

서강대학교 자연계

실제 문제 + 상세해설 맛보기

서강대 자연 · 핵심유형 01 중첩된 제곱근 수열의 수렴

문제 및 제시문: 원본 PDF 4-4쪽

01_Core_01_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 5-6쪽

01_Core_02_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

01 중첩된 제곱근 수열의 수렴

2013학년도 모의 · 문제 2-2

핵심 개념 수학적 귀납법, 수열의 증가, 제시문의 수렴 성질

수열이

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad \dots$$

로 정의된다. 이 수열이 수렴함을 보이고 극한값을 구하시오. 증가하면서 일정한 수보다 작은 수열은 수렴한다는 제시문의 성질을 사용할 수 있다. 풀이 작성 조건 · 핵심 식 · 결론의 근거를 이어 쓰세요.

01 중첩된 제곱근 수열의 수렴

2013학년도 모의 · 문제 2-2

핵심 개념 수학적 귀납법, 수열의 증가, 제시문의 수렴 성질

문제 확인

수열이

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad \dots$$

로 정의된다. 이 수열이 수렴함을 보이고 극한값을 구하시오. 증가하면서 일정한 수보다 작은 수열은 수렴한다는 제시문의 성질을 사용할 수 있다.

1. 중첩된 식을 점화식으로 바꾸기

첫째항과 다음 항의 관계는

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

극한을 L 이라 놓고 방정식을 푸는 것만으로는 수렴이 증명되지 않습니다. 먼저 수열이 증가하고 일정한 수를 넘지 않음을 보여야 합니다.

2. 모든 항이 2보다 작음을 귀납법으로 증명

처음에는 $0 < a_1 = \sqrt{2} < 2$, $0 < a_n < 2$ 라고 가정하면

$$0 < a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4} = 2.$$

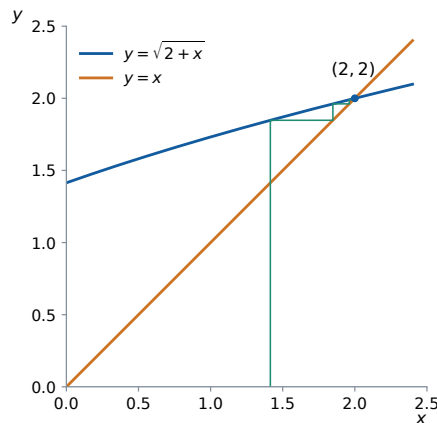
따라서 수학적 귀납법으로 모든 자연수에서 $0 < a_n < 2$ 입니다. 다음 단계의 제곱근 안이 양수인 사실도 함께 확인됩니다.

3. 이웃한 항의 대소관계

$0 < a_n < 2$ 에서

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - a_n^2 = (2 - a_n)(a_n + 1) > 0.$$

두 항이 양수이므로 제곱의 대소관계와 원래 항의 대소관계가 같아 $a_{n+1} > a_n$ 입니다. 따라서 수열은 증가하고 2보다 항상 작습니다. 제시문의 성질에 의해 수렴합니다.



$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ 의 반복. $\sqrt{2}$ 에서 시작한 항들이 증가하면서 교점 $(2, 2)$ 에 가까워진다.

4. 수렴을 증명한 뒤 극한방정식 풀기

$a_n \rightarrow L$ 이고 $\sqrt{2} \leq L \leq 2$ 입니다. 제곱근함수의 연속성으로

$$L = \sqrt{2+L}, \quad L^2 - L - 2 = 0, \quad (L-2)(L+1) = 0.$$

대수적으로는 $L = 2, -1$ 이 나오지만 $L \geq \sqrt{2} > 0$ 이므로 -1 은 제외합니다. 따라서 극한값은 2입니다.

풀이를 정리하는 관점

$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_n)(a_n + 1)$ 를 이용하면 증가성을 한 번에 확인할 수 있습니다. 첫째항은 원문대로 $\sqrt{2}$ 이며 1로 바뀌지 않습니다.

논술 답안 예시

$a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ 이다. $0 < a_1 < 2$ 이고 $0 < a_n < 2$ 이면 $0 < a_{n+1} < 2$ 이므로 귀납법으로 모든 항이 2보다 작다. 또한 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_n)(a_n + 1) > 0$ 이므로 증가한다. 제시문의 성질로 수렴하며, 극한을 $L > 0$ 라 하면 $L = \sqrt{2+L}$. 따라서 $L = 2$.

답안 점검

- 점화식과 귀납법으로 모든 항의 범위를 보인다.
- 증가성과 제시문을 사용하여 수렴을 보인다.
- 극한방정식과 부호로 극한값을 정한다.

자주 놓치는 점 수렴의 근거를 쓰기 전에 극한을 가정하면 안 됩니다. 귀납법의 첫 단계·가정·결론과 음의 해의 배제를 모두 씁니다.