BlueMath | 최민구

세종대학교 자연계

실제 문제 + 상세해설 맛보기

세종대 자연 · K01 포물선·원의 접선·단면

문제 및 제시문: 개별 교재 PDF 3쪽

BlueMath_Sejong_2027_Core12_Questions.pdf

상세해설: 개별 교재 PDF 3-4쪽

BlueMath_Sejong_2027_Core12_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 교정본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

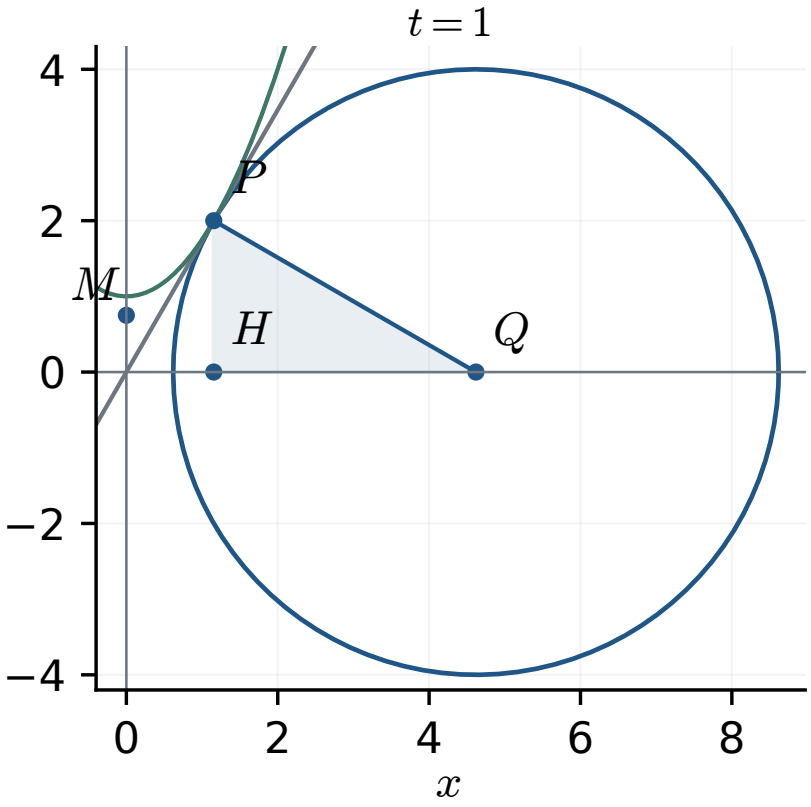
전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

K01 · 포물선의 접점·원의 접선·단면의 넓이

기출 재조판 · 2027학년도 모의논술 자연계 문제 1 · 제공 합본 1쪽

양의 실수 a, t에 대하여 곡선 $y = ax^2 + t$가 직선 $y = \sqrt{3}x$에 점 P에서 접한다. 이때 $a = g(t)$라 하자. 원 C는 P에서 같은 직선에 접하고 중심 Q는 양의 x축 위에 있다.



(1) Q의 좌표를 t의 식으로 나타내시오.

(2) $M(0, g(t))$에서 원 C에 그은 접선의 길이를 $\ell(t)$라 할 때, $\ell'(t)$와 $\lim_{t\to\infty} \ell'(t)$를 구하시오.

(3) P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 PQH를 밑면으로 하고 x축에 수직인 단면이 항상 정삼각형인 입체도형의 부피를 구하시오.

풀이 공간

K01 · 포물선의 접점·원의 접선·단면의 넓이

기출 재조판 · 2027학년도 모의논술 자연계 문제 1 · 제공 합본 1쪽

정답

(1) $Q\left(\dfrac{8\sqrt{3}}{3}t, 0\right)$

(2) $\ell'(t) = \dfrac{\frac{16}{3}t - \frac{9}{16t^3}}{\sqrt{\frac{16}{3}t^2 + \frac{9}{16t^2}}}$, 극한 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

(3) $2t^3$

문제를 읽는 순서

접점 P를 먼저 정하고, 수직인 반지름으로 Q를 찾습니다. 부피는 단면 넓이의 정적분입니다.

1) 단계별 상세해설

접한다는 것은 이차방정식 $ax^2 - \sqrt{3}x + t = 0$이 중근을 갖는다는 뜻이다. 판별식에서 $3 - 4at = 0$이므로

$$g(t) = \frac{3}{4t}, \qquad P\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}, 2t\right).$$

반지름 PQ는 접선에 수직이므로 기울기가 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$이다. $Q = (q, 0)$를 대입하면

$$\frac{2t}{\frac{2t}{\sqrt{3}} - q} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad q = \frac{8t}{\sqrt{3}}.$$

또한 $PQ = 4t$이다. 중심의 위치를 접점의 x좌표와 혼동하면 이후 접선 길이도 틀린다.

2) 단계별 상세해설

접점까지의 반지름과 접선이 직각을 이루므로 피타고라스 정리를 적용한다.

$$\ell(t)^2 = MQ^2 - PQ^2 = \frac{16}{3}t^2 + \frac{9}{16t^2} > 0.$$

따라서 M은 모든 $t > 0$에서 원 밖에 있다. 양변을 미분하면 정답의 도함수를 얻는다. 극한은 분자·분모를 각각 t로 나누어

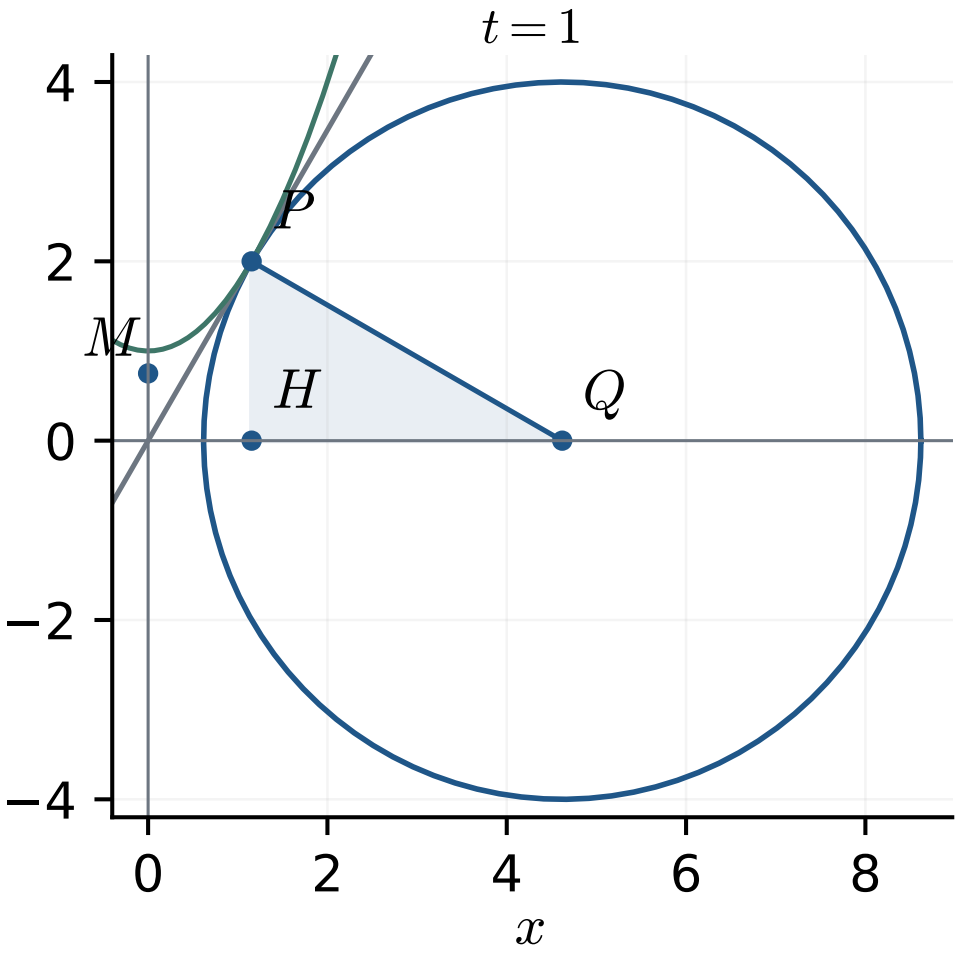
$$\ell'(t) = \frac{\frac{16}{3} - \frac{9}{16t^4}}{\sqrt{\frac{16}{3} + \frac{9}{16t^4}}} \longrightarrow \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

3) 단계별 상세해설

단면의 정삼각형 한 변은 삼각형 밑면을 자른 선분의 길이이다. 직선 PQ의 식은 $y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{8}{3}t$이고, 절단 위치는 $\frac{2t}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{8t}{\sqrt{3}}$이다. 따라서

$$V = \int_{\frac{2t}{\sqrt{3}}}^{\frac{8t}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{8}{3}t\right)^2 dx.$$

$u = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{8}{3}t$로 치환하면 $dx = -\sqrt{3}\,du$이고 u는 $2t$에서 0으로 변한다. 그러므로 $V = \frac{3}{4}\int_0^{2t} u^2 du = 2t^3$이다.



숏컷 부피는 단면 넓이가 높이의 제곱에 비례한다는 점을 이용한다. 밑면의 수평 길이는 $2\sqrt{3}t$, 최대 단면 넓이는 $\sqrt{3}t^2$이므로 부피는 두 값의 곱의 $\frac{1}{3}$이다. 이 비율은 $\int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$에서 나온다.

답안에서 주의할 점 단면의 한 변은 PQ 전체 길이가 아니다. 적분의 아래끝·위끝과 치환 후 방향을 함께 바꿔야 한다.

논술 모범답안

접선 조건에서 $a = \frac{3}{4t}$이고 $P = (\frac{2t}{\sqrt{3}}, 2t)$이다. PQ의 기울기가 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $Q = (\frac{8t}{\sqrt{3}}, 0)$, $PQ = 4t$이다. 따라서 $\ell^2 = \frac{16}{3}t^2 + \frac{9}{16t^2}$이며 이를 미분하여 도함수와 극한을 얻는다. 단면 넓이 $\frac{\sqrt{3}}{4}(-\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{8}{3}t)^2$를 정해진 구간에서 적분하면 $V = 2t^3$이다.