

고려대학교 서울 수학

실제 문제 + 상세해설 맛보기

핵심유형 CORE 01 큰 원 주위를 둘러싼 작은 원

문제 및 제시문: 원본 PDF 4-4쪽

Korea_Seoul_01_Core_01_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 3-4쪽

Korea_Seoul_01_Core_02_Solutions_Corrected.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

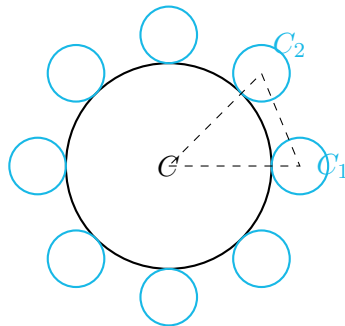
전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

기하+극한

반지름이 1인 원 C 의 바깥쪽에 반지름이 모두 a 인 원 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 을 한 겹으로 배치한다. 각 C_i 는 원 C 와 접하고, C_i 와 C_{i+1} 도 서로 접한다($i = 1, \dots, n-1$). 또한 C_n 과 C_1 도 접한다.

- (1) a 와 n 사이의 관계를 구하시오.
- (2) $a < 1$ 을 만족하는 자연수 n 의 범위를 구하시오.
- (3) $C_1, \dots, C_n$ 의 둘레의 합을 $L(n)$ 이라 할 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} L(n)$ 을 구하시오.



답안 작성

CORE 01 큰 원 주위를 둘러싼 작은 원

2011 모의 · 논제 1 (1)-(3)

기하+극한

필수 개념

인접한 작은 원의 중심과 큰 원의 중심을 연결하면 꼭짓점이 중심인 정 n 각형이 생깁니다. 중심각은 $2\pi/n$ 이고, 이등변삼각형을 반으로 나누면 직각삼각형에서 반지름 a 를 읽을 수 있습니다. 마지막 극한은 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 을 사용합니다.

핵심 발상

반각 직각삼각형 하나만 정확히 잡으면 a 와 n 의 관계, $a < 1$, 둘레 합의 극한이 연속해서 풀립니다.

1. 반지름과 개수의 관계

큰 원 중심을 O , 인접한 작은 원 중심을 P, Q 라 하자. $OP = OQ = 1 + a$, $PQ = 2a$, $\angle POQ = 2\pi/n$ 이다. 이등변삼각형을 반으로 나누면

$$\frac{a}{1+a} = \sin \frac{\pi}{n}.$$

따라서

$$a = \frac{\sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}.$$

2. $a < 1$ 의 정수 조건

$n \geq 3$ 에서 $0 < \pi/n \leq \pi/3$ 이므로 사인의 단조성을 쓸 수 있다.

$$a < 1 \iff \sin \frac{\pi}{n} < \frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{6} \iff n > 6.$$

따라서 $n \geq 7$ 이다. 3. 둘레 합의 극한

$$L(n) = n \cdot 2\pi a = \frac{2\pi n \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}.$$

$n \sin(\pi/n) = \pi \cdot \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \rightarrow \pi$ 이고 분모는 1로 가므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(n) = 2\pi^2.$$

실전 샷컷

$n \sin(\pi/n)$ 을 보는 순간 $\pi \cdot \frac{\sin u}{u}$ 로 바꾸면 됩니다. 작은 원 둘레의 합이 큰 원 둘레 2π 로 가는 것이 아니라 $2\pi^2$ 로 간다는 점이 함정입니다.

수리논술 모범답안

$\frac{a}{1+a} = \sin(\pi/n)$ 이므로 $a = \frac{\sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}$ 이다. 또한 $a < 1 \iff \sin(\pi/n) < 1/2 \iff n > 6$ 이므로 $n \geq 7$.
마지막으로 $L(n) = \frac{2\pi n \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)} \rightarrow 2\pi^2$.

채점기준표 · 학습용 10점

단계	확인 요소	배점
1	중심각과 반각 관계를 세운다.	3점
2	$a < 1$ 을 정수 n 의 범위로 바꾼다.	4점
3	표준 삼각함수 극한으로 둘레 합을 계산한다.	3점

Blue Math 교재 연계

직접: 압축개념 Lecture 04 두 변수/삼각함수 극한의 기하 해석(문제 4-1, 4-4).

간접: Lecture 03 함수극한(문제 3-1 3-7).

보완: 기하 본교재의 평면기하·거리·각 관계.