

건국대학교 자연계 수학

실제 문제 + 상세해설 맛보기

건국대 자연 · 기본 FINAL 01 문제 1

문제 및 제시문: 원본 PDF 2-2쪽

03_Basic_R01_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 3-5쪽

03_Basic_R01_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

문제 1

20점

제시문 1

(가) $b > 0, b \neq 1$ 일 때 $b^x = N$ 을 만족시키는 실수 x 를 $\log_b N$ 으로 나타낸다.

$$(b > 1) \quad k \leq \log_b N < k + 1 \iff b^k \leq N < b^{k+1}.$$

(나) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 m 항까지의 합은 $\sum_{n=1}^m a_n$ 으로 나타낸다.

[문제 1]

자연수 n 에 대하여 정수 a_n 이

$$\log_3 n - 1 < a_n \leq \log_3 n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{100} 10^{-a_n}$ 의 값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

풀이 과정은 뒤의 답안지에 작성하십시오.

문제 1 로그 조건과 구간별 수열의 합

20점

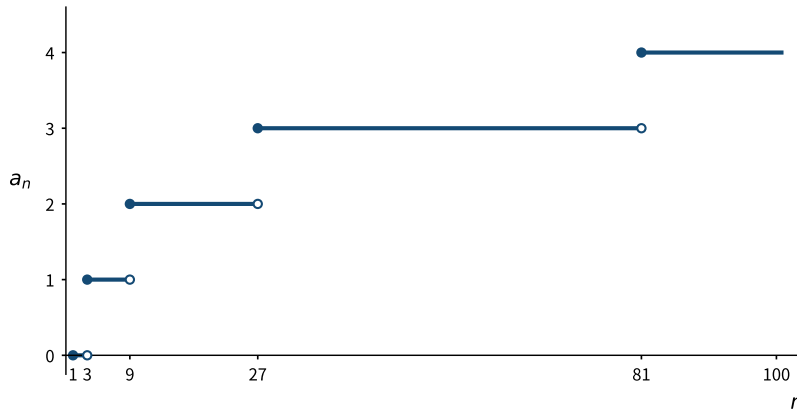
출처·변형: 건국대 2027학년도 모의논술 자연 문제 1. 첨부 합본 PDF 1쪽. 수치와 조건을 유지한 기출·모의 재조판.

먼저 잡아야 할 생각

먼저 정수인 a_n 이 어떤 구간에서 같은 값을 갖는지 확인합니다. 로그를 일일이 계산할 필요가 없습니다. n 이 3의 거듭제곱을 지날 때에만 a_n 이 바뀝니다.

조건을 읽고 풀이를 시작하는 과정

구하는 것은 $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ 이 아니라 $10^{-a_1} + \dots + 10^{-a_{100}}$ 입니다. 따라서 먼저 a_n 이 같은 항들을 모아야 합니다. 정수 a_n 을 정하는 부등식의 폭은 정확히 1이고 한쪽 끝만 포함하므로, 각 자연수 n 에서 a_n 은 하나로 결정됩니다. a_n 의 값을 고정한 뒤 n 의 범위를 찾는 순서로 읽으십시오.



그림에서 확인할 내용

가로축은 항 번호 n , 세로축은 정수 a_n 입니다. 채운 점은 해당 끝점을 포함하고 빈 점은 포함하지 않는다는 뜻입니다. $n = 3, 9, 27, 81$ 에서는 바로 위 구간의 값으로 바뀝니다. 계단의 높이를 더하는 것이 아니라 각 구간의 항 개수에 10^{-a_n} 을 곱합니다.

1. 정수 조건을 n 의 범위로 바꾸기

주어진 부등식을 a_n 을 기준으로 정리하면

$$a_n \leq \log_3 n < a_n + 1$$

입니다. 밑 3은 1보다 크므로 지수함수가 증가합니다. 따라서 $a_n = k$ 인 조건은 정확히

$$3^k \leq n < 3^{k+1}$$

입니다. 왼쪽 끝은 포함하고 오른쪽 끝은 포함하지 않는다는 점이 중요합니다. 예를 들어 $n = 3$ 일 때에는 $a_3 = 1$ 이고, $a_3 = 0$ 으로 분류하면 안 됩니다.

2. 마지막 구간까지 빠짐없이 세기

a_n	n 의 범위	항의 개수	10^{-a_n}
0	$1 \leq n \leq 2$	2	1
1	$3 \leq n \leq 8$	6	$\frac{1}{10}$
2	$9 \leq n \leq 26$	18	$\frac{1}{100}$
3	$27 \leq n \leq 80$	54	$\frac{1}{1000}$
4	$81 \leq n \leq 100$	20	$\frac{1}{10000}$

항의 개수는 $2 + 6 + 18 + 54 + 20 = 100$ 입니다. 이 확인을 해 두면 구간의 끝점을 하나씩 빠뜨린 실수를 발견할 수 있습니다.

3. 각 구간의 합 더하기

같은 구간에서는 더하는 값이 일정하므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100} 10^{-a_n} &= 2 + \frac{6}{10} + \frac{18}{100} + \frac{54}{1000} + \frac{20}{10000} \\ &= \frac{2000 + 600 + 180 + 54 + 2}{1000} = \boxed{\frac{709}{250}}.\end{aligned}$$

이 문제에서 중요한 것은 최종 계산보다 로그 조건을 지수 조건으로 바꾸고, 각 구간의 정수 개수를 정확히 세는 과정입니다.

정수 부등식과 경계값을 직접 대입하여 확인

$0 \leq \log_3 n < 1$ 인 경우에는 정수 0만 $\log_3 n - 1 < a_n \leq \log_3 n$ 을 만족합니다. 같은 이유로 $k \leq \log_3 n < k+1$ 인 경우에는 $a_n = k$ 하나만 가능합니다. 예를 들어 경계값에서는

n	$\log_3 n$ 의 범위	a_n	확인할 점
2	$0 < \log_3 2 < 1$	0	첫 구간의 마지막 항
3	$\log_3 3 = 1$	1	$a_n > 0$ 이므로 0 제외
8	$1 < \log_3 8 < 2$	1	둘째 구간의 마지막 항
9	$\log_3 9 = 2$	2	새로운 구간의 첫 항

포함된 정수의 개수는 “마지막 수 - 첫 수 + 1”입니다. 예를 들어 9, 10, ..., 26의 개수는 $26 - 9 + 1 = 18$ 이지 17이 아닙니다. 마지막 구간도 $100 - 81 + 1 = 20$ 입니다. 계산 결과를 소수로 확인하면 $2 + 0.6 + 0.18 + 0.054 + 0.002 = 2.836$ 이고, $\frac{709}{250} = 2.836$ 입니다. 이 대입은 구간 분류를 대신하는 풀이가 아니라 분류와 분수 계산이 일치하는지 확인하는 계산입니다.

짧게 푸는 방법

완전한 구간의 항 개수는 $3^{k+1} - 3^k = 2 \cdot 3^k$ 입니다. 마지막 구간 전까지는

$$2 \sum_{k=0}^3 \left(\frac{3}{10}\right)^k$$

로 한꺼번에 계산하고, 마지막 $20 \cdot 10^{-4}$ 만 따로 더할 수도 있습니다.

수리논술 모범답안

$a_n = k$ 이면 $k \leq \log_3 n < k+1$ 이므로 $3^k \leq n < 3^{k+1}$ 이다. $1 \leq n \leq 100$ 에서 $a_n = 0, 1, 2, 3, 4$ 인 항의 개수는 각각 2, 6, 18, 54, 20이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{100} 10^{-a_n} = 2 + \frac{6}{10} + \frac{18}{100} + \frac{54}{1000} + \frac{20}{10000} = \boxed{\frac{709}{250}}.$$

연습용 채점기준

평가 요소	배점
로그 부등식을 $3^k \leq n < 3^{k+1}$ 로 변환	6점
다섯 구간과 개수를 정확히 분류	8점
가중 합 계산과 최종 결론	6점
합계	20점

감점에 주의할 부분

$81 \leq n \leq 100$ 은 20개입니다. 마지막 구간을 완전한 등비 구간으로 취급하지 마십시오. 정답만 쓰고 구간 분류를 생략하면 핵심 논리가 드러나지 않습니다.