

서울여자대학교 자유전공 광역 자연계

실제 문제 + 상세해설 맛보기

핵심유형 CORE 01 외분점 점화식: 차분을 등비수열로 바꾸기

문제 및 제시문: 원본 PDF 3-3쪽

SeoulWomen_Core12_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 3-4쪽

SeoulWomen_Core12_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

CORE 01 외분점점화식 - 차분을등비수열로바꾸기

2026 기출재구성

문제

수직선위의원점을 $O(0)$ 라하자. 점 $A_1(1)$ 에대하여선분 OA_1 을 $4 : 1$ 로외분하는점을 A_2 라하고, $n \geq 3$ 인모든자연수 n 에대하여선분 $A_{n-2}A_{n-1}$ 을 $4 : 1$ 로외분하는점을 A_n 이라한다. 점 A_n 의좌표를 a_n 이라할때다음을구하시오.

(1) a_2, a_3, a_4 (2) a_n 의일반항.

필수개념

두점의좌표가 x_1, x_2 일때선분을 $m : n$ 으로외분하는점은

$$\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}$$

이다. 점화식이 $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ 처럼보이더라도, $\alpha + \beta = 1$ 이면 $a_n - a_{n-1}$ 을먼저보는것이빠르다.

핵심발상

외분공식으로점화식을만든뒤 $d_n = a_n - a_{n-1}$ 를두면차분이공비 $1/3$ 인등비수열이된다.

강의식단계풀이

편의를위해 $a_0 = 0, a_1 = 1$ 로둔다. 외분점공식으로

$$a_n = \frac{4a_{n-1} - a_{n-2}}{3} \quad (n \geq 2).$$

따라서

$$a_2 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{13}{9}, \quad a_4 = \frac{4}{3} \cdot \frac{13}{9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{40}{27}.$$

양변에서 a_{n-1} 을빼면

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{3}(a_{n-1} - a_{n-2}).$$

즉 $d_n := a_n - a_{n-1}$ 라두면

$$d_n = \frac{1}{3}d_{n-1}, \quad d_1 = 1.$$

따라서 $d_n = (1/3)^{n-1}$ 이고

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}}.$$

실전숫컷

계수 $\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}$ 의합이 1 이다. 이런 2 항점화식은차분을취했을때 1 차등비점화식으로떨어지는지먼저확인한다.

수리논술모범답안

외분공식에서

$$a_n = \frac{4a_{n-1} - a_{n-2}}{3}.$$

 $d_n = a_n - a_{n-1}$ 라하면 $d_n = \frac{1}{3}d_{n-1}$, $d_1 = 1$. 따라서

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

또 $a_2 = \frac{4}{3}$, $a_3 = \frac{13}{9}$, $a_4 = \frac{40}{27}$.

채점기준표

배점	확인요소
8 점	외분점공식과점화식 $a_n = (4a_{n-1} - a_{n-2})/3$
12 점	차분등비수열을이용한일반항도출

Blue Math 교재연계

직접연계: **Lecture 02 문제 2-1 2-4** (점화식구조), **실전연습 Lecture 2 문제 5** (내분점좌표공식).간접연계: **Lecture 01 문제 1-2 1-3** (등비·망원구조).