

아주대학교 자연계 수학

실제 문제 + 상세해설 맛보기

핵심유형 FINAL 01 연속하지 않는 1과 점화식

문제 및 제시문: 원본 PDF 4-5쪽

Ajou_Natural_01_Core_02_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 4-5쪽

Ajou_Natural_01_Core_01_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

FINAL01

연속하지 않는 1과 점화식

출처 · 2015학년도 모의 1-1(1)·(2)

수열 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 에 대하여 계수를 차례로 모아 쓴 식

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

을 이 수열의 생성함수라 한다. 두 생성함수를 곱할 때 x^n 의 계수는 $\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$ 로 정한다. 이 문제에서는 제시문의 계수 연산을 이용한다. 자연수 n 에 대하여 길이가 n 인 0과 1의 나열의 수를 a_n , 그중 1이 연달아 나타나지 않는 나열의 수를 b_n 이라 하자.

- (1) $n \geq 1$ 일 때 a_n 을 구하시오.
- (2) $b_0 = 1$ 로 약속할 때 $\{b_n\}$ 의 점화식과 생성함수 $B(x)$ 를 구하시오.

답안은 다음 면에 작성하십시오.

이름 _____ 작성 시간 _____ **답안 작성**

최민구 · BlueMath

FINAL01

연속하지 않는 1과 점화식

출처 · 2015학년도 모의 1-1(1)·(2)

문제 확인

수열 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 에 대하여 계수를 차례로 모아 쓴 식

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

을 이 수열의 생성함수라 한다. 두 생성함수를 곱할 때 x^n 의 계수는 $\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$ 로 정한다. 이 문제에서는 제시문의 계수 연산을 이용한다. 자연수 n 에 대하여 길이가 n 인 0과 1의 나열의 수를 a_n , 그중 1이 연달아 나타나지 않는 나열의 수를 b_n 이라 하자.

(1) $n \geq 1$ 일 때 a_n 을 구하시오.(2) $b_0 = 1$ 로 약속할 때 $\{b_n\}$ 의 점화식과 생성함수 $B(x)$ 를 구하시오.

핵심 개념 곱의 법칙, 경우의 분류, 점화식, 제시문의 생성함수

01 제한이 없는 나열부터 구합니다

각 자리는 0 또는 1 중 하나를 고릅니다. 서로 다른 자리의 선택에 제한이 없으므로 곱의 법칙에 의해 $a_n = 2^n$ 입니다. 그러나 b_n 은 이 방법으로 세면 안 됩니다. 앞자리가 1이면 다음 자리의 선택지가 줄어들기 때문입니다.

02 마지막 자리에 따라 겹치지 않게 나눕니다

마지막이 0인 나열은 그 0을 지우면 길이 $n-1$ 의 허용 나열과 정확히 대응합니다. 따라서 b_{n-1} 개입니다. 마지막이 1이면 바로 앞은 반드시 0입니다. 끝의 01을 지우면 길이 $n-2$ 의 허용 나열이 남으므로 b_{n-2} 개입니다. 반대로 허용 나열에 0 또는 01을 붙이면 언제나 조건을 만족합니다. 두 경우는 끝자리가 달라 겹치지 않습니다.

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

길이 1에서는 0, 1이 가능하여 $b_1 = 2$ 이고, 길이 2에서는 00, 01, 10이 가능하여 $b_2 = 3$ 입니다. 빈 나열은 한 가지로 세므로 $b_0 = 1$ 과도 맞습니다.

03 생성함수의 계수를 실제로 맞춰 봅니다

 $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 라 두면

$$\begin{aligned} B(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots, \\ xB(x) &= b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + \cdots, \\ x^2B(x) &= b_0x^2 + b_1x^3 + \cdots. \end{aligned}$$

세 식을 첫째 식에서 차례로 빼면 x^2 이상의 계수는 점화식 때문에 모두 0이 됩니다. 상수항은 $b_0 = 1$, 일차항은 $b_1 - b_0 = 1$ 만 남습니다.

$$(1 - x - x^2)B(x) = 1 + x, \quad B(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}.$$

무한급수의 수렴을 새로 가정한 것이 아니라 제시문에서 정한 계수 연산을 쓴 것입니다.

FINAL01

모범답안과 채점 기준

수리논술 모범답안

각 자리의 선택지가 두 가지이므로 $a_n = 2^n$ 이다. 조건을 만족하는 나열을 마지막이 0인 경우와 1인 경우로 나누면, 각각 끝의 0과 01을 지워 길이 $n-1, n-2$ 의 허용 나열과 일대일로 대응시킬 수 있다. 따라서

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 에서 계수를 비교하면

$$(1 - x - x^2)B(x) = b_0 + (b_1 - b_0)x = 1 + x.$$

따라서 $B(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}$ 이다.

연습용 배점 · 20점 만점

평가 요소	배점
곱의 법칙으로 전체 나열과 초항 결정	5점
두 끝부분의 일대일 대응과 점화식 증명	8점
계수 소거 과정과 생성함수 계산	7점
합계	20점

오답 점검

끝이 1인 경우를 단순히 b_{n-1} 개로 세면 11이 들어간 나열이 포함됩니다. 생성함수의 분자를 1로 쓰는 오류는 $b_1 = 2$ 를 빠뜨릴 때 생깁니다.

BlueMath 교재연계

Lecture 02 · 점화식이 주어진 수열의 극한 (기존 교재 PDF 15~18쪽)

Lecture 22 · 확률 (기존 교재 PDF 148~156쪽)

보완 교재 · 「수리논술에 필요한 확률과 통계 개념정리」