

인하대학교 의예

실제 문제 + 상세해설 맛보기

인하대 의예 · FINAL 01회 MM01_1

문제 및 제시문: 원본 PDF 3-3쪽

03_Basic_R01_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 3-5쪽

03_Basic_R01_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

MM01_1 · 절댓값 합성함수의 그래프와 미분가능성

2027학년도 인하대학교 모의논술 의예과, 문제 1 · 첨부 합본 문제 PDF 6쪽 · 공식 해설 PDF 9쪽

함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a + \Delta x$ 까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

이다. $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 이 평균변화율의 극한값이 존재하면 f 는 $x = a$ 에서 미분가능하다고 한다. 두 함수 $f(x), g(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \quad g(x) = \begin{cases} -8x & (x \geq 0), \\ 16x & (x < 0). \end{cases}$$

(1-1) 함수 $y = f(|x| - 3)$ 의 그래프의 개형을 그리시오.

(1-2) 함수 $y = f(|x| + a)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 상수 a 의 값을 모두 구하시오.

풀이의 근거와 경우 구분을 문장으로 적으세요.

MM01_1 · 절댓값 합성함수의 그래프와 미분가능성

2027학년도 인하대학교 모의논술 의예과, 문제 1 · 첨부 합본 문제 PDF 6쪽 · 공식 해설 PDF 9쪽

문제의 조건과 물음

함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a + \Delta x$ 까지 변할 때 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

이다. $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 이 평균변화율의 극한값이 존재하면 f 는 $x = a$ 에서 미분가능하다고 한다. 두 함수 $f(x), g(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \quad g(x) = \begin{cases} -8x & (x \geq 0), \\ 16x & (x < 0). \end{cases}$$

(1-1) 함수 $y = f(|x| - 3)$ 의 그래프의 개형을 그리시오.

(1-2) 함수 $y = f(|x| + a)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 상수 a 의 값을 모두 구하시오.

상세해설

1단계. 바깥 함수의 변수와 실제 그래프의 변수를 구분합니다. f 의 식에 들어가는 값을 u 로 적어 두면

$$f(u) = 2u^3 + 3u^2 - 12u + 1, \quad f'(u) = 6(u + 2)(u - 1)$$

입니다. $f'(u) = 0$ 인 값은 $u = -2, 1$ 입니다. 그런데 그리려는 함수는 $h(x) = f(|x| - 3)$ 입니다. 따라서 u 와 x 를 같은 것으로 취급하면 안 됩니다. $x \geq 0$ 에서는 $u = x - 3$, $x < 0$ 에서는 $u = -x - 3$ 입니다.

2단계. 오른쪽 절반을 정확히 그립니다. $x \geq 0$ 일 때 $h(x) = f(x - 3)$ 이므로

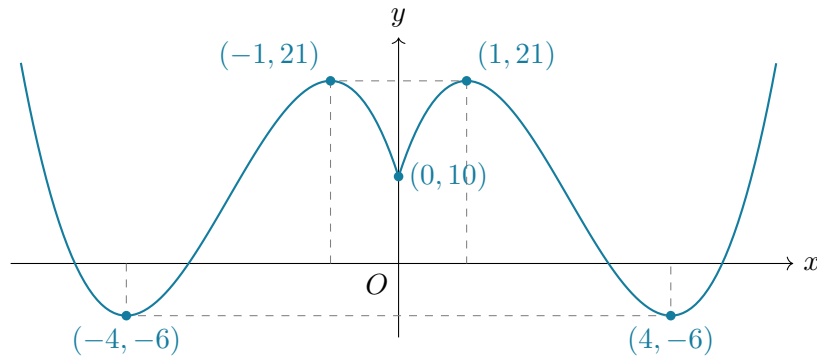
$$h'(x) = f'(x - 3) = 6(x - 1)(x - 4) \quad (x > 0).$$

또한 $h(0) = f(-3) = 10$, $h(1) = f(-2) = 21$, $h(4) = f(1) = -6$ 입니다. 따라서 오른쪽 그래프의 증감은 다음과 같습니다.

x	0	(0, 1)	1	(1, 4)	4	(4, ∞)	∞
$h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$	10	↗	21	↘	-6	↗	∞

x 가 커질 때 $h(x)$ 는 양의 무한대로 커집니다. 그래프의 개형을 그릴 때는 극값을 갖는 점의 위치와 높이, 시작점의 높이, 양끝의 방향을 모두 표시해야 합니다.

3단계. 왼쪽은 y 축에 대하여 대칭이동합니다. $h(-x) = h(x)$ 이므로 오른쪽 절반을 y 축에 대하여 대칭이동합니다. 따라서 극대인 점은 $(\pm 1, 21)$, 극소인 점은 $(\pm 4, -6)$ 이며 $(0, 10)$ 도 주변보다 낮은 점입니다. $x = 0$ 에서는 오른쪽 기울기 $f'(-3) = 24$ 와 왼쪽 기울기 $-f'(-3) = -24$ 가 다르므로 그래프가 매끄럽게 이어지지 않습니다.



그림의 x 축과 만나는 위치는 개형을 보여 주기 위한 것이며, 이 문항에서 그 좌표를 따로 구할 필요는 없습니다.

4단계. 미분가능성을 확인할 곳은 $x = 0$ 입니다. $H(x) = f(|x| + a)$ 라고 놓습니다. $x > 0$ 에서는 $H(x) = f(x + a)$, $x < 0$ 에서는 $H(x) = f(-x + a)$ 이므로 각각 다항함수이고 미분가능합니다. 또 $x = 0$ 에서 양쪽 함수값의 극한은 모두 $f(a) = H(0)$ 이므로 연속입니다. 따라서 0에서 평균변화율의 좌우극한이 같아지는 조건만 구하면 됩니다.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{H(t) - H(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a).$$

$t < 0$ 에서는 $v = -t > 0$ 로 바꾸면

$$\frac{H(t) - H(0)}{t} = \frac{f(a-t) - f(a)}{t} = -\frac{f(a+v) - f(a)}{v}.$$

따라서 왼쪽 극한은 $-f'(a)$ 입니다. 음수가 붙는 이유는 단순히 절댓값 때문이라고 외우기보다, $t < 0$ 일 때 분모 $t = -v$ 라는 것을 확인하는 것이 정확합니다.

5단계. (1-2)의 필요조건과 충분조건을 함께 확인합니다. 양쪽 극한이 같으려면 $f'(a) = -f'(a)$, 즉 $f'(a) = 0$ 이어야 합니다.

$$6(a+2)(a-1) = 0 \iff \boxed{a = -2 \text{ 또는 } a = 1}.$$

이 두 값에서는 양쪽 극한이 모두 0으로 같고, 0 이외에서는 이미 미분가능하므로 실수 전체에서 미분가능합니다. 따라서 조건을 만족하는 값이 빠지거나 더해진 것이 없습니다.

논술 모범답안

$f'(u) = 6(u+2)(u-1)$ 이다. $x \geq 0$ 에서 $h(x) = f(x-3)$ 이므로 $h'(x) = 6(x-1)(x-4)$ 이고, $h(0) = 10$, $h(1) = 21$, $h(4) = -6$ 이다. 따라서 $[0, 1]$ 에서 증가, $[1, 4]$ 에서 감소, $[4, \infty)$ 에서 증가한다. $h(-x) = h(x)$ 이므로 이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 (1-1)의 개형을 얻는다.

$H(x) = f(|x| + a)$ 는 0에서 연속이고 0 이외에서 미분가능하다. 0에서 평균변화율의 좌우극한은 각각 $-f'(a)$, $f'(a)$ 이므로 미분가능하기 위한 필요충분조건은 $f'(a) = 0$ 이다. 따라서 (1-2)의 답은 $a = -2, 1$ 이다.

학습용 채점 기준

학습용 배점: 30점.

평가 내용	배점
조건과 정의역 확인	6
핵심 식과 증명	12
경우의 완전성·검산	6
결론과 논술 서술	6
합계	30

학교 공식 배점이 아닌 BlueMath 연습 기준입니다.