{s + 2}$ 이므로 이 상수보다 작은 수는 모든 함수값을 놓아 줄 수 없습니다. 따라서 가장 작은 상수는 $M(s) = \frac{1}{s + 2}$ 입니다.

3. 점별 등호와 적분의 등호를 구별합니다

$1 < x \leq 3$ 에서는 $h_s(x) < M(s)$ 이고 두 함수는 연속입니다. 따라서

$$\int_1^3 h_s(x) dx < \int_1^3 M(s) dx = 2M(s).$$

정답 $M(s) = \frac{1}{s + 2}$; $x = 1$ 에서만 등호가 성립하고 적분에서는 등호가 성립하지 않습니다.

수리논술 모범답안

$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ 와 $s > -2$ 에 의해 분모가 양수이고

$$h_s(x) = \frac{1}{x^2 + s + \frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{s + 2}.$$

등호는 $x = 1$ 에서만 성립하며 $h_s(1) = \frac{1}{s + 2}$ 이다. 따라서 가장 작은 상수는 $M(s) = \frac{1}{s + 2}$ 이다. $1 < x \leq 3$ 에서 엄밀한 부등식이 성립하고 함수들이 연속이므로 $\int_1^3 h_s(x) dx < 2M(s)$ 이다.

채점 기준 · 15점

평가 내용	배점
분모의 양수 조건 확인	3
산술평균과 기하평균의 관계로 부등식 유도	4
등호가 실제로 성립하여 가장 작은 상수임을 설명	4
적분의 엄밀한 부등식 증명	4

빠르게 정리하는 방법

$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2$ 로 정리하면 등호 조건까지 한 번에 보입니다.

[1-2] 상세해설

15점

세제공 항이 보이더라도 고등학교 밖의 전개 공식을 쓸 필요가 없습니다. 비교할 함수의 도함수를 한 단계씩 연결하면 됩니다.

1. 먼저 $\sin u < u$ 를 증명합니다

$A(u) = u - \sin u$ 로 놓으면 $A(0) = 0$ 입니다. $0 < u \leq 1$ 에서 $\cos u < 1$ 이므로

$$A'(u) = 1 - \cos u > 0.$$

따라서 $A(u) > 0$, 즉 $\sin u < u$ 입니다.

2. 코사인함수의 비교를 한 단계 거칩니다

$B(u) = \cos u - 1 + \frac{u^2}{2}$ 로 놓으면 $B(0) = 0$ 이고

$$B'(u) = u - \sin u = A(u) > 0 \quad (0 < u \leq 1).$$

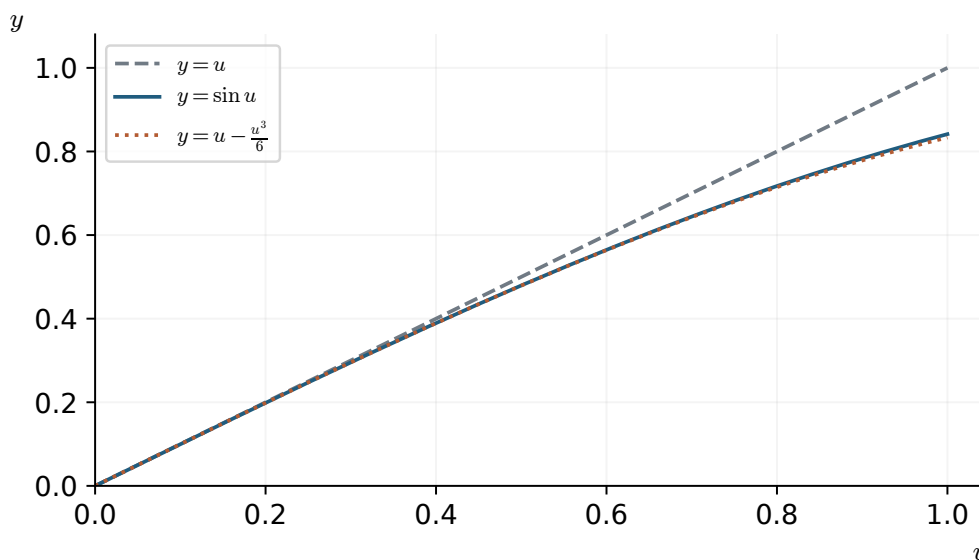
따라서 $B(u) > 0$ 입니다.

3. 사인함수의 아래쪽 비교를 완성합니다

$C(u) = \sin u - u + \frac{u^3}{6}$ 로 놓으면 $C(0) = 0$ 이고

$$C'(u) = \cos u - 1 + \frac{u^2}{2} = B(u) > 0.$$

따라서 $C(u) > 0$, 즉 $\sin u > u - \frac{u^3}{6}$ 입니다.



도함수로 증명한 두 비교식. 아래쪽 곡선과 사인함수의 차이는 작지만 $u > 0$ 에서 양수입니다.

4. $u = \frac{1}{x^2}$ 를 대입하고 양수를 곱합니다

$1 \leq x \leq 2$ 이면 $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$ 이므로 위 부등식을 적용할 수 있습니다.

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{6x^6} < \sin \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^2}.$$

양수 x^3 을 곱하면

$$x - \frac{1}{6x^3} < x^3 \sin \frac{1}{x^2} < x.$$

5. 비교 함수들의 적분을 정확히 계산합니다

$$\int_1^2 x \, dx = \frac{3}{2}, \quad \int_1^2 \frac{1}{6x^3} \, dx = \left[-\frac{1}{12x^2} \right]_1^2 = \frac{1}{16}.$$

따라서 아래쪽 적분은 $\frac{3}{2} - \frac{1}{16} = \frac{23}{16}$ 입니다.

정답 $\frac{23}{16} < \int_1^2 x^3 \sin \frac{1}{x^2} \, dx < \frac{3}{2}.$

수리논술 모범답안

$A(u) = u - \sin u, B(u) = \cos u - 1 + \frac{u^2}{2}, C(u) = \sin u - u + \frac{u^3}{6}$ 로 놓는다. 세 함수는 0에서 0이고, $0 < u \leq 1$ 에서 $A'(u) = 1 - \cos u > 0, B'(u) = A(u) > 0, C'(u) = B(u) > 0$ 이다. 따라서 $u - \frac{u^3}{6} < \sin u < u$ 이다. $u = \frac{1}{x^2}$ 를 대입하고 x^3 을 곱한 뒤 $[1, 2]$ 에서 적분하면

$$\int_1^2 \left(x - \frac{1}{6x^3} \right) \, dx < \int_1^2 x^3 \sin \frac{1}{x^2} \, dx < \int_1^2 x \, dx.$$

양끝의 값은 각각 $\frac{23}{16}, \frac{3}{2}$ 이므로 성립한다.

채점 기준 · 15점

평가 내용	배점
세 함수의 초깃값과 도함수 관계로 부등식 증명	7
대입 범위와 양수 곱 확인	3
비교 함수의 적분값 계산	3
엄밀한 부등호와 최종 결론	2

답안에서 빠뜨리면 안 되는 부분

$\{u - \sin u\}'$ 는 $1 - \cos u$ 입니다. 부호를 반대로 쓰면 증가성의 근거가 틀립니다. 또한 세 함수 모두 0에서의 값을 확인해야 증명이 이어집니다.