

이화여자대학교 자연 I · II 공통

실제 문제 + 상세해설 맛보기

이화여대 자연 I · II 공통 · CORE01 함수 비교

문제 및 제시문: 원본 PDF 4-4쪽

Ewha_Core18_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 5-6쪽

Ewha_Core18_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

CORE01 삼차함수와 사인함수의 비교

출처: 2026학년도 이화여대 수시 자연 I 문제 1

복원 · 수정 기록: 함수 종류의 오기를 삼차함수로 바로잡았습니다.

$g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ 이다. 삼차함수 f 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하고, $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ 이다.

(1) $f(x)$ 를 구하시오.

(2) $1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ 임을 보이시오.

(3) $f'(c) = g'(c)$ 를 만족하는 $c \in (0, 1)$ 이 유일함을 보이시오.

(4) $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 임을 보이시오.

답안 작성

CORE01 삼차함수와 사인함수의 비교

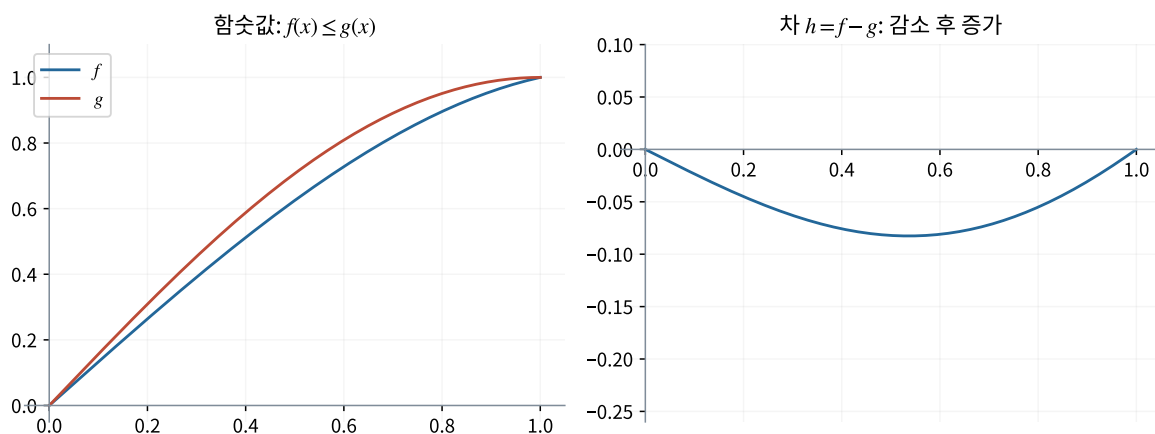
출처: 2026학년도 이화여대 수시 자연 I 문제 1

복원 · 수정 기록: 함수 종류의 오기를 삼차함수로 바로잡았습니다.

1. 홀함수 조건으로 계수를 줄입니다

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라 하면 $f(-x) = -f(x)$ 에서 $b = d = 0$ 입니다. $g(1) = 1$, $g(2) = 0$ 이므로 $a + c = 1$, $8a + 2c = 0$ 입니다. 따라서

$$f(x) = \frac{-x^3 + 4x}{3}.$$



2. 사인함수 부등식을 더 넓은 구간에서 증명합니다

뒤 소문항에도 쓰기 위해 $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ 전체에서 증명합니다. $L(z) = \sin z - \frac{2z}{\pi}$ 라 두면

$$L'(z) = \cos z - \frac{2}{\pi}, \quad L''(z) = -\sin z < 0 \quad \left(0 < z < \frac{\pi}{2}\right).$$

L' 는 엄격히 감소하며 $L'(0) > 0$, $L'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ 이므로 영점이 하나입니다. L 은 그 점까지 증가하고 그 뒤 감소합니다. 양 끝값 $L(0) = L\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 이므로 구간 안에서는 $L(z) \geq 0$ 입니다. 요구 구간 $1 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ 는 이 구간의 일부이므로 같은 결론이 성립합니다.

3. 도함수 차이가 증가함을 보입니다

$h = f - g$ 라 두면 $f' = g'$ 는 $h' = 0$ 과 같습니다.

$$h'(x) = \frac{4-3x^2}{3} - \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad h''(x) = -2x + \frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

$0 < x < 1$ 에서 2단계의 부등식에 $z = \frac{\pi x}{2}$ 를 넣으면 $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \geq x$ 입니다. 따라서

$$h''(x) \geq \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)x > 0.$$

즉 h' 는 엄격히 증가합니다. 또한 $h'(0) = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} < 0$, $h'(1) = \frac{1}{3} > 0$ 입니다. 연속함수의 중간값 정리로 영점 c 가 존재하며, 엄격히 증가하므로 유일합니다.

4. 끝값과 증감 방향을 함께 씁니다

$h(0) = h(1) = 0$ 이고, h' 의 부호는 c 왼쪽에서 음수, 오른쪽에서 양수입니다.

x	0	c	1
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	0 ↘	최솟값	↗ 0

그러므로 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $h(x) \leq 0$, 즉 $f(x) \leq g(x)$ 입니다.

서술 점검 2단계에서 구간을 넓혀 증명했기 때문에 3단계의 $0 < \frac{\pi x}{2} < \frac{\pi}{2}$ 에도 적용할 수 있습니다. 그래프만 보고 대소 관계나 교점의 유일성을 판단하지 않습니다.