BlueMath | 최민구

고려대학교 서울 수학

실제 문제 + 상세해설 맛보기

핵심유형 CORE 01 큰 원 주위를 둘러싼 작은 원

문제 및 제시문: 개별 교재 PDF 4쪽

Korea_Seoul_01_Core_01_Questions.pdf

상세해설: 개별 교재 PDF 3-4쪽

Korea_Seoul_01_Core_02_Solutions_Corrected.pdf

판매 통합본에 포함된 교정본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

CORE 01 큰 원 주위를 둘러싼 작은 원

기하+극한

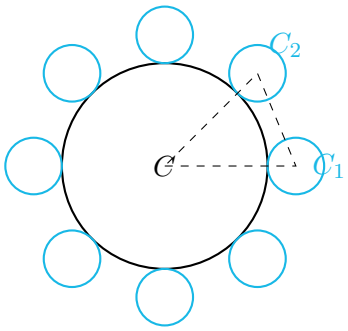
2011학년도 고려대학교 모의 · 논제 1 (1),(2),(3)

반지름이 1인 원 C의 바깥쪽에 반지름이 모두 a인 원 $C_1, C_2, \ldots, C_n$을 한 겹으로 배치한다. 각 C_i는 원 C와 접하고, C_i와 C_{i+1}도 서로 접한다($i = 1, \ldots, n-1$). 또한 C_n과 C_1도 접한다.

(1) a와 n 사이의 관계를 구하시오.

(2) $a < 1$을 만족하는 자연수 n의 범위를 구하시오.

(3) $C_1, \ldots, C_n$의 둘레의 합을 $L(n)$이라 할 때 $\lim_{n\to\infty} L(n)$을 구하시오.



답안 작성

CORE 01 큰 원 주위를 둘러싼 작은 원

2011 모의 · 논제 1 (1)-(3)

기하+극한

필수 개념

인접한 작은 원의 중심과 큰 원의 중심을 연결하면 꼭짓점이 중심인 정n각형이 생깁니다. 중심각은 $\frac{2\pi}{n}$ 이고, 이등변삼각형을 반으로 나누면 직각삼각형에서 반지름 a를 읽을 수 있습니다. 마지막 극한은 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$을 사용합니다.

핵심 발상

반각 직각삼각형 하나만 정확히 잡으면 a와 n의 관계, $a<1$, 둘레 합의 극한이 연속해서 풀립니다.

1. 반지름과 개수의 관계

큰 원 중심을 O, 인접한 작은 원 중심을 P, Q라 하자. $OP=OQ=1+a$, $PQ=2a$, $\angle POQ=\frac{2\pi}{n}$ 이다. 이등변삼각형을 반으로 나누면

$$\frac{a}{1+a}=\sin\frac{\pi}{n}.$$

따라서

$$\boxed{a=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}}.$$

2. $a<1$의 정수 조건

$n\geq 3$에서 $0<\frac{\pi}{n}\leq\frac{\pi}{3}$ 이므로 사인의 단조성을 쓸 수 있다.

$$a<1 \iff \sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{n}<\frac{\pi}{6} \iff n>6.$$

따라서 $\boxed{n\geq 7}$이다. **3. 둘레 합의 극한**

$$L(n)=n\cdot 2\pi a=\frac{2\pi n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

$n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=\pi\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\to\pi$이고 분모는 1로 가므로

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}L(n)=2\pi^2}.$$

실전 숏컷

$n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$을 보는 순간 $\pi\cdot\frac{\sin u}{u}$로 바꾸면 됩니다. 작은 원 둘레의 합이 큰 원 둘레 2π로 가는 것이 아니라 $2\pi^2$로 간다는 점이 함정입니다.

수리논술 모범답안

$\frac{a}{1+a}=\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$이므로 $a=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$이다. 또한 $a<1 \iff \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)<\frac{1}{2} \iff n>6$이므로 $n\geq 7$.
마지막으로 $L(n)=\frac{2\pi n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\to 2\pi^2$.

채점기준표 · 학습용 10점

단계	확인 요소	배점
1	중심각과 반각 관계를 세운다.	3점
2	$a<1$을 정수 n의 범위로 바꾼다.	4점
3	표준 삼각함수 극한으로 둘레 합을 계산한다.	3점

Blue Math 교재 연계

직접: 압축개념 Lecture 04 두 변수/삼각함수 극한의 기하 해석(문제 4-1, 4-4).
간접: Lecture 03 함수극한(문제 3-1 3-7).
보완: 기하 본교재의 평면기하·거리·각 관계.