

중앙대학교 일반형 이공계열

실제 문제 + 상세해설 맛보기

미적분 핵심유형 01 지수·삼각함수의 유일한 교점과 넓이

문제 및 제시문: 원본 PDF 2-2쪽

CAU_General_01_Core_01_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 2-3쪽

CAU_General_01_Core_02_Solutions_Corrected.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

핵심유형 01

2020학년도 자연 I 기출

어떤 양의 실수 a 에 대하여, $x \geq 0$ 에서 정의된 두 곡선

$$y = e^x, \quad y = a \sin x$$

가 오직 한 점에서 만난다. 이때 두 곡선 $y = e^x$, $y = a \sin x$ 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

풀이 공간

핵심유형 01

2020학년도 자연 I 기출

문제

어떤 양의 실수 a 에 대하여, $x \geq 0$ 에서 정의된 두 곡선

$$y = e^x, \quad y = a \sin x$$

가 오직 한 점에서 만난다. 이때 두 곡선 $y = e^x$, $y = a \sin x$ 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

핵심 발상

두 곡선이 한 점에서만 만난다는 것은 그 교점에서 두 그래프가 서로 접한다는 뜻이다. 따라서 함수값과 도함수값을 동시에 맞춘 뒤 넓이를 적분한다.

1. 유일한 교점은 접점이다

$g(x) = e^x - a \sin x$ 라 하자. $x \geq 0$ 에서 두 곡선이 오직 한 점 $x = \alpha$ 에서 만나므로

$$g(\alpha) = 0, \quad g'(\alpha) = 0.$$

즉,

$$e^\alpha = a \sin \alpha, \quad e^\alpha = a \cos \alpha.$$

두 식을 비교하면 $\sin \alpha = \cos \alpha$ 이고, $a > 0$ 이며 교점은 $0 < \alpha \leq \pi/2$ 에 있으므로

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad a = \sqrt{2}e^{\pi/4}.$$

2. 넓이 계산

구하는 영역에서는 $e^x \geq a \sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/4} (e^x - \sqrt{2}e^{\pi/4} \sin x) dx \\ &= [e^x + \sqrt{2}e^{\pi/4} \cos x]_0^{\pi/4} \\ &= (2 - \sqrt{2})e^{\pi/4} - 1. \end{aligned}$$

답안 작성 포인트

“한 점에서 만난다”를 곧바로 접한다고 쓰지 말고, $g(\alpha) = g'(\alpha) = 0$ 을 명시하면 논리의 빈틈이 없다.

Blue Math 교재 연계

- 개념총정리 Lecture 11, 문제 11-1: 지수함수와 다른 함수의 교점 개수를 접선 조건으로 바꾸는 구조가 직접 연결된다. 이 문항 역시 “근의 개수=1”을 “중근/접점”으로 해석한다.
- Lecture 10, 문제 10-5: $x \sin x$ 의 그래프를 미분으로 분석하는 문제. 삼각함수 그래프와 증가·감소를 통해 교점 위치를 제한하는 과정이 유사하다.
- Lecture 13, 문제 13-9: 지수함수와 삼각함수가 섞인 적분을 정리하는 연습. 마지막 넓이 계산에서 같은 적분 감각을 쓴다.

최종 답

$$S = (2 - \sqrt{2})e^{\pi/4} - 1$$

핵심유형 01 보완: 교점의 유일성과 첫 접점

$\sin x \leq 0$ 이면 $e^x = a \sin x$ 는 불가능하다. $\sin x > 0$ 인 구간 $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ 에서 $h(x) = e^x / \sin x$ 라 두면

$$h'(x) = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}.$$

따라서 h 는 $x = 2k\pi + \pi/4$ 까지 감소하고 이후 증가하며, 양 끝에서 $+\infty$ 로 발산한다. 각 구간의 최솟값은

$$m_k = \sqrt{2} e^{2k\pi + \pi/4} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

이고 $m_0 < m_1 < \dots$ 이다. $a < m_0$ 이면 교점이 없고, $a > m_0$ 이면 첫 구간에서 이미 두 교점이 생긴다. 그러므로 교점이 오직 하나하려면 $a = m_0 = \sqrt{2}e^{\pi/4}$ 이어야 한다. 이때 첫 구간에서만 접하고, 뒤 구간에서는 $a < m_k$ 이므로 교점이 없다.

접점은 $\alpha = \pi/4$ 이며, $[0, \pi/4]$ 에서 $e^x - a \sin x \geq 0$ 이다. 이로써 앞쪽 넓이 적분의 구간과 두 함수의 대소 관계까지 정당화된다.