

가천대학교 한의학·약학

실제 문제 + 상세해설 맛보기

가천대 한의예·약학 유형 · CORE TYPE 01 지수조건

문제 및 제시문: 원본 PDF 3-3쪽

01_Gachon_KoreanMedicine_Core_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 3-5쪽

01_Gachon_KoreanMedicine_Core_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

CORE TYPE 01

지수 조건과 절댓값을 유한한 경우로 분류

수학 I · 지수의 성질, 다항식의 인수분해

꺼내 쓸 개념

밑이 같은 지수식은 지수의 등식으로 바꿉니다. 절댓값이 1이라는 조건은 안쪽이 1 또는 -1 인 두 경우입니다. 세제곱식이 생기면 근의 부호와 양수 조건을 함께 사용하여 후보를 빠짐없이 정리합니다.

준비문제 01

양수 a, b 가 $9^a = 27^b$ 를 만족할 때 b 를 a 로 나타내고 $a + b - ab^2$ 를 a 로 나타내라.

핵심문항 01 · 풀이 과정을 서술하시오

두 양수 a, b 가 $9^a = 27^b$, $|a + b - ab^2| = 1$ 을 만족할 때, $|a^2 - 3b|$ 의 최댓값과 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오.

풀이·답안 작성

CORE TYPE 01

지수 조건과 절댓값을 유한한 경우로 분류

수학 I · 지수의 성질, 다항식의 인수분해

정답

$$\text{최대 } \frac{7\sqrt{33}-33}{8}, \text{ 최소 } \frac{9-\sqrt{33}}{8}$$

준비문제 01 해설

양수 a, b 가 $9^a = 27^b$ 를 만족할 때 b 를 a 로 나타내고 $a + b - ab^2$ 를 a 로 나타내라.

$$3^{2a} = 3^{3b} \text{이므로 } b = \frac{2}{3}a \text{이다. 따라서 } a + b - ab^2 = \frac{5}{3}a - \frac{4}{9}a^3 \text{이다.}$$

핵심문항 다시 읽기

두 양수 a, b 가 $9^a = 27^b$, $|a + b - ab^2| = 1$ 을 만족할 때, $|a^2 - 3b|$ 의 최댓값과 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오.

풀이의 출발점

지수 조건으로 한 문자를 없앱니다. 첫 번째 절댓값은 두 방정식을 만들고, 마지막 절댓값은 각 후보의 부호에 따라 계산합니다. 두 절댓값의 역할을 구분하십시오.

1. 한 변수로 바꾸고 두 부호를 나눕니다.

지수 조건에서 $b = \frac{2}{3}a$ 이다. 따라서 $\left| \frac{5}{3}a - \frac{4}{9}a^3 \right| = 1$ 이고, 구하려는 값은 $|a^2 - 2a|$ 이다. 안쪽이 1인 경우에는 $4a^3 - 15a + 9 = 0$, 안쪽이 -1인 경우에는 $4a^3 - 15a - 9 = 0$ 이다.

2. 양수인 해를 빠짐없이 찾습니다.

첫 식은 $(2a-3)(2a^2+3a-3) = 0$ 이므로 양수 해는 $a = \frac{3}{2}$, $a = \frac{-3+\sqrt{33}}{4}$ 이다. 둘째 식은 $(2a+3)(2a^2-3a-3) = 0$ 이므로 양수 해는 $a = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$ 뿐이다. 나머지 근은 음수여서 제외한다. b 는 각 a 에 대하여 $\frac{2}{3}a > 0$ 이므로 세 경우 모두 실제로 가능하다.

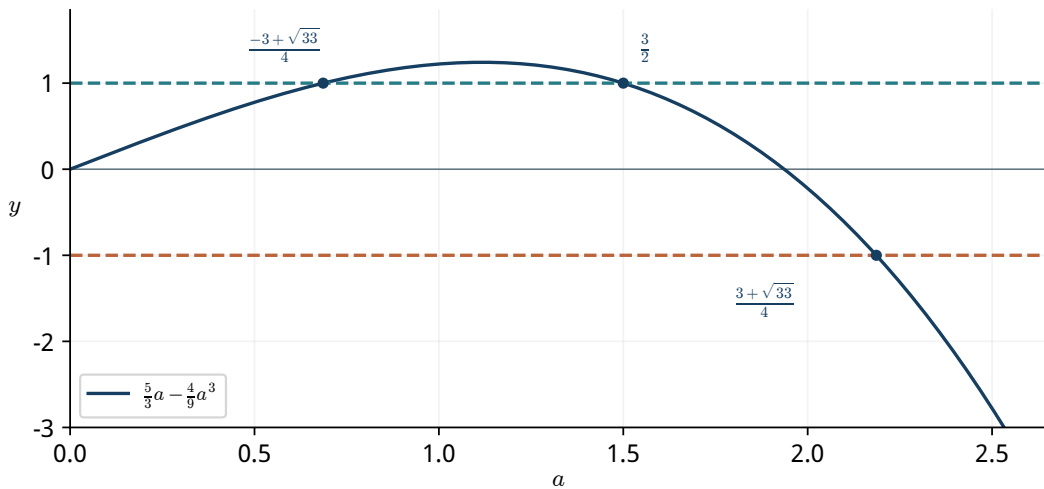
첫 방정식의 이차인수의 두 근은 $\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$ 이고, 둘째 방정식은 $\frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$ 입니다. $\sqrt{33} > 3$ 이므로 각 이차식에서 양수인 근은 하나씩입니다. 일차인수에서 첫 방정식의 $\frac{3}{2}$ 만 양수이고 둘째의 $-\frac{3}{2}$ 는 제외됩니다. 따라서 전체 양수 후보가 정확히 세 개입니다.

3. 절댓값의 부호를 확인하여 후보값을 계산합니다.

$r = \sqrt{33}$ 라 놓으면 $5 < r < 6$ 이다. 앞의 두 a 는 $0 < a < 20$ 이므로 $|a^2 - 2a| = 2a - a^2$, 마지막 a 는 $a > 20$ 이므로 $a^2 - 2a$ 이다. 각각의 값은

a	$ a^2 - 2a $
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{-3+r}{4}$	$\frac{7r-33}{8}$
$\frac{3+r}{4}$	$\frac{9-r}{8}$

이다. 근호 후보에 절댓값을 남긴 채 대소를 비교하지 말고 먼저 부호를 확정한다.



절댓값 안의 식이 1 또는 -1인 두 수평선과 만나는 양의 가로좌표가 정확히 세 개입니다.

4. 정확한 부등식으로 최댓값과 최솟값을 가립니다.

$r > 30$ 이므로 $\frac{9-r}{8} < \frac{3}{4}$ 이다. 또 $r > \frac{39}{7}$ 은 $33 > \frac{1521}{49}$ 에서 성립하므로 $\frac{7r-33}{8} > \frac{3}{4}$ 이다. 따라서 최댓값은 $\frac{7\sqrt{33}-33}{8}$, 최솟값은 $\frac{9-\sqrt{33}}{8}$ 이다. 소수 근삿값 없이 비교를 끝낼 수 있다.

시험장에서 쓸 모범답안

$b = \frac{2}{3}a$ 이므로 $4a^3 - 15a + 9 = 0$ 또는 $4a^3 - 15a - 9 = 0$ 이다. 인수분해와 양수 조건에서 $a = \frac{3}{2}, \frac{-3+\sqrt{33}}{4}, \frac{3+\sqrt{33}}{4}$ 를 얻는다. $|a^2 - 3b|$ 는 각각 $\frac{3}{4}, \frac{7\sqrt{33}-33}{8}, \frac{9-\sqrt{33}}{8}$ 이다. 정확한 비교에 따라 최대는 $\frac{7\sqrt{33}-33}{8}$, 최소는 $\frac{9-\sqrt{33}}{8}$ 이다.

감점이 생기는 지점

절댓값이 1이라는 조건에서 한쪽 부호만 풀면 후보가 빠집니다. 양수 조건과 마지막 절댓값의 부호를 각각 확인하십시오.

숫컷 · 핵심 생각

지수 조건으로 b 를 먼저 제거하면 세 변수처럼 보이는 조건이 한 개의 삼차방정식 문제로 바뀝니다.

학습용 채점기준 · 핵심문항 10점

확인할 서술	배점
지수·절댓값의 두 경우	3
인수분해·양수 근	3
후보값 및 정확한 비교	4

출처·연계·변형 2027 가천대 모의 한의예·약학 1번 재 조판. 공통과목 조건 해석을 먼저 점검하는 전용 문항.