

인하대학교 일반자연

실제 문제 + 상세해설 맛보기

인하대 일반 · FINAL 01회 문제 1

문제 및 제시문: 원본 PDF 3-3쪽

03_Basic_R01_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 3-4쪽

03_Basic_R01_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

1 · 접선이 만드는 삼각형의 최소 넓이

2027학년도 인하대 모의논술 자연 문제1 원문 · 첨부 합본 PDF 1쪽

함수 $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ ($x > 0$)의 그래프 위의 점 $P(t, f(t))$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 A , 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 B 라 할 때, 삼각형 APB 의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. 단, $t > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ 이다.

1. $S(t)$ 를 t 에 관한 식으로 나타내시오. [기출 원문]
2. $S(t)$ 의 최솟값을 구하시오. [기출 원문]

풀이의 근거와 경우 구분을 문장으로 적으세요.

1 · 접선이 만드는 삼각형의 최소 넓이

2027학년도 인하대 모의논술 자연 문제1 원문 · 첨부 합본 PDF 1쪽

문제의 조건과 물음

함수 $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ ($x > 0$)의 그래프 위의 점 $P(t, f(t))$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 A , 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 B 라 할 때, 삼각형 APB 의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. 단, $t > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ 이다.

1. $S(t)$ 를 t 에 관한 식으로 나타내시오. [기출 원문]
2. $S(t)$ 의 최솟값을 구하시오. [기출 원문]

상세해설

1. 먼저 기울기의 부호를 확인합니다. $f'(t) = 3t^2 - \frac{1}{t^2} = \frac{3t^4 - 1}{t^2}$ 입니다. 주어진 범위에서는 $3t^4 - 1 > 0$ 이므로 접선의 기울기는 양수입니다. 높이 $PB = f(t) > 0$ 를 기울기로 나누면 가로 길이 AB 가 됩니다. 좌표를 구하기 전에 이 구조를 잡으면 부호 실수를 줄일 수 있습니다.

2. 접선과 밑변의 길이를 구합니다.

$$y - f(t) = f'(t)(x - t), \quad x_A = t - \frac{f(t)}{f'(t)}.$$

따라서 $x_A < t$ 이고

$$AB = t - x_A = \frac{f(t)}{f'(t)} = \frac{t(t^4 + 1)}{3t^4 - 1}, \quad PB = \frac{t^4 + 1}{t}.$$

여기서 A 의 x 좌표가 양수인지 음수인지는 넓이에 영향을 주지 않습니다. 반드시 A 와 B 사이의 길이를 써야 합니다.

3. 넓이를 정리합니다.

$$S(t) = \frac{1}{2}AB \cdot PB = \frac{(t^4 + 1)^2}{2(3t^4 - 1)}.$$

4. 치환 후 증가와 감소를 판단합니다. $u = t^4$ 로 놓으면 $u > \frac{1}{3}$ 이고, $t \mapsto u$ 는 증가하므로 u 에 대한 최소를 구해도 됩니다.

$$T(u) = \frac{(u + 1)^2}{2(3u - 1)}, \quad T'(u) = \frac{(u + 1)(3u - 5)}{2(3u - 1)^2}.$$

분모와 $u + 1$ 이 양수이므로 부호는 $3u - 5$ 로 결정됩니다.

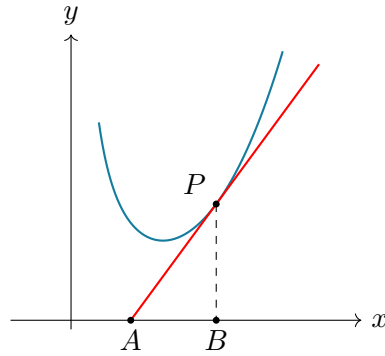
u	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$	$\frac{5}{3}$	$(\frac{5}{3}, \infty)$
$T'(u)$		-	0	+
$T(u)$		$\searrow$	$\frac{8}{9}$	$\nearrow$

5. 등호 조건까지 적습니다. $u = \frac{5}{3}$, 즉 $t = \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$ 일 때 $S(t) = \frac{8}{9}$ 입니다. 양쪽 구간에서 감소 후 증가하므로 단순한 극솟값이 아니라 주어진 전체 범위에서의 최솟값입니다.

빠른 확인. 다음 항등식으로도 바로 확인할 수 있습니다.

$$S(t) - \frac{8}{9} = \frac{(3t^4 - 5)^2}{18(3t^4 - 1)} \geq 0.$$

분모가 양수라는 조건을 함께 쓰면 완전한 대안 풀이가 됩니다.



그림은 한 접점에서의 위치 관계를 설명한 것입니다. 넓이 계산은 위의 일반식으로 진행합니다.

논술 모범답안

$f'(t) > 0$ 이므로 $AB = \frac{f(t)}{f'(t)}$, $PB = f(t)$ 이다. 따라서 $S(t) = \frac{(t^4+1)^2}{2(3t^4-1)}$ 이다. $u = t^4 > \frac{1}{3}$ 로 놓으면 넓이의 도함수는 $\frac{(u+1)(3u-5)}{2(3u-1)^2}$ 이므로 $u = \frac{5}{3}$ 을 기준으로 감소 후 증가한다. 따라서 최솟값은 $\frac{8}{9}$ 이다.

학습용 채점 기준

30점: 접선·밑변 8점, 넓이식 7점, 치환·도함수 7점, 증감·최솟값·등호조건 8점.