BlueMath | 최민구

세종대학교 자유전공 수리

실제 문제 + 상세해설 맛보기

세종대 자유전공 수리 · 제1회 기본 연결 전체

문제 및 제시문: 개별 교재 PDF 1쪽

BlueMath_Sejong_Free_Math_Mock01_Questions_20261022.pdf

상세해설: 개별 교재 PDF 1-3쪽

BlueMath_Sejong_Free_Math_Mock01_Solutions_20261022.pdf

판매 통합본에 포함된 교정본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

세종대학교 자유전공 수리영역 실전모의

제1회 기본 연결 · 문제편

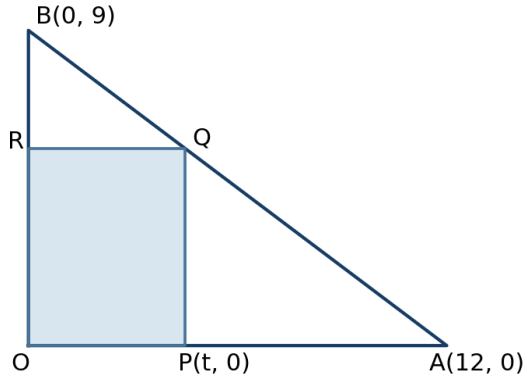
수리영역 전용 · 인문영역 미포함 · 대학 공식 문항이 아닌 신규 제작 학습자료

권장 50분 · 1대문항 3소문항 · 학습용 100점

전체 고사시간은 인문 포함 120분입니다. 위 시간과 배점은 수리 연습용 자체 기준이며 공식 수리 배정시간이나 배점이 아닙니다.

삼각형 안 직사각형의 넓이와 겹침

좌표평면 위의 세 점 O(0, 0), A(12, 0), B(0, 9)를 생각하자. $0 < t < 12$일 때 P(t, 0)를 지나고 y축에 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 Q라 하고, Q를 지나고 x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 R라 하자. 직사각형 OPQR가 차지하는 영역을 D(t), 그 넓이를 S(t)라 한다. 모든 영역은 경계를 포함한다.



(1) [학습용 25점]

S(t)를 t에 관한 식으로 나타내고, 그 최댓값과 이때의 t를 구하시오.

(2) [학습용 30점]

$S(t) = 24$를 만족하는 서로 다른 두 실수를 t_1, t_2 ($t_1 < t_2$)라 하자. 두 영역 $D(t_1)$, $D(t_2)$의 공통부분의 넓이와 합집합의 넓이를 각각 구하시오.

(3) [학습용 45점]

2 이상의 자연수 n에 대하여 다음과 같이 T_n과 U_n을 정의한다. T_n은 각 직사각형의 넓이를 모두 더한 값이고, U_n은 이 직사각형들의 합집합의 넓이이다.

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} S\left(\frac{12k}{n}\right)$$

T_n과 U_n을 각각 n에 관한 식으로 나타내고, $T_n = 5U_n$을 만족하는 n을 구하시오. 합집합의 넓이를 구할 때 겹친 부분을 중복하여 세지 않는 이유를 설명하시오.

세종대학교 자유전공 수리영역 실전모의

제1회 기본 연결 · 상세해설 (1)

수리영역 전용 · 인문영역 미포함 · 대학 공식 문항이 아닌 신규 제작 학습자료

조건을 길이와 넓이로 바꾸기

직선 AB는 두 절편이 12와 9이므로 방정식이 $y = 9 - \frac{3x}{4}$ 이다. 따라서 Q의 y좌표, 즉 직사각형의 높이는 $9 - \frac{3t}{4}$ 이고 밑변의 길이는 t이다. $0 < t < 12$에서는 두 길이가 모두 양수이다.

$$S(t) = t\left(9 - \frac{3}{4}t\right) = -\frac{3}{4}(t-6)^2 + 27$$

제곱은 항상 0 이상이므로 $S(t) \le 27$이다. 등호는 $t = 6$일 때 성립하고, 6은 주어진 범위 안에 있다. 따라서 최댓값은 27이다.

도함수를 이용한 별도 확인

$$S'(t) = 9 - \frac{3}{2}t$$

$0 < t < 6$에서 도함수가 양수이고, $6 < t < 12$에서 음수이다. 증가하다가 감소하므로 $t = 6$에서 최댓값을 갖는다. 두 풀이 모두 경계가 아닌 허용된 t에서 최댓값이 실제로 얻어짐을 확인한다.

학습용 채점 기준

직선 AB와 높이 표현 10점, 넓이 함수 5점, 최댓값의 근거와 $t = 6$ · 최댓값 27을 함께 제시 10점. 총 25점.

놓치기 쉬운 점

AB의 길이 15를 직사각형의 높이로 사용하지 않는다. 높이는 t에 따라 변하며 Q의 y좌표로 정한다.

세종대학교 자유전공 수리영역 실전모의

제1회 기본 연결 · 상세해설 (2)

수리영역 전용 · 인문영역 미포함 · 대학 공식 문항이 아닌 신규 제작 학습자료

같은 넓이를 갖는 두 직사각형

$$9t-\frac{3}{4}t^2=24 \iff t^2-12t+32=0 \iff (t-4)(t-8)=0$$

따라서 $t_1=4$, $t_2=8$이다. D(4)의 가로·세로 길이는 4와 6이고, D(8)의 가로·세로 길이는 8과 3이다. 두 영역은 원점을 왼쪽 아래 꼭짓점으로 공유한다.

D(4)는 $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 6$인 점들의 영역이고, D(8)은 $0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 3$인 점들의 영역이다.

두 영역에 동시에 속하려면 $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$이어야 한다. 그러므로 공통부분의 넓이는 $4 \times 3 = 12$이다. 두 직사각형의 넓이를 더하면 공통부분을 두 번 세게 되므로 이를 한 번 빼야 한다.

따라서 공통부분의 넓이는 12이고, 합집합의 넓이는 $24 + 24 - 12 = 36$이다.

독립적인 도형 확인

합집합을 가로 길이 4인 두 세로 띠로 나누면, 첫 번째 띠의 높이는 6이고 두 번째 띠의 높이는 3이다. 따라서 합집합 넓이는 $4 \times 6 + 4 \times 3 = 36$으로 다시 확인된다.

학습용 채점 기준

$t_1=4$, $t_2=8$ 결정 10점, 공통부분의 정확한 범위와 넓이 10점, 중복을 제거한 합집합 넓이 10점. 총 30점.

세종대학교 자유전공 수리영역 실전모의

제1회 기본 연결 · 상세해설 (3)

수리영역 전용 · 인문영역 미포함 · 대학 공식 문항이 아닌 신규 제작 학습자료

합과 합집합을 구별하기

k번째 직사각형의 가로 길이는 $\frac{12k}{n}$, 세로 길이는 $9\left(1-\frac{k}{n}\right)$이다. 따라서 다음과 같다.

$$S\left(\frac{12k}{n}\right)=\frac{108k(n-k)}{n^2}$$

$$T_n=\frac{108}{n^2}\left(n\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right)=\frac{18(n^2-1)}{n}$$

합집합은 폭이 $\frac{12}{n}$ 인 세로 띠들로 나눈다. $(k-1)\frac{12}{n}<x\le\frac{12k}{n}$ 인 띠를 덮는 직사각형은 번호가 k 이상인 것들이다. 번호가 커질수록 높이가 작아지므로, 이 띠에서 합집합의 최고 높이는 k번째 직사각형의 높이 $9\left(1-\frac{k}{n}\right)$이다. 마지막 띠에서는 높이가 0이다. 경계선의 넓이는 0이므로 경계의 포함 여부는 넓이에 영향을 주지 않는다.

$$U_n=\frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n-1}9\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{54(n-1)}{n}$$

$n\ge2$이므로 $U_n>0$이다. 따라서 $T_n=5U_n$을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{T_n}{U_n}=\frac{n+1}{3}=5\quad\Longrightarrow\quad n=14$$

검산하면 $T_{14}=\frac{1755}{7}$, $U_{14}=\frac{351}{7}$ 이므로 실제로 $T_{14}=5U_{14}$이다.

학습용 채점 기준

T_n의 합 계산 15점, 세로 띠의 높이와 중복 제거 설명 15점, U_n 계산 10점, $n=14$와 조건 확인 5점. 총 45점.