

성균관대학교 수리형

실제 문제 + 상세해설 맛보기

성균관대 · 기본 01회 문제 1

문제 및 제시문: 원본 PDF 2-2쪽

08_Additional_9Sets_Basic_R01_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 3-4쪽

08_Additional_9Sets_Basic_R01_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

(가) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + Ax + B & (x < 1), \\ x^2 + Px + Q & (x \geq 1) \end{cases}$ 는 실수 전체에서 미분가능하다. $y = f(x)$ 와 $y = m$ 이 서로 다른 두 점에서만 만나는 m 의 집합은 $\{-6, 2\}$ 이다. (나) $g(x) = \begin{cases} -x^3 + ax^2 + bx + c & (x \leq 0), \\ x^2 + px + q & (x > 0) \end{cases}$ 는 연속이고 $x = -2$ 에서 극소이다. 네 교점을 갖는 $y = m$ 의 m 의 집합은 $(1, \beta)$ 이다. 또 $p + c = a + b$, $g(1) = -\frac{19}{2}$ 이다.

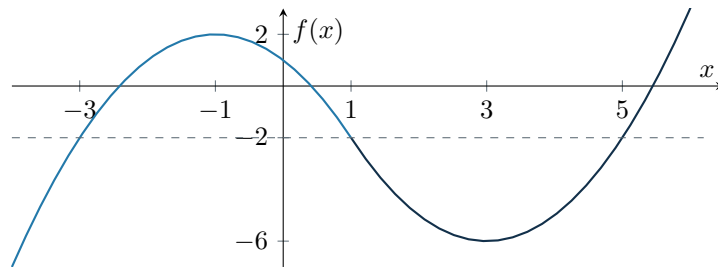
[1] A, B, P, Q 를 구하시오. (10점)

[2] a, b, c, p, q 를 구하시오. (10점)

[3] β 를 구하시오. (10점)

[문제 1] 수평선과의 교점 개수로 다항함수를 결정하기

출처·구성 성균관대 2026 자연3 문제 1 [1]~[3] 기출. 제공 2018~2027 합본 PDF 20쪽. 소문항 3개 모두 기출.



[1-1] 상세해설

1. 미분가능성을 두 조건으로 씁니다.

연속성에서 $-1 + A + B = 1 + P + Q$, 좌우 도함수 일치에서 $-2 + A = 2 + P$ 이므로 $P = A - 4$, $Q = B + 2$ 입니다. 두 포물선의 꼭짓점의 x 좌표는 각각 $u = \frac{A}{2}$, $v = 2 - \frac{A}{2}$ 로 $u + v = 2$ 입니다.

2. 두 꼭짓점이 각자의 구간 안에 있어야 합니다.

$u \geq 1$ 이면 왼쪽 조각은 끝까지 증가하고, $v \leq 1$ 인 오른쪽 조각도 처음부터 증가합니다. 두 조각이 매끄럽게 이어져 전체가 증가하므로 교점 두 개인 높이가 두 개만 나타나는 조건을 만족할 수 없습니다. 따라서 $u < 1 < v$ 입니다. 위로 굽은 오른쪽 조각의 최솟값을 L , 아래로 굽은 왼쪽 조각의 최댓값을 U 라 하면, $L < m < U$ 에서 총 세 교점, $m = L, U$ 에서 총 두 교점, 그 밖에는 한 교점입니다. 경계 $x = 1$ 에서 두 조각을 두 번 세지 않는다는 점이 중요합니다.

3. 최대·최소 높이를 대입합니다.

따라서 $U = 2$, $L = -6$ 이고

$$f(x) = -(x - u)^2 + 2 \quad (x < 1), \quad f(x) = (x - v)^2 - 6 \quad (x \geq 1).$$

도함수 일치로 $v = 2 - u$ 입니다. 연속성에 대입하면 $-(1 - u)^2 + 2 = (1 - u)^2 - 6$, 즉 $(1 - u)^2 = 4$ 입니다. $u < 1$ 이므로 $u = -1$, $v = 3$ 입니다. 전개하면 $A = -2$, $B = 1$, $P = -6$, $Q = 3$ 입니다.

수리논술 모범답안

좌우 미분계수가 같으므로 두 꼭짓점의 x 좌표 u, v 는 $u + v = 2$ 이다. 교점 조건으로 왼쪽 최댓값은 2, 오른쪽 최솟값은 -6이며 $u < 1 < v$ 이다. 연속성에서 $(1 - u)^2 = 4$ 를 얻으므로 $u = -1$, $v = 3$ 이다. 따라서 $f = -(x + 1)^2 + 2$ ($x < 1$), $f = (x - 3)^2 - 6$ ($x \geq 1$)이고 계수는 -2, 1, -6, 3이다.

BlueMath 배점 기준(10점) 좌우 함수값·미분계수 일치 3점; 꼭짓점 높이와 연결 조건으로 네 계수 결정 5점; 교점 개수와 꼭짓점 위치 확인 2점

서술 점검 전체 그래프의 교점 개수를 확인하지 않고 각각의 꼭짓점 값을 임의로 대입하면 논리 근거가 빠집니다.

[1-2] 상세해설

1. 그래프 조건에 앞서 선형 조건을 모읍니다.

연속성에서 $q = c$ 이고, 극소점이 -2이므로 왼쪽 미분계수 $-12 - 4a + b = 0$, 즉 $b = 12 + 4a$ 입니다. 또 $g(1) = 1 + p + q = -\frac{19}{2}$ 이므로 $p + c = -\frac{21}{2}$ 입니다. 이것을 $p + c = a + b$ 와 결합하면

$$a + (12 + 4a) = -\frac{21}{2} \implies a = -\frac{9}{2}, \quad b = -6.$$

2. 네 교점이 생기는 높이를 구합니다.

왼쪽 도함수는 $-3(x+1)(x+2)$ 입니다. $x = -2$ 에서 극소, $x = -1$ 에서 극대이며 그 높이는 $c+2, c+\frac{5}{2}$ 입니다. 끝점 $x = 0$ 의 높이는 c 입니다. $c+2 < m < c+\frac{5}{2}$ 이면 왼쪽 조각과 수평선은 세 점에서 만납니다. 이 높이들은 c 보다 크므로 오른쪽 이차함수는 $x > 0$ 에서 정확히 한 점과 만납니다. 곱이 $c-m < 0$ 인 이차방정식의 두 근 중 양의 근이 하나라는 것으로도 확인됩니다. 따라서 전체는 네 교점입니다. 그 밖의 높이에서는 왼쪽 조각이 세 교점을 갖지 못합니다. $m \leq c$ 에서는 왼쪽 교점이 없거나 끝점 하나이고, 오른쪽도 최대 두 개이므로 네 개가 될 수 없습니다. $m > c$ 에서는 오른쪽 교점이 하나뿐이므로 왼쪽 세 교점 구간에서만 네 개가 됩니다. 따라서 네 교점 구간은 정확히 $(c+2, c+\frac{5}{2})$ 입니다. 문제의 $(1, \beta)$ 와 비교하여 $c = -1, q = -1, p = -\frac{19}{2}$ 를 얻습니다.

수리논술 모범답안

연속성에서 $q = c$, 극소 조건에서 $b = 12 + 4a$ 이다. $p + c = -\frac{21}{2} = a + b$ 이므로 $a = -\frac{9}{2}, b = -6$ 이다. 왼쪽 도함수는 $-3(x+1)(x+2)$ 이므로 세 교점의 높이 구간은 $(c+2, c+\frac{5}{2})$ 이다. 이 구간에서 오른쪽 교점은 하나여야 전체 네 개가 된다. 따라서 $c+2 = 1$, 즉 $c = q = -1$ 이고 $p = -\frac{19}{2}$ 이다.

BlueMath 배점 기준(10점) 연속성·극소점·주어진 함수값의 식 3점; 두 계수를 정하고 네 교점 높이 구간 결정 5점; 남은 세 계수와 구간의 일치 확인 2점

서술 점검 네 교점 구간의 왼쪽 끝값을 쓰기 전에, 오른쪽 조각이 그 높이에서 한 교점을 갖는 이유를 밝혀야 합니다.

[1-3] 상세해설

앞 문항에서 네 교점 구간의 오른쪽 끝값은 왼쪽 조각의 극댓값임을 확인했습니다. $c = -1$ 이므로

$$\beta = g(-1) = 1 - \frac{9}{2} + 6 - 1 = \frac{3}{2}.$$

$m = \frac{3}{2}$ 에서는 $x = -1$ 에서 접하는 두 교점이 하나로 합쳐집니다. 왼쪽 조각의 서로 다른 교점이 두 개가 되고 오른쪽 한 개를 더해 총 세 개입니다. 따라서 오른쪽 끝은 포함되지 않는 열린구간입니다.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	감소	1	증가	$\frac{3}{2}$	감소

수리논술 모범답안

$g'(x) = -3(x+1)(x+2)$ 이므로 왼쪽 조각의 극댓값은 $g(-1) = \frac{3}{2}$ 이다. 이 높이에서 교점 두 개가 하나로 합쳐지므로 네 교점 구간의 오른쪽 끝은 $\beta = \frac{3}{2}$ 이다.

BlueMath 배점 기준(10점) 극댓값이 오른쪽 경계임을 설명 3점; 극댓값 계산 5점; 끝 높이에서 교점이 합쳐짐을 확인 2점