BlueMath | 최민구

경희대학교 의약계 수학

실제 문제 + 상세해설 맛보기

의약학계 수학 기본 1회 논제 Ⅰ : 유리함수의 해집합 길이와 급수

문제 및 제시문: 개별 교재 PDF 2쪽

BlueMath_Kyunghee_Medical_Math_Basic_6Rounds_Questions.pdf

상세해설: 개별 교재 PDF 2-3쪽

BlueMath_Kyunghee_Medical_Math_Basic_6Rounds_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 교정본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

2027 Blue Math FINAL

의약학계 수학 · 제1회 60점

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

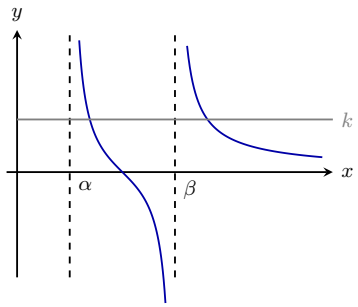
[가] $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$이다.
[나] 도함수가 음수인 구간에서 함수는 감소한다.
[다] $|r| < 1$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$이다.
[라] $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$이다. 두 독립 시행의 사건 확률은 각 확률의 곱이다.

[논제 Ⅰ] [배점 27점]

양수 p, q가 $p^2 > 4q$, $p - q < 1$, $p < 2$를 만족한다. $x^2 - px + q = 0$의 두 근을 $\alpha < \beta$라 하고 자연수 n에 대해

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n}{x - \alpha} + \frac{\beta^n}{x - \beta}$$

로 정한다. 단, $x \neq \alpha, \beta$이다.



(1) $f_n''(x) = 0$의 해 a_n을 구하고 $\alpha < a_n < \beta$를 보인 뒤 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구하여 그 근거를 논술하시오. **(12점)**

(2) $k > 0$일 때 $f_n(x) > k$인 구간들의 길이 총합을 L_n이라 한다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$의 수렴을 보이고 그 합을 p, q, k에 관한 식으로 나타내어 그 근거를 논술하시오. **(15점)**

의약학계 수학 · 제1회 · 논제 Ⅰ

유리함수의 해집합 길이와 급수

먼저 두 근의 범위를 확정합니다

두 근은 양수입니다. 실제로 합 $p>0$, 곱 $q>0$이므로 같은 부호의 두 근은 모두 양수입니다. $g(1)=1-p+q>0$이며 축은 $\frac{p}{2}<1$입니다. 두 근이 모두 1보다 크면 축도 1보다 커야 하고, 1이 두 근 사이이면 $g(1)<0$이어야 합니다. 둘 다 불가능하므로 $0<\alpha<\beta<1$입니다.

(1) 세제곱근을 취할 때 부호를 함께 봅니다

$$f_n''(x)=2\left\{\frac{\alpha^n}{(x-\alpha)^3}+\frac{\beta^n}{(x-\beta)^3}\right\}.$$

$x<\alpha$에서는 두 항이 음수, $x>\beta$에서는 두 항이 양수이므로 해는 중간 구간에서만 가능합니다. $r_n=(\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{n}{3}}$로 두면 조건은 $\frac{a_n-\alpha}{\beta-a_n}=r_n$입니다. 따라서

$$a_n=\frac{\alpha+\beta r_n}{1+r_n},\quad a_n-\alpha=\frac{(\beta-\alpha)r_n}{1+r_n}>0,\quad \beta-a_n=\frac{\beta-\alpha}{1+r_n}>0.$$

$0<\frac{\alpha}{\beta}<1$이므로 $r_n\to 0$이고 $\boxed{\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha}$입니다.

(2) 교점을 각각 구하지 말고 합을 구합니다

$f_n'(x)<0$이고, 중간 구간에서는 $+\infty$에서 $-\infty$로, 오른쪽 구간에서는 $+\infty$에서 0으로 감소합니다. 따라서 $f_n=k$의 해는 $u_n\in(\alpha,\beta)$와 $v_n>\beta$에 하나씩 존재하고, 해집합은 $(\alpha,u_n)\cup(\beta,v_n)$입니다. 두 교점은

$$kx^2-\{k(\alpha+\beta)+\alpha^n+\beta^n\}x+k\alpha\beta+\alpha^n\beta+\alpha\beta^n=0$$

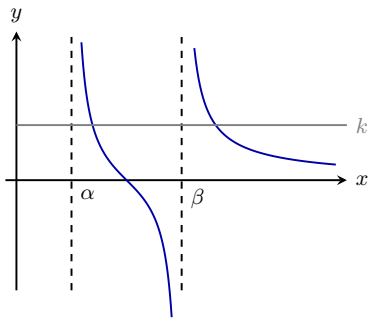
의 근이므로 근과 계수의 관계에서 $u_n+v_n=\alpha+\beta+\frac{\alpha^n+\beta^n}{k}$입니다. 따라서 $L_n=\frac{\alpha^n+\beta^n}{k}$이고 두 등비급수는 모두 수렴하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}L_n=\frac{1}{k}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\beta}\right)=\boxed{\frac{p-2q}{k(1-p+q)}}.$$

의약학계 수학 · 제1회 · 논제 Ⅰ · 답안 작성과 채점

제출용 모범답안

근의 합·곱, $g(1)>0$, 축 $\frac{p}{2}<1$로 $0<\alpha<\beta<1$이다. $r_n=(\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{n}{3}}$라 하면 $f_n''=0$에서 $a_n=\frac{\alpha+\beta r_n}{1+r_n}$이다. $a_n-\alpha=\dfrac{(\beta-\alpha)r_n}{1+r_n}>0$, $\beta-a_n=\dfrac{\beta-\alpha}{1+r_n}>0$이므로 $\alpha<a_n<\beta$이고 $r_n\to 0$에서 $a_n\to\alpha$이다. 도함수와 끝점 극한에서 $f_n=k$의 교점은 중간·오른쪽 구간에 하나씩 있다. 두 교점의 근과 계수의 관계를 이용하면 $L_n=\frac{\alpha^n+\beta^n}{k}$이다. 따라서 등비급수의 합을 정리하여 $\frac{p-2q}{k(1-p+q)}$를 얻는다.



숏컷과 검산

길이의 합은 교점 좌표의 합에서 점근선 좌표의 합을 뺀 값입니다. 근을 따로 풀지 않고 근과 계수의 관계를 쓰는 것이 가장 빠릅니다.

Blue Math 연습용 채점기준

소문항	평가할 풀이의 근거	점수
(1)	이계도함수 및 해 계산	4
(1)	근의 범위와 a_n의 위치	4
(1)	극한	4
(2)	구간별 감소·교점이 구간마다 하나임	5
(2)	해집합과 길이 총합	5
(2)	급수의 수렴과 합	5

답만 쓴 경우 해당 계산 결과의 점수만 인정하며, 같은 정당한 논리를 다른 방법으로 제시한 답안도 인정합니다. 소문항 배점은 공식 2027 모의와 같고, 세부 채점 항목은 본 변형 문항에 맞게 작성했습니다.

출제 연계 메모

경희대 2027학년도 모의 의약학계 논제 I / 제공 합본 1쪽. 원문 재조판. 공식 예시답안의 근 범위 부등식 오기도 바로잡음.