

동국대학교 자연계

실제 문제 + 상세해설 맛보기

동국대 · 핵심유형 F01 피보나치 수열의 항의 비와 황금비

문제 및 제시문: 원본 PDF 4-4쪽

Dongguk_Core12_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 5-6쪽

Dongguk_Core12_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

F01 학습용 10점**피보나치수열의 항의 비와 황금비**

2010학년도 동국대학교 수시 [2]

피보나치수열 $\{b_n\}$ 은 $b_1 = b_2 = 1$ 이고 $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ ($n \geq 1$)으로 정의된다. 이 점화식을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 을 구하는 방법을 서술하시오.

풀이 및 답안

최종 결론

답을 낸 뒤 정의역·부호·끝점·등호 조건을 확인하세요.

F01 학습용 10점

피보나치수열의 항의 비와 황금비

2010학년도 동국대학교 수시 [2]

문제의 조건

피보나치수열 $\{b_n\}$ 은 $b_1 = b_2 = 1$ 이고 $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ ($n \geq 1$)으로 정의된다. 이 점화식을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 을 구하는 방법을 서술하시오.

풀이의 출발점

항 자체는 계속 커지지만, 이웃한 두 항의 비는 일정한 값에 가까워질 수 있습니다. 비의 극한을 구하려면 먼저 비에 대한 점화식을 만들고, 마지막에는 실제로 수렴한다는 근거까지 써야 합니다.

1. 항의 비를 하나의 수열로 잡습니다

모든 b_n 은 양수이므로 $r_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 으로 놓을 수 있습니다.

$$r_{n+1} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{b_{n+1} + b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{1}{r_n}, \quad r_1 = 1.$$

$1 \leq r_n \leq 2$ 이면 $\frac{3}{2} \leq r_{n+1} \leq 2$ 입니다. $r_1 = 1$ 에서 시작하여 모든 n 에 대해 $1 \leq r_n \leq 2$ 가 성립합니다.

2. 극한이 될 수 있는 값을 찾습니다

항의 극한을 L 이라 생각하면 $L = 1 + \frac{1}{L}$ 을 만족해야 합니다. 따라서

$$L^2 - L - 1 = 0, \quad L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

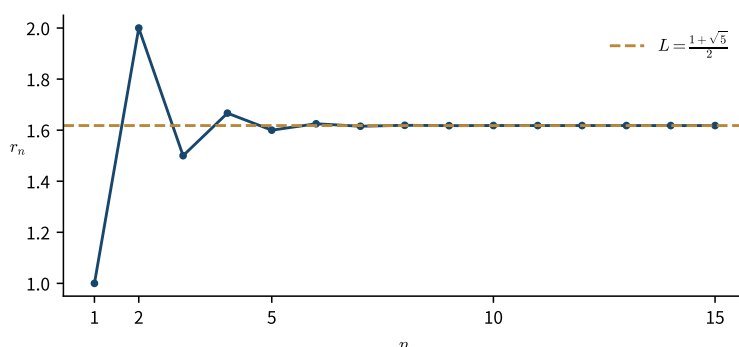
음의 해는 양수인 항의 비의 극한이 될 수 없습니다. 다만 이 계산만으로 수렴이 증명된 것은 아닙니다.

3. 그 값과의 차이가 0으로 가는지 확인합니다

앞에서 구한 양수 L 에 대해 $L = 1 + \frac{1}{L}$ 이므로

$$|r_{n+1} - L| = \left| \frac{1}{r_n} - \frac{1}{L} \right| = \frac{|r_n - L|}{r_n L} \leq \frac{1}{L} |r_n - L|.$$

이를 반복하면 $0 \leq |r_n - L| \leq \left(\frac{1}{L}\right)^{n-1} |r_1 - L|$ 입니다. $L > 1$ 이므로 $0 < \frac{1}{L} < 1$ 이고 오른쪽은 0으로 수렴합니다. 따라서 $r_n \rightarrow L$ 입니다.



항의 비는 황금비의 양쪽을 번갈아 지나면서 가까워집니다. 실제 수열값을 표시했습니다.

최종 답 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

실수하기 쉬운 부분 $L = 1 + \frac{1}{L}$ 만 풀면 극한의 후보만 찾은 것입니다. 위의 오차 부등식처럼 수렴을 보이는 한 문장이 꼭 필요합니다.

교재 연계 압축개념 Lecture 02 점화식이 주어진 수열의 극한 (PDF 16 19쪽)

수리논술 모범답안 · 단계별 10점

[3점] $r_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 이라 하면 $r_1 = 1, r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$ 이다. 이 관계로부터 모든 n 에 대해 $1 \leq r_n \leq 2$ 이다.

[4점] $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 라 하면 $L = 1 + \frac{1}{L}$ 이고 $L > 1$ 이다. 따라서

$$|r_{n+1} - L| = \frac{|r_n - L|}{r_n L} \leq \frac{1}{L} |r_n - L|.$$

[3점] 반복하여 $0 \leq |r_n - L| \leq L^{-(n-1)} |r_1 - L| \rightarrow 0$ 을 얻는다. 그러므로 구하는 극한은 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 이다.

채점기준 · 학습용 10점

단계	채점할 내용	배점
1	비의 점화식과 양의 범위를 구한다	3점
2	극한 후보와 오차의 부등식을 구한다	4점
3	등비수열의 극한으로 실제 수렴을 보인다	3점
합계		10점

각 단계에서 핵심 식과 근거가 맞으면 해당 배점의 일부를 인정합니다. 계산·원래 조건·결론까지 맞으면 그 단계의 만점입니다.